华章数学译丛

28

Applied Partial Differential Equations

with Fourier Series and Boundary Value Problems

(Fourth Edition)

实用偏微分方程

（原书第4版）

（美）Richard Haberman 著
南卫理公会大学

郁中丹 李援南 刘歆 宋燕红 译


机械工业出版社
China Machine Press

（原书第4版）

实用偏微分方程

本书讨论偏微分方程在工程技术科学与自然科学中的应用，以傅里叶方法（傅里叶级数、傅里叶变换和拉普拉斯变换）作为讲授的主线，讲授的内容是高级工程数学、自然科学范畴的数学方法中非常重要的部分。另外，本书内容涉及了不少前沿问题，特别是第14章可以作为非线性波动的入门资料。

作 者 简 介

Richard Haberman　1971年于麻省理工学院获得应用数学专业博士学位，现任南卫理公会大学数学系教授。他的主要研究方向包括奇异扰动法、非线性动力系统、非线性波动以及数学模型。



影印版

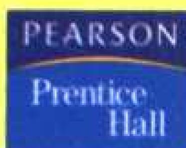
ISBN 7-111-15910-1
定价：75.00元

Applied Partial Differential Equations

with Fourier Series and Boundary Value Problems

(Fourth Edition)





www.PearsonEd.com



封面设计·杨宇梅



华章图书

华章网站 http://www.hzbook.com

网上购书：www.china-pub.com

投稿热线：(010) 88379604

购书热线：(010) 68995259, 68995264

读者信箱：hzjsj@hzbook.com



ISBN 978-7-111-20022-2
定价：66.00 元

Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems (Fourth Edition)

华 章 数 学 译 丛

28

Applied Partial Differential Equations

with Fourier Series and Boundary Value Problems

(Fourth Edition)

实用偏微分方程

(原书第4版)

(美) Richard Haberman 著
南卫理公会大学

郇中丹 李援南 刘歆 宋燕红 译


机械工业出版社
China Machine Press

本书系统介绍偏微分方程的基本概念及其应用，主要内容包括热传导方程、分离变量法、傅里叶级数、施图姆–刘维尔特征值问题、偏微分方程的有限差分数值法、非齐次问题、定常问题的格林函数、无穷域问题、波动方程和热传导方程的格林函数、线性和拟线性波动方程的特征线法以及偏微分方程的拉普拉斯变换解法等.

本书注重应用、内容广泛、层次清晰，适合作为高等院校理工科非数学专业高年级本科生或研究生数学物理方程课程的教材或教学参考书，还可以作为数学专业同类课程的参考书.

本书版权登记号：图字：01-2005-0528

图书在版编目(CIP)数据

实用偏微分方程(原书第4版)/(美)哈伯曼(Haberman, R.)著；郇中丹等译. —北京：机械工业出版社，2007.2

(华章数学译丛)

书名原文：Applied Partial Differential Equations: with Fourier Series and Boundary Value Problems, Fourth Edition

ISBN 978-7-111-20022-2

Ⅰ. 实…　Ⅱ. ①哈…　②郇…　Ⅲ. 偏微分方程　Ⅳ. O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 120218 号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码　100037)

责任编辑：方　敏　迟振春

北京京北制版厂印刷 · 新华书店北京发行所发行

2007 年 2 月第 1 版第 1 次印刷

186mm × 240mm · 34.25 印张

定价：66.00 元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换

本社购书热线：(010)68326294

译 者 序

本书译自美国得克萨斯州南卫理公会大学(Southern Methodist University)数学系 Richard Haberman 教授所著的《Applied Partial Differential Equations》一书，是作者在美国多所大学长期讲授偏微分方程课程的基础上改进而成的. 自 1983 年第 1 版出版以来，先后经过了三次修改，至今已经使用了 20 多年. 本书无论从讲授方法上还是从讲授内容上，对于我国的数学物理方法和偏微方程课程都有很好的借鉴意义.

本书作者自 1971 年在麻省理工学院获得应用数学博士学位后，长期从事数学建模和非线性波动、非线性动力系统及奇异扰动法方面的研究，并且十分注意在教学中反映相关研究领域中的思想方法和成果，这也成为本书的基本特点.

本书对所涉及问题的数学模型建立和定解条件意义的描述都作了十分详尽的讲解，即便读者不完全具备相关的物理知识，在学习上也不会有多少困难. 本书以傅里叶方法(傅里叶级数、傅里叶变换和拉普拉斯变换)作为讲授的主线，做到了由浅入深和举重若轻，对于我国有关课程的设计和讲授有着实际的参考价值. 本书的起点虽然不高，但观点现代，内容上也涉及了不少前沿问题，特别是第 14 章可以作为非线性波动的入门资料. 另外，作者对数值解法的讲授能够帮助学生较好地理解微分方程和差分方程之间的密切联系. 当然，限于作者的背景，本书的精彩部分主要在波动问题，虽然有些部分的解释有琐碎之嫌，但这些并不妨碍本书成为一本优秀的偏微分方程教材.

从我国数学物理方程课程的现状来说，本书可以作为理工科非数学专业高年级本科生或研究生相关课程的教材或教学参考书，还可以作为数学专业同类课程的参考书.

本书由北京师范大学数学系的郇中丹教授以及北京电子科技学院教师李援南、刘歆和宋燕红共同翻译而成. 具体分工是：李援南、刘歆和宋燕红完成了书稿的基本翻译，郇中丹进行了全书的校勘和统稿工作.

前　言

本书讨论偏微分方程在工程技术科学与自然科学中的应用，适合作为涉及傅里叶级数、正交函数或边值问题的课程的教材，也可以在与格林函数、变换方法或部分高级工程数学和自然科学中的数学方法相关的课程中使用. 当然，读者也可以把本书视为应用数学的入门书.

本书突出简单的热传导、振动弦和振动膜模型，从物理原理仔细推演方程，引出许多数学主题，并耐心讨论求解方法. 对书中的数学结果通常给出物理解释，定理证明(如果给出的话)放在根据解释性实例所做的说明之后. 本书包含1000多道难易程度不同的习题，书后还附有对带“ * ”号习题的解答.

本书对分离变量法、傅里叶级数、正交函数和傅里叶变换等标准内容进行了相当详细的讨论；深入介绍了偏微分方程的有限差分数值法；简要叙述了有限元方法；广泛介绍了线性与非线性波动方程的特征线法，包括对交通流量冲击波动态特征的讨论；详细介绍了非齐次问题，其中包括拉普拉斯方程、热传导方程和波动方程的格林函数. 此外，本书还包含大量其他主题，如傅里叶级数的微分与积分、施图姆-刘维尔特征函数与多维特征函数、瑞利商、振动圆形膜的贝塞尔函数以及球面问题的勒让德多项式；包含某些更深的题材，如大特征值的渐近展开式、利用弗雷德霍姆择一性计算扰动频率、有限差分法的稳定性条件以及散射与逆散射.

简单讨论的应用包括：流体流过圆柱体的曳力与升力，光波与声波的斯涅耳折射律，从波动方程推导短时距方程，水波的色散关系，波导与光纤.

本书在作者对多所大学(麻省理工学院、加州大学圣迭戈分校、拉特格大学、俄亥俄州立大学和南卫理公会大学)的不同学生讲授这门课程的经验的基础上做了改进. 读者需要具备微积分和初等常微分方程的知识，书中有时会在需要的地方对这些知识加以复习. 对初学学生开设的课程，核心内容一般包含第1～5章与第7章中的大部分材料，不过通常还需要再补充少许其他题材. 本书对教师而言有一定的灵活性，因为第6～13章的大部分内容仅依赖于第1～5章的材料. 第11章关于热传导方程与波动方程的格林函数例外，它依赖第9章和第10章的材料.

第14章是更深入的内容，讨论线性与非线性色散波、稳定性和扰动法. 这一章是自含的，对优秀本科生来说是比较容易理解的. 该章分析线性色散波的群速度与包络方程，其应用包括光学系统中的彩虹焦散线；讨论非线性色散波，包括对弱非线性长波方程(KdV方程)和弱非线性波包络方程(非线性薛定谔方程)的孤立子的初步讨论；此外，讨论偏微分方程的不稳定性与分歧现象以及扰动法(多尺度问题与边界层问题). 第14章描述了当代物理学问题中偏微分方程的一些前沿研究成果.

我尽力保留了第3版的原貌，使过去的读者不会感到生疏. 前一版的习题几乎原封不动地保留下来，以便原先读者的过渡. 书中仅有少量的习题是新加的(特别是第1章). 第4版做了许多改进，新加的材料包括：化学污染物的扩散、频率的伽辽金数值逼近、热传导方程的相似

解、波动方程的二维格林函数、冲击波速度及其分解的非唯一性、行进冲击波的空间结构、常微分方程组的稳定性与分歧理论、两个空间维的波包络方程、调制不稳定性的分析、长波不稳定性、反应扩散方程的模式形成以及图灵不稳定性等.

书中用 200 多幅图形解释各种概念，这些图形是作者用 MATLAB 制作的. 大部分数学图形文件可以从我的 Web 网页 http://faculty.smu.edu/rhaberma 获得. 现代技术中的图形能力是特别重要的，我在书中不遗余力地用三维可视化图形解释各种概念.

总的说来，我已清楚地说明偏微分方程的许多方面，引领读者进入这一广阔而重要的领域. 当学生有了一定能力与理解力后，可以把本书作为参考读物，至于补充材料，读者应从其他书籍获取，例如“参考文献”中所列的某些书籍.

最后希望本书能使读者在研究数学同自然科学的关系中获得乐趣.

作者对审稿人 Andrew Belmonte(宾夕法尼亚州立大学)、Julie Levandosky(斯坦福大学)和 Isom Herron(Rensselaer 工艺学院)深表感谢.

我也要感谢本书以往、现在和未来的读者(学生与教师). 此外，在准备前一版的 LaTeX 中，Shari Webster 曾给予我很大帮助，在此表示由衷的谢意.

Richard Haberman

rhaberma@mail.smu.edu

目　录

第1章　热传导方程

1.1　引言

我们要讨论有关偏微分方程基本问题的解，这些问题来自科学和工程的各个领域. 偏微分方程(PDE)是含有偏导数的数学方程，例如，

$$\frac{\partial u}{\partial t}+3\frac{\partial u}{\partial x}=0. \tag{1.1.1}$$

讨论可以从确定什么样的函数 $u(x,\ t)$ 满足(1.1.1)开始，不过，最好还是从一个物理问题开始研究. 这样做有两个好处. 第一，介绍用数学方法去分析物理问题时，这些方法可能会更加吸引读者；第二，实际上，我们会发现物理研究往往会激发数学的进一步研究.

许多工程和自然科学领域中，偏微分方程方面的研究占有重要地位. 这方面的内容无法列出一张完整的清单. 不过，下面的例子应该使读者看到，很多领域都高度依赖于偏微分方程的研究：声学、空气动力学、弹性力学、电动力学、流体动力学、地球物理学(地震波传播)、传热学、气象学、海洋学、光学、石油工程学、等离子物理(电离液体和气体)和量子力学.

在分析和解决问题时，应用数学的方法包括以下三个步骤：

1. 建立方程.
2. 求解.
3. 解释.

我们从建立描述热能传递的热流方程开始. 热能是由分子的不规则运动产生的. 在热能流动中有两种基本过程：传导和对流. 传导由相邻分子的碰撞产生，一个分子的振动动能被传送到其最近的分子. 这种传导导致了热能的传播，即便分子本身的位置没有什么移动，热能也传播了. 此外，如果振动的分子从一个区域运动到另一个区域，它会带走其热能. 这种类型的热能运动称为对流. 为了从相对简单的问题开始讨论，这里仅研究热流，在热流中，传导比对流显著得多. 因此，我们主要考虑固体中的热流，当然，若流体(液体和气体)的速度充分小，流体的热传递也是以传导为主.

1

1.2　一维杆中热传导方程的推导

热能密度. 考虑一根具有定横截面积 A 的杆，其方向为 x 轴的方向(由 $x=0$ 至 $x=L$)，如图 1.2.1 所示. 设单位体积的热能量为未知变量，叫做热能密度：

$$\boxed{e(x,t)\equiv \text{热能密度.}}$$

假设通过截面的热量是恒定的，杆是一维的. 做到这一点的最简单方法是将杆的侧面完全绝热，这样热能就不能通过杆的侧面扩散出去. 对 x 和 t 的依赖对应于杆受热不均匀的情形；热能密度由一个截面到另一个截面是变化的.

热能. 考察杆介于 x 和 $x+\Delta x$ 之间的薄片，如图 1.2.1 所示. 若热能密度在薄片内是常

[2] 数，则薄片内的总能量是热能密度和薄片体积的乘积. 一般来说，能量密度不是常数. 不过Δx非常小时，$e(x,\ t)$在薄片内可以近似为常数，这样由薄片体积为$A\Delta x$，

$$\boxed{热能 = e(x,t)A\Delta x.}$$

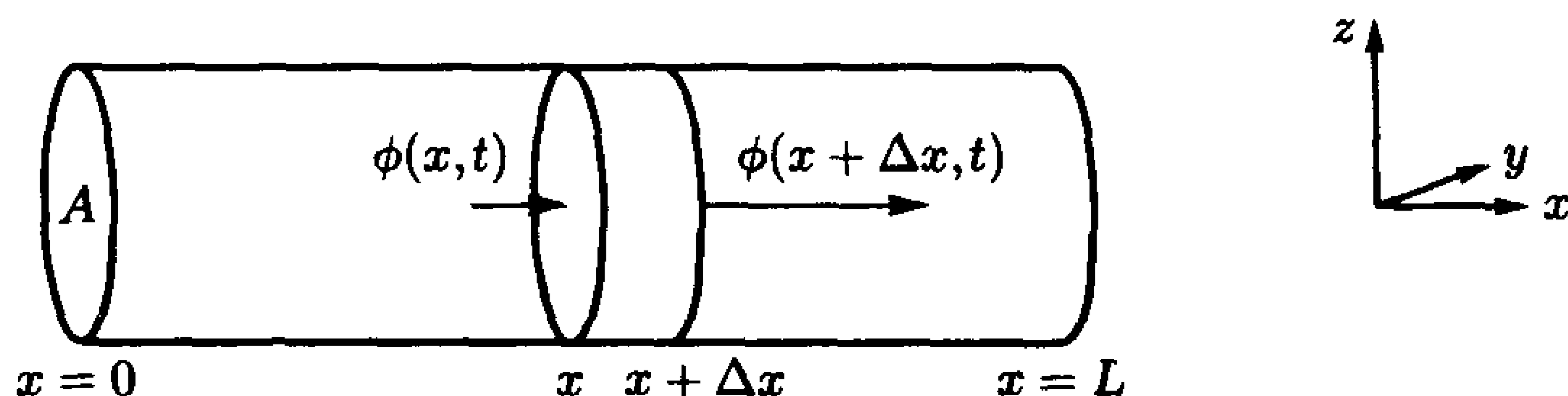


图 1.2.1 热能由薄片流入和流出的一维杆

热能守恒. 在x和$x+\Delta x$之间的热能随时间的变化都是由流过薄片两端(x和$x+\Delta x$)的热能和内部(正的或负的热源)产生的热能所引起的. 由于假设侧面是绝热的，所以在侧面上没有热能变化. 基本的热流过程可由文字方程表述为

$$\boxed{热能瞬时变化率 = 单位时间流过边界的热能 + 单位时间内部产生的热能.}$$

这称作热能守恒. 对小薄片，热能的变化率是$\dfrac{\partial}{\partial t}[e(x,\ t)A\Delta x]$，其中使用偏导数$\dfrac{\partial}{\partial t}$是由于$x$为固定的.

热通量. 在一维杆中，热能的流向向右或向左. 热通量是：

$$\boxed{\phi(x,t) = 热通量(单位时间内热能流向单位表面积右边的热能量).}$$

如果$\phi(x,\ t)<0$，这意味着热能流向左边. 单位时间内流过薄片边界的热能是$\phi(x,\ t)A-\phi(x+\Delta x,\ t)A$，由于热通量是单位表面积的流量，因此它必须与表面积相乘. 如果$\phi(x,\ t)>0$和$\phi(x+\Delta x,\ t)>0$，如图1.2.1所示，则单位时间内流过x点的热流增加切片内的热能，而在$x+\Delta x$点的热流减少热能.

热源. 我们也考虑热能的内部来源：

[3]

$$\boxed{Q(x,t) = 单位时间在单位体积内产生的热能,}$$

这或许是由于化学反应或电加热造成的. 对于薄片，$Q(x,\ t)$在空间上近似为常数，故该薄片单位时间内产生的热能近似为$Q(x,\ t)A\Delta x$.

热能守恒(薄片). 热能变化率是由流过边界的热能和内部热源产生的热能造成的：

$$\frac{\partial}{\partial t}[e(x,t)A\Delta x] \approx \phi(x,t)A - \phi(x+\Delta x,t)A + Q(x,t)A\Delta x. \tag{1.2.1}$$

由于对小横截面薄片，许多量被近似为常数，方程(1.2.1)不是精确的. 我们断言：当$\Delta x\to 0$时，(1.2.1)会逐渐地精确. 在给出详细的(和数学上严格的)推导之前，先解释一下当$\Delta x\to 0$时，极限过程的基本思想. 当$\Delta x\to 0$时，(1.2.1)的极限给出的信息$0=0$没有意义. 不过，如果先用Δx去除，再取当$\Delta x\to 0$时的极限，就得到

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\phi(x,t)-\phi(x+\Delta x,t)}{\Delta x} + Q(x,t), \tag{1.2.2}$$

其中，常数横截面面积被消去了. 我们肯定这个结果是准确的(没有小误差)，因此，用

(1.2.2)中的 = 替代(1.2.1)中的 ≈. 在 $\Delta x\to 0$ 的极限过程中，t 是固定的. 因此，由偏导数定义，

$$\boxed{\frac{\partial e}{\partial t}=-\frac{\partial \phi}{\partial x}+Q.} \tag{1.2.3}$$

热能守恒(精确). 热能守恒的另一种推导方法具有不必限制在小薄片上的优点，也避免了极限过程($\Delta x\to 0$)中的近似计算. 考虑一维杆(见图 1.2.2)上的有限段(由 $x=a$ 至 $x=b$)，要研究热能在此中的守恒. 其热能是 $\int_a^b e(x,t)A\mathrm{d}x$，即各无穷小薄片上热能贡献的总和. 同样，它的变化是由流过两端($x=a$ 和 $x=b$)的热能和在该段内产生的热能所造成的，因此，(消去常数 A 后)得到

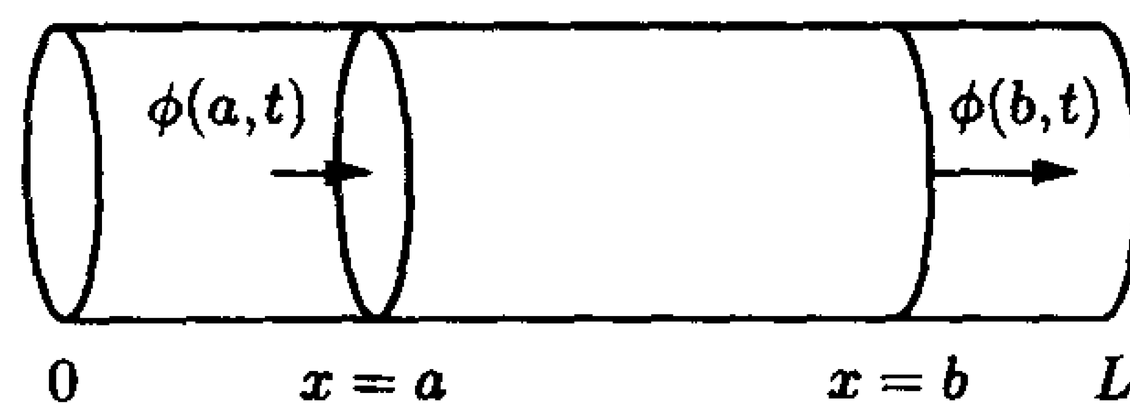


图 1.2.2　流入和流出杆上有限段的热能

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b e\mathrm{d}x=\phi(a,t)-\phi(b,t)+\int_a^b Q\mathrm{d}x.} \tag{1.2.4}$$

从技术上说，由于 $\int_a^b e\mathrm{d}x$ 只依赖于 t 而不依赖于 x，故而在(1.2.4)中出现通常导数 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$. 然而，如果 a 和 b 是常数(并且 e 是连续的)，

[4]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b e\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\partial e}{\partial t}\mathrm{d}x,$$

由于在积分号下的导数是在固定 x 时计算的，所以必须用偏导数取代通常导数. 注意到

$$\phi(a,t)-\phi(b,t)=-\int_a^b\frac{\partial \phi}{\partial x}\mathrm{d}x$$

(ϕ 连续可微时，此公式成立[⊖])，(1.2.4)中的每一项都是一个普通积分. 由此得到

$$\int_a^b\left(\frac{\partial e}{\partial t}+\frac{\partial \phi}{\partial x}-Q\right)\mathrm{d}x=0.$$

这个积分对任意 a 和 b 都必为零，即对任意积分限，其在曲线下的面积必为零，这仅当被积函数本身恒为零时才有可能[⊜]. 由此重新导出了(1.2.3)，

$$\boxed{\frac{\partial e}{\partial t}=-\frac{\partial \phi}{\partial x}+Q.} \tag{1.2.5}$$

积分守恒定律(1.2.4)比微分形式(1.2.5)更基本. 在一般物理变量是连续的情况下，方程(1.2.5)是成立的.

有必要对 $\partial\phi/\partial x$ 前面的负号作进一步的解释. 例如，若对于 $a\leqslant x\leqslant b$，$\partial\phi/\partial x>0$，则热通

⊖ 这是积分基本定理之一.

⊜ 这个结果的证明大都是不漂亮的. 假设 $f(x)$ 是连续的，且对于任意 a 和 b，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$. 要证明对所有 x，$f(x)=0$. 这个结论可以按下面的方式来证明：假设存在点 x_0 满足 $f(x_0)\neq 0$，再证明其矛盾. 若 $f(x_0)\neq 0$ 且 $f(x)$ 是连续的，那么存在 x_0 邻近的某个区域，$f(x)$ 在其中是同号的. 在该区域内取 a 和 b，因为 $f(x)$ 在其中同号，所以 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\neq 0$. 这与 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$ 矛盾，所以，$f(x_0)\neq 0$ 是不可能的. 由此(1.2.5)得证.

量 ϕ 是 x 的增函数. 流向右边 $x=b$ 点的热大于流向 $x=a$ 点的热(假设 $b>a$). 所以(忽略源 Q 的影响), 在 $x=a$ 和 $x=b$ 之间的热能一定是减少的, 因此导致了(1.2.5)中的负号.

5

温度和比热容. 我们通常用温度来描述物质,

$$\boxed{u(x,t) = \text{温度},}$$

而不是用物质的热能密度. 区分温度和热能这两个概念未必是一件简单的事. 直到18世纪中期, 精确的实验仪器才使物理学家认识到, 将两种不同的物质从一个温度升高到另一个温度, 需要的热能量可能是不相同的. 这就有必要引入比热容(或热容量):

$$\boxed{c = \text{比热容(单位质量的物质升高一个单位温度所需要的热能)}.}$$

一般而言, 根据实验(和我们的定义), 物质的比热容 c 依赖于温度 u. 例如, 将同一种单位质量的物质从0℃升高到1℃所需要的热能可能就与从85℃升高到86℃所需要的热能是不相同的. 比热容依赖于温度的热流问题在数学上是相当复杂的. (习题1.2.6简短地讨论了这种情况.)通常对于限制的温度区间, 比热容大概与温度无关. 不过, 实验表明, 升温不同的物质需要不同的热能量. 由于要建立在各种情形下都正确的方程, 这些情形包括一维杆的构成可能会随位置而改变, 因此, 比热容要依赖于 x, $c=c(x)$. 在许多问题中, 杆都是由一种物质所组成的(均匀的杆), 我们就定比热容 c 为常数. 事实上, 本书(和其他的书)中大多数求解出的问题都相应于这一近似, c 为常数.

热能. 一个薄片内的热能是 $e(x, t)A\Delta x$. 另一方面, 它也定义为从基准温度0℃升高到实际温度 $u(x, t)$ 所需的能量. 因为比热容与温度无关, 单位质量的热能就是 $c(x)u(x, t)$. 这样我们需要引入质量密度 $\rho(x)$:

$$\boxed{\rho(x) = \text{质量密度(单位体积质量)},}$$

允许它随 x 变化, 这可能因为杆是由不均匀物质组成的缘故. 薄片的质量是 $\rho A\Delta x$. 因而, 在任意薄切片内的热能是 $c(x)u(x, t)\cdot\rho A\Delta x$, 结果是

6

$$e(x,t)A\Delta x = c(x)u(x,t)\rho A\Delta x.$$

这样就解释了热能和温度之间的基本关系:

$$\boxed{e(x,t) = c(x)\rho(x)u(x,t).} \tag{1.2.6}$$

该公式表明: 单位体积的热能等于单位质量单位度的热能乘以温度乘以质量密度(单位体积质量). 当用(1.2.6)消去热能密度后, 热能守恒(1.2.3)或(1.2.5)变为

$$\boxed{c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + Q.} \tag{1.2.7}$$

傅里叶定律. (1.2.7)通常被看成是含有两个未知函数的方程, 温度 $u(x, t)$ 和热通量(单位表面积单位时间的热流量) $\phi(x, t)$. 那么热能如何和为什么流动呢? 换句话说, 我们需要一个关于热能流动对温度场依赖关系的表达式. 下面, 先总结一些我们熟悉的热流定性性质:

1. 若在某个区域内温度是常数, 则没有热能流动.
2. 若存在温差, 则热能从较热的区域流向较冷的区域.
3. (对同一种物质)温差越大, 热能的流动越大.
4. 即使是在相同的温差下, 不同物质热能的流动是不同的.

傅里叶(1768—1830)认识到了这四条性质，并把这些性质(和众多实验)总结为公式

$$\boxed{\phi = -K_0 \frac{\partial u}{\partial x},} \tag{1.2.8}$$

这就是*傅里叶热传导定律*. 其中$\partial u/\partial x$是温度的导数；它是温度的斜率(作为一个固定t的x函数)；它表示(单位长度的)温差. 方程(1.2.8)说明，热通量与(单位长度的)温差成比例. 若温度u随x上升而上升(即温度向右更热)，$\partial u/\partial x>0$，则(由性质2)热能向左流动. 这就解释了(1.2.8)中的负号.

我们用K_0表示比例系数. 它测量物质的导热能力，称为*导热系数*. 实验表明，不同的物质有不同的导热性能，K_0与物质有关. K_0越大，在相同温差下，热能流量越大. K_0值低的物质导热性差(适用于住房隔热). 对一根由不同物质组成的杆，K_0是x的函数. 此外，实验表明，在不同的温度下，多数物质的导热能力是不同的，$K_0(x, u)$. 不过，就像在比热容c的情形一样，在具体问题中，K_0对温度的依赖性常常不被看重. 因此，在本书中就假设导热系数K_0只与x有关，$K_0(x)$. 事实上，我们通常只讨论均匀杆，其中K_0是一个常数.

7

热传导方程. 把傅里叶定律(1.2.8)带入热能守恒方程(1.2.7)，就得到偏微分方程：

$$\boxed{c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_0 \frac{\partial u}{\partial x}\right) + Q.} \tag{1.2.9}$$

我们通常把热源Q看作是给定的，只有温度$u(x, t)$是未知的. 有关的热系数c，ρ，K_0都与物质有关，因而可能是x的函数. 在均匀杆的情况，c，ρ，K_0都是常数，偏微分方程(1.2.9)变为

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = K_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q.$$

此外，若没有热源，$Q=0$，则用常数$c\rho$去除之，偏微分方程变为

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},} \tag{1.2.10}$$

其中常数k为

$$k = \frac{K_0}{c\rho},$$

称为*热扩散率*，即导热性系数除以比热容和质量密度的乘积. 方程(1.2.10)常常称为*热传导方程*；它对应于无热源和恒定热条件的情形. 如果热能开始集中在一个地方，则(1.2.10)描述的是热能如何扩展，一个通称为*扩散*的物理过程. 除温度外的其他物理量以与此十分相同的方式平缓开来，也满足相同的偏微分方程(1.2.10). 因此，(1.2.10)也称作*扩散方程*. 例如，化学物(香水和污染物)浓度$u(x, t)$在某些一维情况就满足扩散方程(1.2.8).

8

初始条件. 描述热能流量的偏微分方程(1.2.9)或(1.2.10)，有关于时间的一阶导数. 当常微分方程有一阶导数时，初值问题就为求解具有一个初始条件的微分方程. 而关于一个质点位置为x的牛顿运动定律给出了一个二阶常微分方程，$m\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2=$力. 它包含二阶导数. 初值问题为求解具有两个初始条件，初始位置x和初始速度$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$的微分方程. 利用这些条件(包括对力的了解)，通过解具有初始条件的微分方程，就能够预测质点在x方向上的未来运动.

我们想对偏微分方程执行同样的步骤，即预测未来的温度．由于热传导方程有一阶时间导数，必须给出一个*初始条件*(IC)(通常在 $t=0$ 时)，初始温度．但是它可能不是常数，且只与 x 有关．所以，要给出初始温度分布，

$$u(x,0)=f(x).$$

那么这些信息足够预测未来的温度吗？我们知道初始温度分布，知道温度按照偏微分方程(1.2.9)或(1.2.10)变化．我们还需要知道在两个边界 $x=0$ 和 $x=L$ 点发生的情况．不知道这些，我们就无法预测未来的温度．对应(1.2.9)或(1.2.10)中的二阶空间导数，还需要两个条件，通常是在一个边界点一个条件．我们将在下一节讨论这些边界条件．

化学污染物的扩散． 设 $u(x,t)$ 为单位体积中化学物的密度或浓度．考虑具有常数横截面面积 A 在 $x=a$ 和 $x=b$ 之间的一个一维区域(图1.2.2)．该区域内化学物的总量是 $\int_a^b u(x,t)A\mathrm{d}x$. 我们引入化学物的*通量* $\phi(x,t)$，单位面积单位时间流向右边的化学物的量．关于该区域化学物总量的时间的变化率，等于单位时间化学物的流入量减去单位时间化学物的流出量．所以，消去常数横截面面积 A 后，得到化学浓度的*积分守恒定律*：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b u(x,t)\,\mathrm{d}x=\phi(a,t)-\phi(b,t).}\tag{1.2.11}$$

由公式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b u(x,t)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x$ 和 $\phi(a,t)-\phi(b,t)=-\int_a^b\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathrm{d}x$, 就得到 $\int_a^b\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\mathrm{d}x=0.$ 因为对任意区域，此积分为零，所以，被积函数一定为零，这样就导出了化学浓度的*微分守恒定律*：

9

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x}=0.}\tag{1.2.12}$$

在固体物质中，化学物从高浓度的区域向低浓度的区域扩展．根据 Fick *扩散定律*，流量与化学物的空间导数 $\partial u/\partial x$ 成比例：

$$\boxed{\phi=-k\frac{\partial u}{\partial x}.}\tag{1.2.13}$$

如果浓度 $u(x,t)$ 在空间内是常数，则无化学物流动．如果化学物浓度是向右边增加的 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}>0\right)$，则化学物原子向左迁移，反之亦然．比例常数 k 称为化学物*扩散率*，它可以用实验来测量．当把 Fick 定律(1.2.13)用于基本守恒定律(1.2.12)时，可见，化学物浓度满足*扩散方程*：

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},}\tag{1.2.14}$$

因为我们假设扩散率近似为一个常数，所以化学物浓度的 Fick 扩散定律与热扩散的傅里叶定律是类似的．其推导也是相当类似的．

习题 1.2

1.2.1 对负号作简要解释：

(a)在守恒定律(1.2.3)或(1.2.5)中，如果 $Q=0$.　　(b)在傅里叶定律(1.2.8)中．

(c)在守恒定律(1.2.12)中，$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial \phi}{\partial x}$.　　(d)在 Fick 定律(1.2.13)中.

1.2.2　在恒定热条件和无热源的条件下，推导杆的热传导方程.

(a)考虑在 x 和 $x+\Delta x$ 之间的热能.　　(b)考虑在 $x=a$ 和 $x=b$ 之间的热能.

1.2.3　在恒定热条件、横截面面积为 $A(x)$、无热源的条件下，通过考虑在 $x=a$ 和 $x=b$ 之间的热能，推导杆的热传导方程.

10

1.2.4　推导化学污染物的扩散方程.

(a)考虑在 x 和 $x+\Delta x$ 之间的微小区域内的化学物的总量.

(b)考虑在 $x=a$ 和 $x=b$ 之间的化学物的总量.

1.2.5　如果化学物是由于化学反应在单位体积内以 $\alpha u(\beta-u)$ 的速率而产生，推导化学污染物浓度 $u(x,t)$ 所满足的方程.

1.2.6　假设比热容是位置和温度的函数 $c(x,u)$.

(a)证明：厚度为 Δx 的薄片从 0℃ 升高到 $u(x,t)$ 单位质量所需要的热能不是 $c(x)u(x,t)$，而是 $\int_0^u c(x,\bar{u})\,\mathrm{d}\bar{u}$.

(b)在上述情形下，重新推导热传导方程. 证明(1.2.3)保持不变.

1.2.7　对一维杆的任意段 $a\leqslant x\leqslant b$ 考虑热能守恒(1.2.4). 利用微积分基本定理，

$$\frac{\partial}{\partial b}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(b),$$

推导热传导方程(1.2.9).

*1.2.8　如果 $u(x,t)$ 是未知的，给出一根杆 $(0<x<L)$ 所含全部热能的表达式.

1.2.9　考虑一根无热源、侧面未绝热的细一维杆.

(a)假设单位侧面面积单位时间内流出侧边的热能是 $w(x,t)$. 推导温度 $u(x,t)$ 满足的偏微分方程.

(b)假设 $w(x,t)$ 与杆温度 $u(x,t)$ 和已知的外界温度 $\gamma(x,t)$ 间的温差成比例. 推导方程

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{P}{A}[u(x,t)-\gamma(x,t)]h(x),\tag{1.2.15}$$

其中 $h(x)$ 是与 x 相关的正比例系数，P 是侧周长，A 是横截面面积.

(c)把(1.2.15)与一维杆方程作比较，该杆的侧面是绝热的，但有热源.

(d)对一根圆横截面的杆，在恒定热条件和外部温度为 0℃ 的条件下，研究(1.2.15).

11

*(e)在(d)的假设下，假设杆的温度是均匀的[即 $u(x,t)=u(t)$]. 如果初始条件 $u(0)=u_0$，确定 $u(t)$.

1.3　边界条件

在解热传导方程(1.2.9)或(1.2.10)时，对杆的每一端都需要一个边界条件(BC). 条件的设置与每一端起作用的物理机制有关. 边界条件经常与杆内和杆外的物质都有关. 为避免更复杂的数学问题，就假设外部环境是已知的，杆对其影响不大.

给定温度. 在某些情况下，杆端的温度(例如，$x=0$)可以用给定温度来近似，

$$u(0,t)=u_B(t),\tag{1.3.1}$$

其中 $u_B(t)$ 是与杆相接触的液体槽(或蓄水池)的温度.

绝热边界. 在其他情况中，可以给定的是热流而不是温度，

$$-K_0(0)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\phi(t),\tag{1.3.2}$$

其中 $\phi(t)$ 是给定的. 这等价于在 $x=0$ 点，对一阶导数 $\partial u/\partial x$ 给定一个条件. 在 $x=0$ 点的斜率

就给定了. 由于仅知道在 x 一点的斜率，关于方程(1.3.2)就不能对 x 积分. 最简单的给定热流边界条件的例子是一端被完全绝热的情形(有时省略“完全”). 此时，在边界点完全没有热流. 若在 $x=0$ 点是绝热的，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0. \tag{1.3.3}$$

牛顿冷却定律. 当一维杆在边界处与移动的流体(例如，空气)接触时，给定温度或给定热流都可能不合适. 比如，设想一根与较凉的移动空气接触的热杆，杆的热量将流向空气而使之加热. 然后空气带走热量. 这种热量的传递过程叫做对流. 不过，杆附近的空气会较热. 这又是一个复杂的问题；实际上，空气的温度随着所在位置到杆的距离的变化而变化(介于槽的温度与杆的温度之间). 实验表明，流出杆的热流近似地与杆和外部的温差成比例. 这种边界条件称为牛顿冷却定律. 若该定律在 $x=0$ 点成立，则

[12]

$$-K_0(0)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = -H[u(0,t) - u_B(t)], \tag{1.3.4}$$

其中，比例常数 H 被称为热交换系数(或对流系数). 这种边界条件[⊖]包含 u 和 $\partial u/\partial x$ 的线性组合. 必须留意比例的符号. 若杆比槽更热 $[u(0,\ t) > u_B(t)]$，则热通常从杆端 $x=0$ 点流出. 所以，热向左边流动，此时热流是负的. 这就是在(1.3.4)中引入负号($H>0$)的原因. 如果假设 $u(0,\ t) < u_B(t)$，也可以得到相同的结论. 另一种理解(1.3.4)中符号的方法：还是假设 $u(0,\ t) > u_B(t)$，温度在 $x=0$ 的右边较高，因此可期望温度向右边会继续上升. 所以，$\partial u/\partial x$ 在 $x=0$ 点应当是正的. 方程(1.3.4)与此论断是一致的. 在习题1.3.1中，要求读者用相同的方法推导牛顿冷却定律在右端点 $x=L$ 点的方程是

$$-K_0(L)\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = H[u(L,t) - u_B(t)], \tag{1.3.5}$$

其中，$u_B(t)$ 是在 $x=L$ 点的外部温度. 显而易见，在左边界(1.3.4)和右边界(1.3.5)中符号的明显不同.

牛顿冷却定律中的系数 H 是由实验确定的，它既与流体性质(包含流速)也与杆的性质有关. 如果系数很小，则没有多少热能流过边界. 当 $H\to 0$ 时，牛顿冷却定律趋于绝热边界条件. 可以把 $H\neq 0$ 时的牛顿冷却定律看作是一个不完全绝热的边界. 若 $H\to\infty$，这个边界条件趋于给定温度的边界条件：$u(0,\ t) = u_B(t)$. 通过将(1.3.4)除以 H，很容易得到这个结果：

$$-\frac{K_0(0)}{H}\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = -[u(0,t) - u_B(t)].$$

所以，$H\to\infty$ 对应着完全不绝热的情形.

总结. 我们已经描述了三种不同的边界条件. 以在 $x=0$ 点为例：

$u(0,t) = u_B(t)$	给定温度
$-K_0(0)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \phi(t)$	给定热通量
$-K_0(0)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = -H[u(0,t) - u_B(t)]$	牛顿冷却定律

[13]

⊖ (1.3.4)成立的另一种情形参见 Berg and McGregor[1966].

在 $x=L$ 点有相同的条件，注意符号的变化（$-H$ 变为 H）对牛顿冷却定律是必要的. 每个边界点都会出现一个边界条件. 而两个边界点满足相同的边界条件却是不必要的. 例如，可能在 $x=0$ 点是给定的振荡温度

$$u(0,t) = 100 - 25\cos t,$$

而在右端点 $x=L$，则是绝热条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0.$$

习题 1.3

1.3.1 考虑一维杆，$0\leqslant x\leqslant L$. 假设杆在 $x=L$ 点流出的热能与杆的末端温度和已知的外部温度的温差成比例. 推导出方程(1.3.5)(简要地给出 $H>0$ 的物理解释).

*1.3.2 两根不同质地的一维杆在 $x=x_0$ 点的连接称为是完全热接触的，如果在 $x=x_0$ 点，温度是连续的：

$$u(x_0-,t) = u(x_0+,t),$$

并且在 $x=x_0$ 点没有热能损失(即从一根杆流出的热能流入另一根). 那么表示这后一个条件的数学方程是什么？在什么特定条件下，$\partial u/\partial x$ 在 $x=x_0$ 点连续？

*1.3.3 考虑一个液体槽，其中液体比热容为 c_f，质量密度为 ρ_f，一维杆的末端 $x=L$ 浸在液体槽内. 假设以某种方式快速搅动槽内的液体，使得液体槽的温度各处近似相同，等于在 $x=L$ 点的温度 $u(L,\ t)$. 并假设槽除了与杆的完全热接触外，在其他地方都是绝热的. 而在完全热接触点槽可能被杆加热也可能被杆冷却. 试确定槽内的温度方程.（这将是在端点 $x=L$ 处的一个边界条件.）(提示：见习题 1.3.2.)

1.4 平衡温度分布

1.4.1 给定温度

现在提出一个简单而典型的热流问题. 如果热系数都是常数，并且没有热源，则一维杆 $0\leqslant x\leqslant L$ 内的温度 $u(x,\ t)$ 满足

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.4.1}$$

14

此偏微分方程的解必须满足初始条件

$$u(x,0) = f(x) \tag{1.4.2}$$

以及在每一端点的一个边界条件. 例如，每端都可以与不同的大槽接触，使得其温度是给定的：

$$u(0,t) = T_1(t)$$
$$u(L,t) = T_2(t). \tag{1.4.3}$$

本书的一个目标就是使读者能够解出由(1.4.1)～(1.4.3)给定的问题.

平衡温度分布. 在开始解决偏微分方程这种初值和边值问题之前，先讨论一个物理上相关的常微分方程问题. 假设在 $x=0$ 和 $x=L$ 点的边界条件是稳定的(即与时间无关)，

$$u(0,t) = T_1 \quad 和 \quad u(L,t) = T_2,$$

其中 T_1 和 T_2 是给定常数. 我们定义平衡解或者稳态解为与时间无关的温度分布，即 $u(x,\ t)=u(x)$. 由于 $\partial/\partial t\ u(x)=0$，偏微分方程变成 $k(\partial^2 u/\partial x^2)=0$，此时不再需要偏导数，所以，

$$\boxed{\frac{d^2u}{dx^2}=0.} \tag{1.4.4}$$

边界条件是

$$\boxed{\begin{aligned} u(0) &= T_1 \\ u(L) &= T_2. \end{aligned}} \tag{1.4.5}$$

在计算稳态时，通常忽略初始条件. 方程(1.4.4)是很平凡的二阶常微分方程(ODE)，进行两次积分就可得到其通解. 对(1.4.4)积分得到 $du/dx=C_1$，第二次积分表明

$$u(x)=C_1x+C_2. \tag{1.4.6}$$

可以看出(1.4.6)是直线的一般方程. 所以，由边界条件(1.4.5)，平衡温度分布是在 $x=0$ 点等于 T_1，在 $x=L$ 点等于 T_2 的直线，见图1.4.1. 从几何上说，这个问题有唯一的平衡解. 从代数上说，由边界条件 $u(0)=T_1$ 和 $u(L)=T_2$，可以确定两个任意常数 C_1 和 C_2，

15

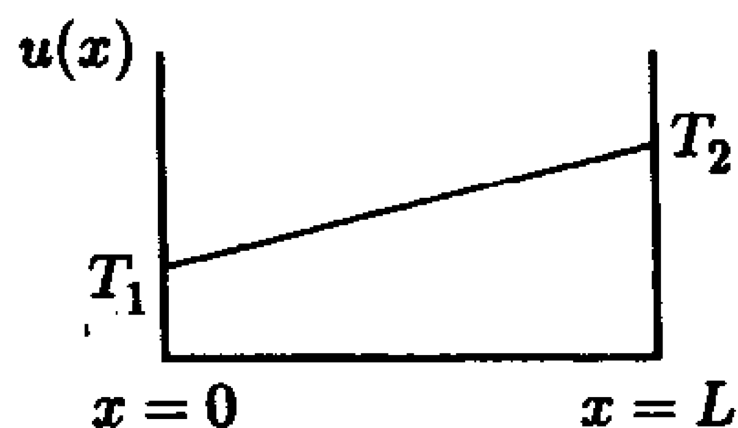


图1.4.1 平衡温度分布

$$\begin{aligned} u(0) &= T_1 \quad 给出 \quad T_1 = C_2 \\ u(L) &= T_2 \quad 给出 \quad T_2 = C_1L+C_2. \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

求解(1.4.7)即得到常数 $C_2=T_1$ 和 $C_1=(T_2-T_1)/L$. 所以，关于固定边界条件的稳态热传导方程的唯一平衡解是

$$\boxed{u(x)=T_1+\frac{T_2-T_1}{L}x.} \tag{1.4.8}$$

趋向平衡态. 对具有定常边界条件(1.4.5)的依赖时间的问题(1.4.1)和(1.4.2)，其温度分布 $u(x,t)$一般是随时间变化的；它不会一直等于其初始分布 $f(x)$. 如果要等待很长很长的时间，可以想像两端点处的影响应该占主导地位. 初始条件通常被忽略. 既然边界条件与时间无关，那么最终在物理上可以预计温度趋向平衡温度分布：

$$\lim_{t\to\infty}u(x,t)=u(x)=T_1+\frac{T_2-T_1}{L}x. \tag{1.4.9}$$

在8.2节中，将求解依赖时间的问题，并证明其满足(1.4.9). 然而，如果趋于一个稳态解，则可以更容易地通过直接解平衡问题而获得它.

1.4.2 绝热边界

作为计算稳态解的第二个例子，还是考虑无热源和恒定导热系数的一维杆，而现在 $x=0$ 和 $x=L$ 点是绝热边界. 因此依赖时间问题的形式如下：

16

$$偏微分方程(PDE)：\quad \frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2u}{\partial x^2} \tag{1.4.10}$$

$$初始条件(IC)：\quad u(x,0)=f(x) \tag{1.4.11}$$

$$边界条件1(BC1)：\quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0 \tag{1.4.12}$$

$$边界条件2(BC2)：\quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0. \tag{1.4.13}$$

令$\partial u/\partial t=0$，就导出了平衡问题．其平衡温度分布满足

$$\text{常微分方程(ODE)}:\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=0} \tag{1.4.14}$$

$$\text{边界条件 1(BC1)}:\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(0)=0} \tag{1.4.15}$$

$$\text{边界条件 2(BC2)}:\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(L)=0,} \tag{1.4.16}$$

其中初始条件被（暂时）忽略．$\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}x^2=0$ 的通解还是一条任意直线，

$$u=C_1x+C_2. \tag{1.4.17}$$

而边界条件意味着斜率在两端点必须为零．在几何上，任意水平直线（零斜率）都满足(1.4.15)和(1.4.16)，如图 1.4.2 所示．

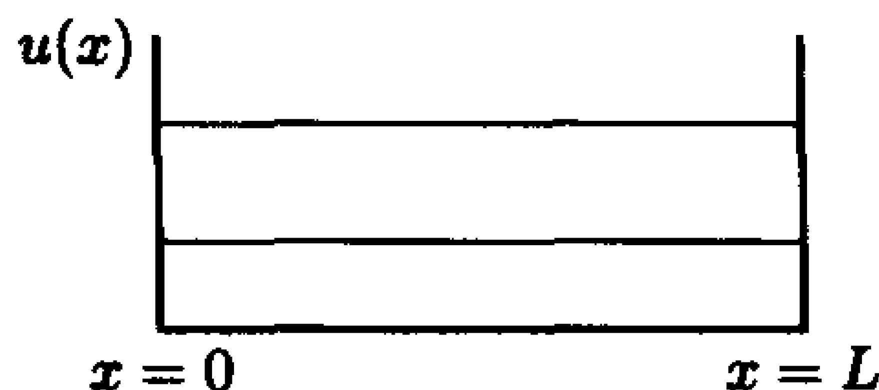


图 1.4.2　各种常数平衡温度分布（具有绝热端点）

17

其解是任意常值温度．在代数上，由(1.4.17)，$\mathrm{d}u/\mathrm{d}x=C_1$ 和两个边界条件给出 $C_1=0$．所以

$$u(x)=C_2, \tag{1.4.18}$$

其中 C_2 是任意常数．与第一个例子（两端点温度固定）不同，这里不存在唯一的平衡温度．任意常值温度都是绝热边界条件的平衡温度分布．所以，对依赖时间的初值问题，可以预计

$$\lim_{t\to\infty}u(x,t)=C_2;$$

如果我们等待足够长的时间，具有绝热端的杆就应趋于一个常值温度．这在物理上似乎是相当合理的．然而，解应当趋于一个任意常数却是没有意义的；应该知道它趋于的常数是什么．在此情形，欠缺唯一性是由完全忽略初始条件所引起的．一般来说，平衡解不满足初始条件．不过，通过考虑依赖时间的问题(1.4.11)的初始条件，确定了特殊的常值平衡解．既然两端是绝热的，总热能就是不变的．这可由整个杆的积分热能守恒[见(1.2.4)]得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L c\rho u\,\mathrm{d}x=-K_0\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)+K_0\frac{\partial u}{\partial x}(L,t). \tag{1.4.19}$$

因为两端绝热，

$$\int_0^L c\rho u\,\mathrm{d}x=\text{常数}. \tag{1.4.20}$$

(1.4.20)的一个推论是初始热能必定等于最后的($\lim\limits_{t\to\infty}$)热能．因为 $u(x,0)=f(x)$，初始热能是 $c\rho\int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x$，而由平衡温度分布是常值 $u(x,t)=C_2$，故平衡热能是 $c\rho\int_0^L C_2\,\mathrm{d}x=c\rho C_2L$．由于总热能不变，这两个表达式相等，$c\rho\int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x=c\rho C_2L$，因此就确定了常数 C_2．解出 C_2 也就证明了所要的唯一平衡解应该为

$$\boxed{u(x)=C_2=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x,} \tag{1.4.21}$$

它是初始温度分布的平均．这好像是初始条件并没有完全被遗忘．我们在后面会求得满足

(1.4.10) ~ (1.4.13)的 $u(x, t)$，并且证明$\lim_{t\to\infty} u(x, t)$可由(1.4.21)给出.

习题 1.4

18

1.4.1 确定一维杆的平衡温度分布，该杆具有恒定热性质和下列的热源及边界条件：

*(a) $Q=0$, $u(0)=0$, $u(L)=T$

(b) $Q=0$, $u(0)=T$, $u(L)=0$

(c) $Q=0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0)=0$, $u(L)=T$

*(d) $Q=0$, $u(0)=T$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L)=\alpha$

(e) $\frac{Q}{K_0}=1$, $u(0)=T_1$, $u(L)=T_2$

*(f) $\frac{Q}{K_0}=x^2$, $u(0)=T$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L)=0$

(g) $Q=0$, $u(0)=T$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L)+u(L)=0$

*(h) $Q=0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0)-[u(0)-T]=0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L)=\alpha$

在这些题目中，假设 $u(x, 0)=f(x)$.

1.4.2 考虑均匀一维杆的平衡温度分布，杆有热源 $Q/K_0=x$，以及边界条件 $u(0)=0$ 和 $u(L)=0$.

*(a)确定整个杆内单位时间内产生的热能.

(b)确定单位时间内杆由 $x=0$ 点和 $x=L$ 点流出的热能.

(c)(a)和(b)的结果之间应当存在什么关系？

1.4.3 确定一维杆的平衡温度分布，杆由在 $x=1$ 点处于完全热接触的两种不同物质组成. 对于 $0<x<1$，是一种带有不变源($Q=1$)的物质($c\rho=1$, $K_0=1$)，而对 $1<x<2$，没有热源($Q=0$, $c\rho=2$, $K_0=2$)(见习题 1.3.2)，$u(0)=0$ 和 $u(2)=0$.

1.4.4 如果一根杆的两端都绝热，由偏微分方程导出杆内总热能是常量.

1.4.5 考虑一维杆 $0\leqslant x\leqslant L$，杆长度已知，具有恒定热性质且无热源. 假设在 $x=L$ 点，温度是未知常数 T. 如果在 $x=0$ 点，(在稳态中)知道温度和热流，试确定 T.

19

1.4.6 长度为 L 的一根均匀杆的两端绝热. 有常值热源 $Q_0\neq 0$，初始温度为 $u(x, 0)=f(x)$.

(a)从数学上证明，不存在任何平衡温度分布. 并作简要的物理解释.

(b)计算整杆的总热能.

1.4.7 对下列问题，确定一个平衡温度分布(如果存在的话). 并回答对 β 的哪些值有解？请从物理上作解释.

*(a) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+1$, $u(x, 0)=f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t)=1$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t)=\beta$

(b) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x, 0)=f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t)=1$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t)=\beta$

(c) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x-\beta$, $u(x, 0)=f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t)=0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t)=0$

1.4.8 设杆具有恒定热性质，写出整杆的积分守恒定律表达式. 假设已知热流在两端点是不同的常数. 通过关于时间的积分，确定杆的总热能. (提示：利用初始条件.)

(a)假设无热源.

(b)假设热源是常值.

1.4.9 通过对热传导方程(1.2.10)(假设无热源)积分，推导具有恒定热性质的整根杆的积分守恒定律. 并证明此结果与(1.2.4)等价.

1.4.10 假设$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4$，$u(x,\ 0)=f(x)$，$\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ t)=5$，$\frac{\partial u}{\partial x}(L,\ t)=6$. 计算一维杆的总热能(作为时间的函数).

1.4.11 假设$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x$，$u(x,\ 0)=f(x)$，$\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ t)=\beta$，$\frac{\partial u}{\partial x}(L,\ t)=7$.

(a)计算一维杆的总热能(作为时间的函数).

(b)由(a)，确定β的一个值，使得有平衡解存在. 并对β的这个值，确定$\lim_{t\to\infty}u(x,\ t)$.

1.4.12 假设一种化学物的浓度$u(x,\ t)$满足 Fick 定律(1.2.13)，其初始浓度给定为$u(x,\ 0)=f(x)$. 考虑区域$0<x<L$，其中两端热流指定为$-k\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ t)=\alpha$和$-k\frac{\partial u}{\partial x}(L,\ t)=\beta$. 假设$\alpha$和$\beta$是常数.

(a)写出整个区域守恒定律的表达式.

(b)求在该区域内作为时间函数的化学物的总量(利用初始条件). [20]

(c)在什么条件下，存在一个平衡的化学物浓度? 它又为何?

1.4.13 如果α和β是时间的函数，做习题 1.4.12.

1.5 二维或三维热传导方程的推导

引言. 在 1.2 节中，我们证明了，对于一维杆内的热传导，其温度$u(x,\ t)$满足

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)+Q.$$

在无热源($Q=0$)和杆具有恒定热性质的情形，偏微分方程变为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

其中$k=K_0/c\rho$. 在求解有关这些偏微分方程的问题之前，我们先要建立起对应于二维或三维空间热流问题的偏微分方程. 我们会发现，虽然有显著差别，但对二维或三维热流问题偏微分方程的推导类似于一维的推导. 我们计划(在求解较简单方程之前)推导出一些新的且比较复杂的方程，以便在研究偏微分方程的求解技巧时，可以有更多的例子.

热能. 从任意子区域R开始推导，如图 1.5.1 所示. 与一维情况相同，热能守恒可概括为下面的文字方程：

热能变化率 = 单位时间内流过边界的热能 + 单位时间内由内部产生的热能,

这里，在任意子区域R内的热能是

$$\text{热能}=\iiint_R c\rho u\,\mathrm{d}V,$$

而不是 1.2 节中所用的一维积分. [21]

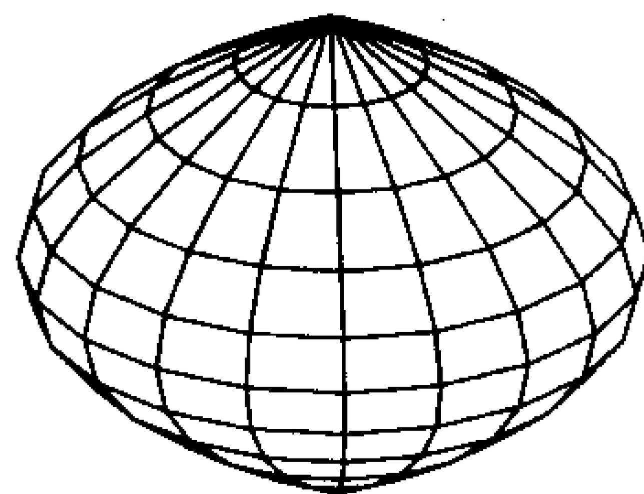


图 1.5.1 三维子区域 R

热通量向量和法向量. 我们需要一个热流表达式. 在一维问题中，热通量ϕ被定义为流向右边($\phi<0$时，表明流向左边). 在三维问题中，热是向某个方向流动的，所以热通量是一个向量$\boldsymbol{\phi}$. $\boldsymbol{\phi}$的大小是单位时间内流过单位曲面面积的热能量. 然而，在考虑热能守恒时，只有单位时间流过边界的热量才是重要的. 如果像图 1.5.2 中的A点，热流与边界平行，则在该点没有热能

流过边界. 事实上，只有热流的法分量才有贡献(如图1.5.2中点B所表示的). 在边界上的每一点，都存在两个法向量，一个内法向和一个外法向n. 习惯上仅使用单位外法向量$\hat{n}$(其中^表示单位向量).

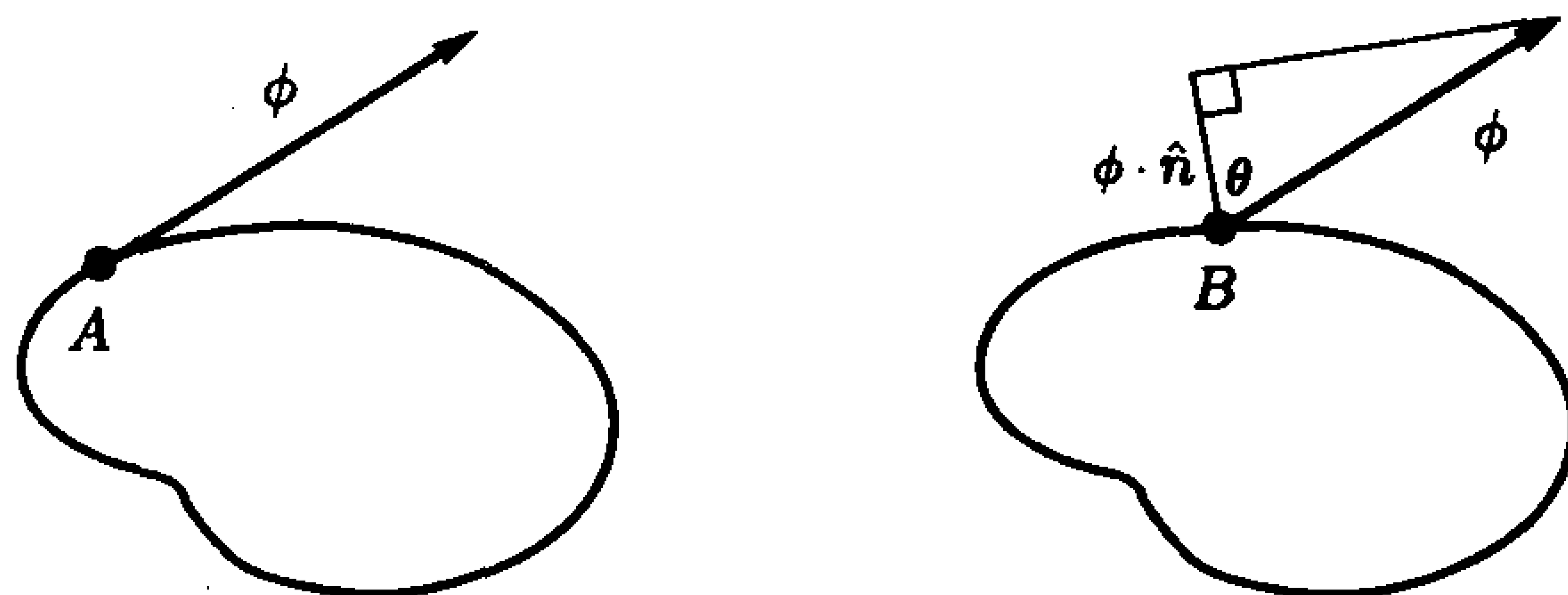


图1.5.2 热通量向量的外法分量

热能守恒. 在每个边界点，单位时间单位曲面面积流出区域R的热能量是热通量向量的外法分量. 在图1.5.2中B点处，热通量向量的外法分量是$|\phi|\cos\theta=\phi\cdot n/|n|=\phi\cdot\hat{n}$. 如果热通量向量$\phi$是指向内部的，则$\phi\cdot\hat{n}<0$，并且热能的向外流动是负的. 为计算单位时间内流出R的总热能，必须用微分曲面面积$\mathrm{d}S$乘以$\phi\cdot\hat{n}$，并在包围区域R的整个曲面上"求和"，这个量[⊖]用闭曲面积分$\oiint\phi\cdot\hat{n}\mathrm{d}S$来表示. 它是(单位时间)离开区域$R$的热能量(如果是正的)并导致$R$内总热能的减少. 如果$Q$是单位体积内的热能生成率，则单位时间生成的总热能是$\iiint_R Q\mathrm{d}V$. 因而，在任意三维区域R的热能守恒变为

22

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_R c\rho u\mathrm{d}V=-\oiint\phi\cdot\hat{n}\mathrm{d}S+\iiint_R Q\mathrm{d}V.}\tag{1.5.1}$$

散度定理. 在一维情形，从积分守恒定律推导出偏微分关系的方法是注意到(由微积分基本定理)

$$\phi(a)-\phi(b)=-\int_a^b\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathrm{d}x;$$

也就是，对一维问题，通过边界的流量可以表示成一个在整个区域上的积分. 因此散度定理即是三个变量函数的类似步骤. 散度定理处理的是一个向量A(具有分量A_x，A_y和A_z；即$A=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$)，其散度的定义如下：

$$\nabla\cdot A\equiv\frac{\partial}{\partial x}A_x+\frac{\partial}{\partial y}A_y+\frac{\partial}{\partial z}A_z.\tag{1.5.2}$$

注意，向量的散度是数量. 散度定理是指，任意连续可微向量A的散度的体积分是A的外法分量的闭曲面积分：

$$\boxed{\iiint_R\nabla\cdot A\mathrm{d}V=\oiint A\cdot\hat{n}\mathrm{d}S.}\tag{1.5.3}$$

这个定理也叫做高斯定理. 它可以用于建立某些曲面积分与体积分的关系，反之亦然. 它是很

⊖ 有时用符号ϕ_n代替$\phi\cdot\hat{n}$表示ϕ的外法分量.

重要的，也是(现在和在本书后面部分)很有用的. 这里省略了散度定理的推导过程，它的推导可基于对三个维度重复使用一维的微积分基本定理.

散度定理对热流的应用. 特别地，在热能守恒(1.5.1)中对应单位时间内流过边界的热能的闭曲面积分，根据散度定理(1.5.3)可以写为体积分. 这样，(1.5.1)变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_R c\rho u \mathrm{d}V = -\iiint_R \nabla\cdot\phi \mathrm{d}V + \iiint_R Q\mathrm{d}V. \tag{1.5.4}$$

23

在(1.5.4)中，如果把时间导数换成偏导数，则可以把时间导数放入积分中(因为 R 在空间中是固定的). 因而，(1.5.4)中所有表达式都是在相同区域内的体积分，它们可以合并为一个积分：

$$\iiint_R \left[c\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla\cdot\phi - Q\right]\mathrm{d}V = 0. \tag{1.5.5}$$

既然对所有区域 R，这个积分都为零，就(如同一维积分所做那样)得到被积函数本身必须为零：

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla\cdot\phi - Q = 0.$$

等价地，

$$\boxed{c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla\cdot\phi + Q.} \tag{1.5.6}$$

在一维情形，方程(1.5.6)就是(1.2.3).

傅里叶热传导定律. 在一维问题中，从依据傅里叶定律的实验得知，热通量 ϕ 与温度的导数成比例，$\phi = -K_0\partial u/\partial x$. 负号是因为热能由高温流向低温. $\partial u/\partial x$ 是温度在单位长度上的变化. 同样的想法对三维情形也是有效的. 在本章附录中，我们推导出了热通量 ϕ 与温度梯度 $\left(\nabla u \equiv \frac{\partial u}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{k}\right)$ 成比例：

$$\boxed{\phi = -K_0\nabla u,} \tag{1.5.7}$$

它被称为*傅里叶热传导定律*，其中，K_0 仍称为导热系数. 因而，在三维情形梯度 ∇u 替换了 $\partial u/\partial x$.

热传导方程. 将热通量向量的表达式(1.5.7)代入到热能守恒方程(1.5.6)，就得到了温度的偏微分方程：

$$\boxed{c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla\cdot(K_0\nabla u) + Q.} \tag{1.5.8}$$

在没有热源($Q=0$)和热系数都为常数的情形下，(1.5.8)变为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\nabla\cdot(\nabla u), \tag{1.5.9}$$

24

其中 $k = K_0/c\rho$ 仍称为热扩散系数. 由定义，可计算 u 梯度的散度：

$$\nabla\cdot(\nabla u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \equiv \nabla^2 u.} \tag{1.5.10}$$

表达式 $\nabla^2 u$ 定义为 u 的*拉普拉斯算子*. 所以，在这一情形

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k\nabla^2 u.} \tag{1.5.11}$$

方程(1.5.11)经常称为三维空间中的热传导方程或扩散方程. 记号$\nabla^2 u$通常用于强调∇算子的作用:

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}.$$

注意, ∇u是∇作用在u上, 而$\nabla \cdot A$则是∇与A的向量点积. 此外, ∇^2是∇与自身的点积或者

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

作用在u上, 这样就表示∇平方了, 即∇^2.

初边值问题. 除了满足(1.5.8)或(1.5.11)之外, 温度要满足给定的初始分布,

$$u(x,y,z,0) = f(x,y,z).$$

在所涉及区域界面的每个点, 温度还要满足边界条件. 边界条件可以各不相同(如同一维问题). 温度可以是指定的,

$$u(x,y,z,t) = T(x,y,z,t),$$

其中T在边界的每个点都是t的已知函数. 也可能指定边界上的热流. 边界(或边界的一部分)常常可能是绝热的. 这意味着没有热流穿过这部分边界. 因为热通量是$-K_0\nabla u$, 故流出的热将是热流向量的单位外法分量$-K_0\nabla u \cdot \hat{n}$, 这里$\hat{n}$是界面的一个单位外法向量. 所以在绝热面上,

25

$$\nabla u \cdot \hat{n} = 0.$$

$\nabla u \cdot \hat{n}$是u在外法方向的方向导数, 它也称为法向导数[⊖].

牛顿冷却定律经常是在边界上更符合实际的条件. 其表述是: 单位时间单位曲面面积流出的热能与曲面温度u和曲面外温度u_b的温差成比例. 所以, 若牛顿冷却定律成立, 则在边界上

$$-K_0\nabla u \cdot \hat{n} = H(u - u_b). \tag{1.5.12}$$

注意, 通常比例常数$H>0$, 因为若$u>u_b$, 则热能将流出, 并且$-K_0\nabla u \cdot \hat{n}$将会大于零. 方程(1.5.12)验证了一维问题牛顿冷却定律的两种形式. 特别地, 在$x=0$处, $\hat{n}=-\hat{i}$, (1.5.12)的左边变为$K_0\partial u/\partial x$, 而在$x=L$处, $\hat{n}=\hat{i}$, (1.5.12)的左边变为$-K_0\partial u/\partial x$[见(1.3.4)和(1.3.5)].

稳态. 如果边界条件和热源都与时间无关, 则可能存在满足所给定常边界条件的热传导方程的稳态解:

$$0 = \nabla \cdot (K_0\nabla u) + Q.$$

注意, 当空间维数大于1时, 平衡温度分布$u(x, y, z)$满足的是偏微分方程. 在恒定热性质的情形, 平衡温度分布将满足

$$\nabla^2 u = -\frac{Q}{K_0}, \tag{1.5.13}$$

该方程称为泊松方程.

⊖ 有时(在其他书和文献中)使用记号$\partial u/\partial n$. 不过, 为了计算$\partial u/\partial n$, 通常要计算两个向量∇u和$\hat{n}$的点积$\nabla u \cdot \hat{n}$, 因此, 在本书中不使用符号$\partial u/\partial n$.

另外，如果也不存在热源($Q=0$)，则

$$\boxed{\nabla^2 u = 0;} \tag{1.5.14}$$

即温度分布的拉普拉斯算子是零. 方程(1.5.14)称为*拉普拉斯方程*，也叫做*位势方程*，因为如果无热源，重力位势和静电位势都满足(1.5.14). 在后面章节中，我们将要求解一些与拉普拉斯方程有关的问题.

[26]

二维问题. 如果几何形态使得温度仅依赖于 x，y 和 t，则先前所有关于三维问题的讨论仍然是有效的. 例如，对应无热源平衡热流(且具有恒定热性质)的二维 x 和 y 的拉普拉斯方程是

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

因为$\partial^2 u/\partial z^2 = 0$. 利用二维基本原理，可以直接推导出二维的结果(而不用作为三维问题的极限). 此处不再重复这些推导. 不过，可以轻易勾画出这些结果. 每当体积积分 $\left(\iiint_R \cdots \mathrm{d}V\right)$ 出现时，就用二维平面区域的面积分 $\left(\iint_R \cdots \mathrm{d}S\right)$ 替代. 类似地，三维问题用闭曲面积分 $\oiint \cdots \mathrm{d}S$ 来表示的边界贡献，一定可以用闭曲线积分 $\oint \cdots \mathrm{d}\tau$ 替代，$\oint \cdots \mathrm{d}\tau$ 是在二维平曲面的边界上的积分. 有关的结果不难推导，因为三维中的散度定理

$$\iiint_R \nabla \cdot A \mathrm{d}V = \oiint A \cdot \hat{n} \mathrm{d}S \tag{1.5.15}$$

在二维情形仍然有效，其形式是

$$\iint_R \nabla \cdot A \mathrm{d}S = \oint A \cdot \hat{n} \mathrm{d}\tau. \tag{1.5.16}$$

有时，(1.5.16)也称为*格林定理*，但我们更愿意称它为二维散度定理. 这样，读者只需要熟悉一个方程了，即(1.5.15)；*转换成二维形式只需要改变积分号的个数*.

极坐标和柱面坐标. 拉普拉斯算子

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{1.5.17}$$

对热传导方程(1.5.11)很重要并且是其稳态方程(1.5.14)，它对在科学和工程中有重大意义的其他问题也相当重要. 当所研究的区域是矩形或长方体时，直角坐标形式的方程(1.5.17)是最有用的. 其他坐标系也时常要用到. 在实际应用中，就需要在适当的坐标系中表示拉普拉斯算子的公式. 在柱面坐标系中，r 表示到 z 轴的径向距离，θ 表示角度：

[27]

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z, \end{aligned}} \tag{1.5.18}$$

可以证明，拉普拉斯算子有下列公式：

$$\boxed{\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.} \tag{1.5.19}$$

不一定要记住这个公式，经常可以在参考书中找到它. 但注意下面的事实，可以帮助把记忆这

个公式的失误减少到最小：在拉普拉斯算子中的每一项都有 u 的量纲被两个空间量纲除［就像(1.5.17)在直角坐标中的情形一样］．因为 θ 是用弧度测量的，没有量纲，这一点有助于记住用 r^2 去除 $\partial^2 u/\partial\theta^2$．在极坐标中(这里是指固定了 z 的二维坐标系，通常取 $z=0$)，拉普拉斯算子与 $\partial^2 u/\partial z^2=0$ 的(1.5.19)相同，因为不依赖于 z．方程(1.5.19)可以用变量替换和偏导数的链式法则推导出来(见习题)．

在某些物理情形，温度与极角 θ 无关；这种情形被称为是圆对称的或轴对称的．此时

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{1.5.20}$$

球面坐标．地球物理问题同球形导体的电学问题一样，最好用球面坐标(ρ，θ，ϕ)解决．径向距离是 ρ，与极轴(z 轴)的夹角是 ϕ，柱面(或方位)角是 θ．注意，如果 ρ 是常数，角 ϕ 是常数，则生成一个半径为 $\rho\sin\phi$ 的圆(如图 1.5.3 所示)使得

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \rho\sin\phi\cos\theta \\ y &= \rho\sin\phi\sin\theta \\ z &= \rho\cos\phi. \end{aligned}} \tag{1.5.21}$$

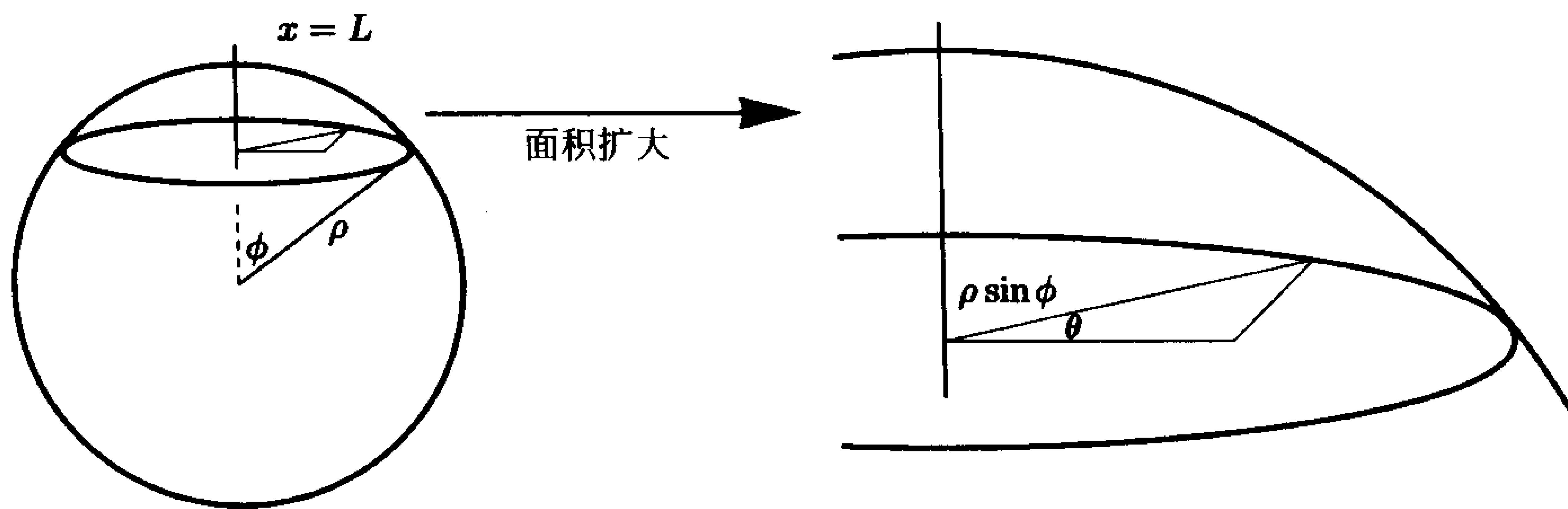


图 1.5.3 球面坐标系

与极轴角度的变化范围从 0 到 π(而通常柱面角的变化范围是从 0 到 2π)．可以证明，拉普拉斯算子满足

28

$$\boxed{\nabla^2 u = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial u}{\partial\phi}\right)+\frac{1}{\rho^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}.} \tag{1.5.22}$$

习题 1.5

1.5.1 设 $c(x, y, z, t)$ 表示一种污染物的浓度(单位体积内的含量)

(a)在区域 R 内污染物总量的表达式是什么？

(b)假设污染物的流 J 与浓度的梯度成比例．(这有道理吗？)写出污染物守恒的表达式．

(c)推导出支配污染物扩散的偏微分方程．

*1.5.2 对热能传导而言，热通量向量是 $\phi=-K_0\nabla u$．另外，分子以平均速度 V 运动，这个过程称为对流．简要解释 $\phi=-K_0\nabla u+c\rho uV$ 的原因．并推导出包括热能传导和对流热流的对应方程(假设无热源，具有恒定热性质)．

1.5.3 考虑极坐标

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta.$$

(a)因为 $r^2 = x^2 + y^2$，证明 $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta$，$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta$，$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$，$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-\sin\theta}{r}$.

(b)证明 $\hat{r} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$ 和 $\hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$.

(c)利用链式法则，证明 $\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$，所以 $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\hat{\theta}$.

(d)如果 $A = A_r\,\hat{r} + A_\theta\,\hat{\theta}$，证明 $\nabla \cdot A = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta)$，因为 $\partial\hat{r}/\partial\theta = \hat{\theta}$ 和 $\partial\hat{\theta}/\partial\theta = -\hat{r}$ 是从(b)得出的.

29

(e)证明 $\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$.

1.5.4 利用习题 1.5.3(a)和偏导数的链式法则，推导习题 1.5.3(e)的特殊情形，如果仅是 $u(r)$[㊀].

1.5.5 假设温度是圆对称的：$u = u(r, t)$，其中 $r^2 = x^2 + y^2$. 我们要推导这个问题的热传导方程. 考虑圆环 $a \leqslant r \leqslant b$.

(a)证明总热能是 $2\pi\int_a^b c\rho u r\mathrm{d}r$.

(b)证明在 $r = b$ 处，单位时间内流出圆环的热能是 $-2\pi b K_0 \partial u/\partial r\,|_{r=b}$. 并在 $r = a$ 处类似结果成立.

(c)利用(a)和(b)，推导无热源的圆对称热传导方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right).$$

1.5.6 如果导热性质与 r 有关，重做习题 1.5.5.

1.5.7 利用格林定理(1.5.16)，即二维散度定理，推导二维的热传导方程.

1.5.8 如果三维拉普拉斯方程成立[㊁]，证明：对任意闭曲面，

$$\oiint \nabla u \cdot \hat{n}\mathrm{d}S = 0.$$

(提示：利用散度定理.)给出这个结果(在热流情形下)的物理解释.

1.5.9 在圆环($r_1 \leqslant r \leqslant r_2$)内，求平衡温度分布：

*(a)如果外半径处温度为 T_2，内半径处温度为 T_1.

(b)如果外半径处绝热，而内半径处于温度 T_1.

1.5.10 确定圆内部($r \leqslant r_0$)的平衡温度分布，如果边界的温度固定为 T_0.

*1.5.11 考虑

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) \quad a < r < b.$$

假定

$$u(r,0) = f(r), \quad \frac{\partial u}{\partial r}(a,t) = \beta, \quad \frac{\partial u}{\partial r}(b,t) = 1.$$

利用物理概念推断，β 取什么值时，存在平衡温度分布？

30

1.5.12 假设温度是球对称的，$u = u(r, t)$，其中 r 是到一个固定点的距离($r^2 = x^2 + y^2 + z^2$). 考虑介于两个半径为 a 和 b 的同心球之间的(无源)热流.

(a)证明总热能是 $4\pi\int_a^b c\rho u r^2\mathrm{d}r$.

㊀ 也就是说 u 仅与 r 有关. ——译者注

㊁ 也就是说 u 满足拉普拉斯方程. ——译者注

(b)证明在 $r=b$ 处，单位时间内流出球壳的热能是 $-4\pi b^2K_0\partial u/\partial r\big|_{r=b}$. 在 $r=a$ 处类似结果成立.

(c)利用(a)和(b)，推导出球对称热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{k}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right).$$

*1.5.13 求在半径分别为1和4的同心球面间的稳态温度分布，如果外球面温度保持在80°，内球面温度为0°(见习题1.5.12).

1.5.14 等温线是其上温度为常数的线. 证明等温线与绝热边界处处垂直.

1.5.15 假设具有恒定热性质，并且无热源，推导三维热传导方程.

1.5.16 写出任意三维物体的积分守恒定律表达式. 假设无热源，在整个边界上指定热流，$\nabla u\cdot\hat{n}=g(x,y,z)$，它与时间无关. 通过关于时间的积分，确定总热能.(提示：利用初始条件.)

1.5.17 通过积分热传导方程(1.5.11)(假设无热源)，推导任意三维物体(具有恒定热性质)的积分守恒定律. 并证明结果与(1.5.1)等价.

正交曲线坐标. 引入一个坐标系(u,v,w)，定义为 $x=x(u,v,w)$，$y=y(u,v,w)$和 $z=z(u,v,w)$. 径向向量 $r\equiv x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$. r关于某个坐标的偏导数就在这个坐标的方向上. 例如，u方向的向量 $\partial r/\partial u$ 可以通过用其长度 $h_u=|\partial r/\partial u|$ 去除得到 u 方向的一个单位向量$\hat{e}_u$，h_u 称为尺度因子：$\hat{e}_u=\frac{1}{h_u}\partial r/\partial u$.

1.5.18 求柱面坐标的尺度因子.

1.5.19 求球面坐标的尺度因子.

1.5.20 一个标量的梯度用新坐标系可以表示为$\nabla g=a\partial r/\partial u+b\partial r/\partial v+c\partial r/\partial w$，其中，要确定标量 a，b，c. 利用 $\mathrm{d}g=\nabla g\cdot\mathrm{d}r$，推导出正交曲线坐标系中的梯度为

31

$$\nabla g=\frac{1}{h_u}\frac{\partial g}{\partial u}\hat{e}_u+\frac{1}{h_v}\frac{\partial g}{\partial v}\hat{e}_v+\frac{1}{h_w}\frac{\partial g}{\partial w}\hat{e}_w. \tag{1.5.23}$$

而散度的表达式就更难推导了，这里仅给出其公式：如果向量 p 在新坐标系下表示为 $p=p_u\hat{e}_u+p_v\hat{e}_v+p_w\hat{e}_w$，则散度满足

$$\nabla\cdot p=\frac{1}{h_uh_vh_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_vh_wp_u)+\frac{\partial}{\partial v}(h_uh_wp_v)+\frac{\partial}{\partial w}(h_uh_vp_w)\right]. \tag{1.5.24}$$

1.5.21 利用(1.5.23)和(1.5.24)，推导出拉普拉斯算子在正交曲线坐标系下的表达式：

$$\nabla^2T=\frac{1}{h_uh_vh_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_vh_w}{h_u}\frac{\partial T}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_uh_w}{h_v}\frac{\partial T}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_uh_v}{h_w}\frac{\partial T}{\partial w}\right)\right]. \tag{1.5.25}$$

1.5.22 利用(1.5.25)，推导拉普拉斯算子在柱面坐标下的表达式.

1.5.23 利用(1.5.25)，推导拉普拉斯算子在球面坐标下的表达式.

1.5节附录：梯度复习和傅里叶热传导定律的推导

实验上，对各向同性的[⊖]物质(即没有优先方向)，热在温差最大的方向从热到冷流动. 热流与在此方向上的温度变化率成比例(具有比例常数 K_0，即导热系数).

温度的变化 Δu 是

$$\Delta u=u(x+\Delta x,t)-u(x,t)\approx\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z.$$

在方向$\hat{\alpha}=\alpha_1\hat{i}+\alpha_2\hat{j}+\alpha_3\hat{k}$上，$\Delta x=\Delta s\,\hat{\alpha}$，其中 Δs 是 x 和 $x+\Delta x$ 之间的距离. 所以，温度在方

⊖ 非各向同性物质的例子是某些晶体和带纹的木头.

向$\hat{\alpha}$上的变化率是方向导数：

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial y} + \alpha_3 \frac{\partial u}{\partial z} = \alpha \cdot \nabla u,$$

这里，很方便定义下列向量：

$$\boxed{\nabla u \equiv \frac{\partial u}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{k},} \tag{1.5.26}$$

称为温度的梯度. 由点积的性质，如果 θ 是在$\hat{\alpha}$和∇u 之间的夹角，则方向导数是 $|\nabla u| \cos\theta$，因为 $|\hat{\alpha}| = 1$. u 的最大变化率(最大的方向导数)是 $|\nabla u| > 0$，$\theta = 0$ 时，(即在梯度方向上)出现这种情况. 由于该导数是正的，所以温度在梯度方向的增长最大. 因为热能就在温度递减的方向上流动，故热流向量与热梯度方向相反. 这就得到 [32]

$$\boxed{\phi = -K_0 \nabla u,} \tag{1.5.27}$$

因为 $|\nabla u|$ 等于 u(在梯度方向)的变化率的大小. 这仍被称为傅里叶热传导定律. 所以，在三维情形，梯度∇u 代替了$\partial u/\partial x$.

梯度的另一个基本性质是它与等温面正交(垂直). 这在二维问题中较容易说明(见图 1.5.4)，因为在其中，温度沿等位曲线(不是等位曲面)是常数. 为证明梯度是垂直的，考虑温度是常数 T_0 的曲面：$u(x, y, z, t) = T_0$. 我们计算沿曲面(在某个固定时刻)两侧的微分. 由于 T_0 是常数，$dT_0 = 0$. 所以，利用偏导数的链式法则，

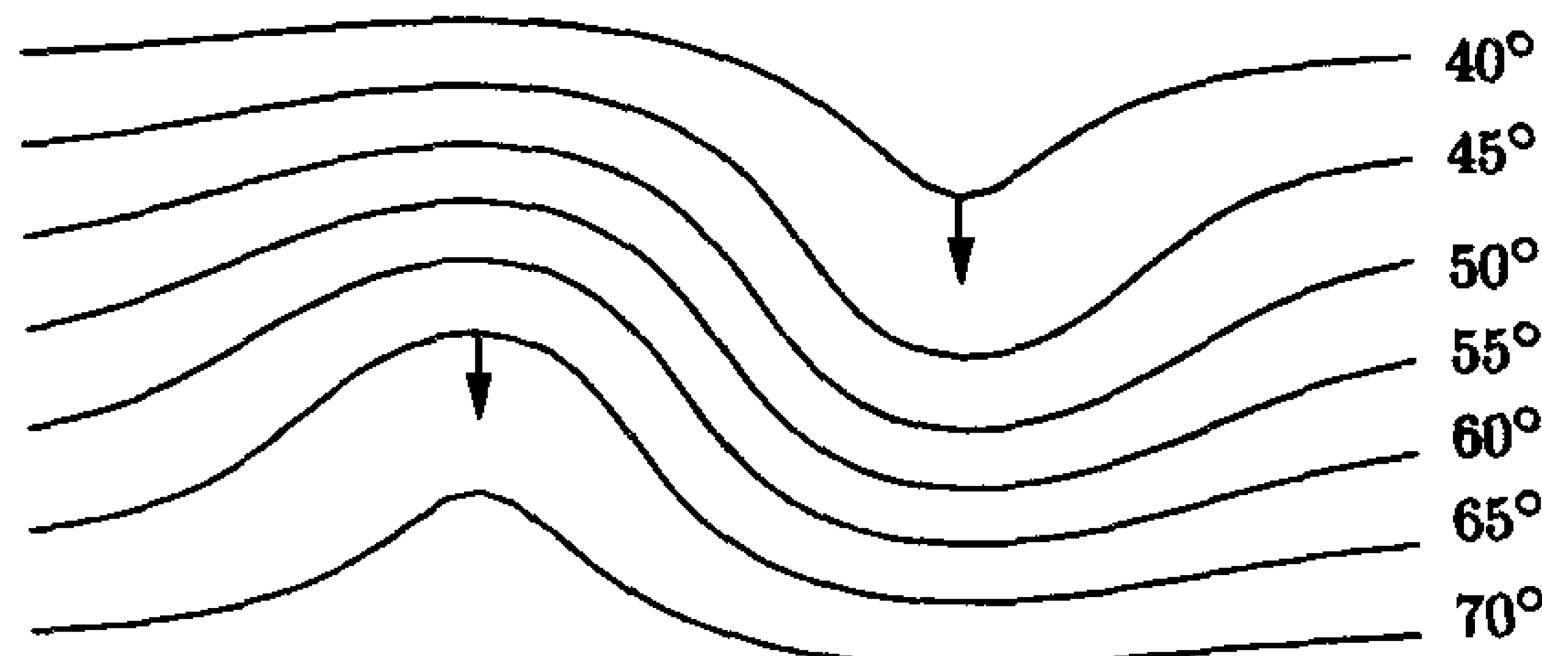


图 1.5.4 梯度与温度的等温面垂直

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = 0. \tag{1.5.28}$$

方程(1.5.28)还可以写为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot (dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz = ,\hat{k}) = 0$$

或

$$\nabla u \cdot (dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}) = 0. \tag{1.5.29}$$

$dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$表示等温面的切平面上的任意向量. 由(1.5.29)，它与∇u 的点积为零；也就是，∇u 与切平面垂直. 所以，∇u 与 u = 常数的曲面垂直. [33]

从而，我们学习了梯度∇u 的两个性质：

1. 方向：∇u 与 u = 常数的曲面垂直. ∇u 的方向也是最大方向导数的方向. u 在梯度的方向上增加.

2. 量值：$|\nabla u|$ 是方向导数的最大值. [34]

第2章　分离变量法

2.1　引言

在第1章中，由物理原理出发阐明了热传导方程及其对应的初始条件和边界条件. 这样就能够探索一些包含偏微分方程的典型问题的数学求解. 我们将用到叫做分离变量方法的技巧. 读者一定要成为这种方法的专家，为此要讨论相当多的例子. 我们强调掌握解决问题的技巧，并且必须清楚如何不误用.

对一维杆($0 \leqslant x \leqslant L$)，当所有的热系数是常数时，就得到了一个相对简单而典型的热传导方程问题. 此时，偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{Q(x,t)}{c\rho}, \qquad \begin{matrix} t > 0 \\ 0 < x < L \end{matrix} \tag{2.1.1}$$

必须在初始条件

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L \tag{2.1.2}$$

和两个边界条件下求解. 例如，指定杆两端的温度

$$\begin{aligned} u(0,t) &= T_1(t) \\ u(L,t) &= T_2(t). \end{aligned} \quad t > 0 \tag{2.1.3}$$

35　分离变量法用于偏微分方程和边界条件都是线性和齐次的情形，下面来解释这些概念.

2.2　线性性质

就像研究常微分方程一样，线性概念是非常重要的. 由定义，线性算子 L 满足

$$\boxed{L(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1L(u_1) + c_2L(u_2),} \tag{2.2.1}$$

其中 u_1 和 u_2 是任意两个函数，c_1 和 c_2 是任意常数. $\partial/\partial t$ 和$\partial^2/\partial x^2$ 是线性算子的例子，因为它们满足(2.2.1)：

$$\frac{\partial}{\partial t}(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1\frac{\partial u_1}{\partial t} + c_2\frac{\partial u_2}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + c_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}.$$

可以证明(见习题2.2.1)线性算子的任意线性组合还是一个线性算子. 所以，热算子

$$\frac{\partial}{\partial t} - k\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

也是一个线性算子.

u 的线性方程具有形式

$$L(u) = f, \tag{2.2.2}$$

其中 L 是一个线性算子，f是已知的. 线性偏微分方程的例子如：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{2.2.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha(x,t)u + f(x,t) \tag{2.2.4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2.2.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \alpha(x,t)u. \tag{2.2.6}$$

非线性偏微分方程的例子如：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha(x,t)u^4 \tag{2.2.7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}. \tag{2.2.8}$$

u^4 和 $u\partial u/\partial x$ 项是非线性的；它们不满足(2.2.1).

36

如果 $f=0$，则(2.2.2)变为 $L(u)=0$，称为一个齐次线性方程. 齐次线性偏微分方程的例子包括热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{2.2.9}$$

以及(2.2.5)和(2.2.6). 从(2.2.1)得到 $L(0)=0$(取 $c_1=c_2=0$). 所以，$u=0$ 总是齐次线性方程的一个解. 例如，$u=0$ 满足热传导方程(2.2.9). $u=0$ 称为齐次线性方程的平凡解. 检验一个方程是否为齐次的最简单方法就是，代入恒等于零的函数 u. 如果 $u\equiv 0$ 满足一个线性方程，则一定有 $f=0$，因而该线性方程是齐次的. 否则，方程称为非齐次的[例如，(2.2.3)和(2.2.4)].

线性算子(2.2.1)的基本性质允许线性方程的解在下面意义下叠加在一起.

叠加原理

如果 u_1 和 u_2 满足一个齐次线性方程，则它们的任意线性组合 $c_1u_1+c_2u_2$ 仍满足同一个齐次线性方程.

此原理的证明有赖于线性算子的定义. 假设 u_1 和 u_2 是一个齐次线性方程的两个解. 这意味着 $L(u_1)=0$ 和 $L(u_2)=0$. 计算 $L(c_1u_1+c_2u_2)$. 由线性算子定义

$$L(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1L(u_1) + c_2L(u_2).$$

由于 u_1 和 u_2 是齐次方程的解，$L(c_1u_1+c_2u_2)=0$. 这意味着 $c_1u_1+c_2u_2$ 满足齐次线性方程 $L(u)=0$，如果 u_1 和 u_2 满足相同的齐次线性方程.

线性和齐次性的概念也适用于边界条件，此时，变量在特定点处计值. 前面讨论过的边界条件是线性边界条件的例子：

$$u(0,t) = f(t) \tag{2.2.10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = g(t) \tag{2.2.11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0 \tag{2.2.12}$$

$$-K_0\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=h[u(L,t)-g(t)]. \tag{2.2.13}$$

例如，

37

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=u^2(L,t) \tag{2.2.14}$$

是非线性边界条件. 由于(在线性条件中)$u\equiv 0$ 只满足(2.2.12)，因而它是齐次的. 边界条件 $u(0,\ t)=0$ 不必要非由$u\equiv 0$ 来满足.

习题 2.2

2.2.1 证明线性算子的任意线性组合是线性算子.

2.2.2 (a)证明：$L(u)=\frac{\partial}{\partial x}\left[K_0(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$是线性算子.

(b)证明：$L(u)=\frac{\partial}{\partial x}\left[K_0(x,\ u)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$一般不是线性算子.

2.2.3 证明：如果 $Q=\alpha(x,\ t)u+\beta(x,\ t)$，则$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Q(u,\ x,\ t)$是线性的；此外，如果$\beta(x,\ t)=0$，则是齐次的.

2.2.4 在本习题中，推导非齐次问题的叠加原理.

(a)考虑 $L(u)=f$. 如果 u_p 为一个特解，$L(u_p)=f$，且如果 u_1 和 u_2 是齐次方程的解，$L(u_i)=0$，证明：$u=u_p+c_1u_1+c_2u_2$ 是另一个特解.

(b)如果 $L(u)=f_1+f_2$，其中 u_{pi}是对应f_i 的特解，则f_1+f_2 的一个特解是什么?

2.2.5 如果 L 是一个线性算子，证明：$L\left(\sum_{n=1}^{M}c_nu_n\right)=\sum_{n=1}^{M}c_nL(u_n)$. 并利用此结果证明叠加原理可以扩展到任意有限个齐次方程的解.

2.3 在有限端处具有零温度的热传导方程

2.3.1 概述

偏微分方程(2.1.1)是线性的，但只有在无热源 $Q(x,\ t)=0$ 时才是齐次的. 边界条件(2.1.3)也是线性的，且只有当 $T_1(t)=0$ 和 $T_2(t)=0$ 时，它们才是齐次的. 首先研究

$$\text{PDE:}\ \boxed{\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}\quad \begin{array}{l}0<x<L\\ t>0\end{array} \tag{2.3.1}$$

38

$$\text{BC:}\ \boxed{\begin{array}{l}u(0,t)=0\\ u(L,t)=0\end{array}} \tag{2.3.2}$$

$$\text{IC:}\ \boxed{u(x,0)=f(x).} \tag{2.3.3}$$

这个问题由齐次线性偏微分方程与齐次线性边界条件所组成. 除了该问题可以用分离变量法求解之外，研究(2.3.1)~(2.3.3)这类问题还有两个原因. 第一，这是一个有意义的物理问题，它对应一根无热源而两端浸于温度为0°的槽内的一维杆($0<x<L$). 我们对预测在这种相对简

单的物理情况下，初始热能(用初始条件表示)如何变化非常感兴趣．第二，将会看到，为了求解非齐次问题(2.1.1)～(2.1.3)，需要知道如何求解齐次问题(2.3.1)～(2.3.3)．

2.3.2 分离变量

分离变量法试图确定乘积形式的解

$$\boxed{u(x,t)=\phi(x)G(t),} \tag{2.3.4}$$

其中 $\phi(x)$ 仅是 x 的函数，$G(t)$ 仅是 t 的函数．(2.3.4)必须满足齐次线性偏微分方程(2.3.1)和边界条件(2.3.2)，暂时先不考虑(忽略)初始条件．乘积解(2.3.4)通常都不满足初始条件．后面我们再解释如何满足初始条件．

首先说清楚，这里不给出选择形式(2.3.4)的任何理由．(伯努利在18世纪发明了这个方法．如你所见，这个方法之所以有作用是因为它把一个偏微分方程简化为常微分方程．)将假设的乘积形式(2.3.4)代入偏微分方程(2.3.1)：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\phi(x)\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}G(t),$$

热传导方程(2.3.1)变为

$$\phi(x)\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}=k\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}G(t). \tag{2.3.5}$$

注意到，将(2.3.5)两边除以 $\phi(x)G(t)$ 就可以“分离变量”：

$$\frac{1}{G}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}=k\frac{1}{\phi}\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}.$$

变量已经被“分离”的意思是：等式左边只是 t 的函数，右边只是 x 的函数．可以继续这样做，而用常数 k 去除是方便的(即不是必要的)，所以 [39]

$$\underbrace{\frac{1}{kG}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}}_{\text{仅为}t\text{的函数}}=\underbrace{\frac{1}{\phi}\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}}_{\text{仅为}x\text{的函数}}. \tag{2.3.6}$$

这可以用 $k\phi(x)G(t)$ 除(2.3.5)直接得到．一个时间的函数怎么可能等于一个空间的函数呢？如果 x 和 t 都是任意的独立变量，则 x 不可能是一个如(2.3.6)指定的 t 的函数(或 t 是一个如(2.3.6)指定的 x 的函数)．重要的想法是，(2.3.6)的两边一定等于相同的常数：

$$\boxed{\frac{1}{kG}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\phi}\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}=-\lambda,} \tag{2.3.7}$$

其中 λ 是一个任意常数，称为分离常数[⊖]．我们很快会解释这个神秘的负号，它只是为了方便才引入的．

⊖ 对(2.3.7)中常数做如下进一步解释．假设(2.3.7)的左边是 t 的某个函数，$(1/kG)\mathrm{d}G/\mathrm{d}t=w(t)$．如果对 x 微分就得到零：$0=\mathrm{d}/\mathrm{d}x(1/\phi\mathrm{d}^2\phi/\mathrm{d}x^2)$．因为 $1/\phi\mathrm{d}^2\phi/\mathrm{d}x^2$ 只是 x 的函数，这表明 $1/\phi\mathrm{d}^2\phi/\mathrm{d}x^2$ 必须是常数，它的导数等于零．所以，(2.3.7)成立．

方程(2.3.7)派生出两个常微分方程，一个是关于$G(t)$的，另一个是关于$\phi(x)$的：

$$\boxed{\frac{d^2\phi}{dx^2}=-\lambda\phi} \tag{2.3.8}$$

$$\boxed{\frac{dG}{dt}=-\lambda kG.} \tag{2.3.9}$$

要重申，λ是一个常数，且它在(2.3.8)和(2.3.9)中还是同一个常数．乘积解$u(x,t)=\phi(x)G(t)$还必须满足两个齐次边界条件．例如，$u(0,t)=0$给出$\phi(0)G(t)=0$．有两种可能．或者$G(t)\equiv0$（$\equiv$的意思是对所有t，恒等于0）或者$\phi(0)=0$．如果$G(t)\equiv0$，则由(2.3.4)，所假定的乘积解恒等于零，$u(x,t)\equiv0$．这没有多少意义．[$u(x,t)\equiv0$称为平凡解，因为$u(x,t)\equiv0$自然就满足任何齐次偏微分方程和任何齐次边界条件．] 而要找的是非平凡解．对非平凡解必须有

40

$$\phi(0)=0. \tag{2.3.10}$$

应用到另一个边界条件$u(L,t)=0$，用类似的方法得到

$$\phi(L)=0. \tag{2.3.11}$$

除了要满足两个常微分方程(2.3.8)和(2.3.9)外，乘积解还必须满足边界条件(2.3.10)和(2.3.11)．

2.3.3 不定常方程

乘积法的优点是把一个不知道如何求解的偏微分方程，转换为两个常微分方程．边界条件把两个条件加到了与x相关的常微分方程上．不定常方程没有附加条件，

$$\frac{dG}{dt}=-\lambda kG. \tag{2.3.12}$$

在讨论求解带有两个齐次边界条件的x常微分方程之前，先求解(2.3.12)．方程(2.3.12)是常系数的一阶齐次线性常微分方程．很容易得到它的通解．几乎所有的常系数（线性和齐次的）常微分方程都可以通过寻找指数形式的解$G=e^{rt}$来求解，这里，通过代换，特征多项式为$r=-\lambda k$．所以，(2.3.12)的通解是

$$G(t)=ce^{-\lambda kt}. \tag{2.3.13}$$

我们记得，对于齐次线性方程，如果$e^{-\lambda kt}$是一个解，则（对任意常数c）$ce^{-\lambda kt}$也是一个解．不定常解是简单的指数函数．回想一下λ暂时还是任意的分离常数．然而，最终将会发现λ只被容许取某些值．若$\lambda>0$，则随着t增加，解依指数衰减（由$k>0$）．若$\lambda<0$，则解依指数增加，而若$\lambda=0$，则解为常数，不随时间变化．因为这是一个热传导问题并且温度$u(x,t)$与$G(t)$成比例，解不会随时间依指数增长．所以，$\lambda\geq0$；这个论断还没有证明，但也不必证明．因而，我们发现应当有$\lambda\geq0$这一点是相当方便的．事实上，这就是在分离变量[见(2.3.7)]时，引入表达式$-\lambda$的原因所在．如果引入的是μ（而不是$-\lambda$），则前面的论述是建议$\mu\leq0$．总之，在(2.3.7)中分离变量时，我们求解不定常方程并发现只有当分离常数≤0时，$G(t)$才不会依指数增长．既然希望$\lambda\geq0$，所以为方便起见，引入$-\lambda$．下面说明，如何确定所有容许的分离常数，与前面物理论述所期待的那样，将从数学上证明$\lambda\geq0$．

41

2.3.4 边值问题

假定的乘积解与 x 相关的部分 $\phi(x)$ 满足带有两个齐次边界条件的二阶常微分方程：

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{d^2\phi}{dx^2}=-\lambda\phi\\&\phi(0)=0\\&\phi(L)=0.\end{aligned}}\tag{2.3.14}$$

(2.3.14)称为常微分方程的边值问题. 在通常的常微分方程初级课程中，只具体讨论初值问题. 例如(考虑质点的牛顿运动定律)，依据在同一时刻的两个初始条件[给定 $y(0)$ 和 $dy/dt(0)$]，求解二阶常微分方程($md^2y/d^2=F$). 初值问题相当好，它通常都有唯一解. 然而，(2.3.14)却相当不同. 它是一个边值问题，所给的两个条件不在相同的位置(例如，$x=0$)，而在两个不同的位置 $x=0$ 和 $x=L$. 没有简单的理论能保证这类问题的解存在或解是唯一的. 特别地注意到：无论分离常数 λ 取什么值，$\phi(x)=0$ 都满足常微分方程和两个齐次边界条件，即使 $\lambda<0$；它被叫做边值问题的平凡解. 因为 $u(x,t)=\phi(x)G(t)$，它所对应的 $u(x,t)\equiv0$. 如果(2.3.14)的解是唯一的，则 $\phi(x)\equiv0$ 是唯一解；我们就不能用乘积(分离变量)法得到齐次线性偏微分方程的非平凡解. 幸运的是，(2.3.14)还有其他解. 不过，并不是对 λ 的所有值，(2.3.14)都存在非平凡解. 我们将证明，存在 λ 的某些特殊值，边值问题(2.3.14)有非平凡解 $\phi(x)$，这些值称为边值问题(2.3.14)的特征值⊖. 只对 λ 的某些值存在的非平凡解 $\phi(x)$ 称为对应特征值 λ 的特征函数.

下面要确定特征值 λ. 也就是 λ 取什么值，(2.3.14)有非平凡解? 直接求解(2.3.14). 其中的二阶常微分方程是线性的、齐次的和常系数的：两个无关解一般可从指数形式 $\phi=e^{rx}$ 得到. 将这个指数形式的解代入微分方程就得到特征多项式 $r^2=-\lambda$. 对应这两个根的解的性质大不相同，它与 λ 的取值有关. 有四种情况：

1. $\lambda>0$，此时两个根是纯虚数，且互为复共轭，$r=\pm i\sqrt{\lambda}$.

2. $\lambda=0$，此时两个根重合，即 $r=0, 0$.

[42]

3. $\lambda<0$，此时两个根是实数且不等，$r=\pm\sqrt{-\lambda}$，一正一负. (注意此时 $-\lambda$ 是正的，所以平方根运算有意义.)

4. λ 本身是复数.

这里将忽略最后一种情况(像大多数读者会做的那样)，因为后面(第5章)会证明：为了使得边值问题(2.3.14)有非平凡解存在，λ 是实数. 由对不定常方程解的讨论和所使用的物理论证，我们预计 $\lambda\geqslant0$；或许也没有必要分析第3种情形. 不过，我们将说明省略这种情形的数学理由.

特征值和特征函数($\lambda>0$). 首先考虑 $\lambda>0$ 的情况. 边值问题是

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}=-\lambda\phi\tag{2.3.15}$$

⊖ 单词 eigenvalue 来自德语单词 eigenwert，意思是特征值.

$$\phi(0)=0 \tag{2.3.16}$$

$$\phi(L)=0. \tag{2.3.17}$$

如果 $\lambda>0$，指数形式解有虚指数，$e^{\pm i\sqrt{\lambda}x}$. 此时，解是振荡的. 如果想要无关的实值解，通常选择 $\cos\sqrt{\lambda}x$ 和 $\sin\sqrt{\lambda}x$($\cos\sqrt{\lambda}x$ 和 $\sin\sqrt{\lambda}x$ 都是 $e^{\pm i\sqrt{\lambda}x}$的线性组合). 所以，(2.3.15)的通解是

$$\phi=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x, \tag{2.3.18}$$

这是两个无关解的任意线性组合.（可以取任意两个无关解的线性组合.）$\cos\sqrt{\lambda}x$ 和 $\sin\sqrt{\lambda}x$ 通常是最方便的，不过 $e^{i\sqrt{\lambda}x}$和 $e^{-i\sqrt{\lambda}x}$也可能要用到. 在某些例子中，会选择其他一些无关解. 例如，习题 2.3.2(f)说明有时选择 $\cos\sqrt{\lambda}(x-a)$和 $\sin\sqrt{\lambda}(x-a)$来作为无关解的优点.

现在应用边界条件. $\phi(0)=0$ 给出

$$0=c_1.$$

因为解在 $x=0$ 处必须为零，余弦项就消失了. 所以，$\phi(x)=c_2\sin\sqrt{\lambda}x$. 只有在 $x=L$ 处的边界条件还不被满足. $\phi(L)=0$ 给出

$$0=c_2\sin\sqrt{\lambda}L.$$

或者 $c_2=0$，或者 $\sin\sqrt{\lambda}L=0$. 由于已确定 $c_1=0$，如果 $c_2=0$，则 $\phi(x)\equiv0$，这是平凡解. 而要寻找的是那些具有非平凡解的 λ 值. 这些特征值 λ 必须满足

43

$$\sin\sqrt{\lambda}L=0. \tag{2.3.19}$$

$\sqrt{\lambda}L$ 必须是正弦函数的零点. 由 $\sin z$ 的示意图(见图 2.3.1)或由正弦函数的性质表明$\sqrt{\lambda}L=n\pi$. $\sqrt{\lambda}L$ 必须等于 π 的一个整数倍，其中 n 是一个正整数，因为$\sqrt{\lambda}>0$($n=0$ 是不合适的，因为在推导中，假设了 $\lambda>0$). 这些特征值 λ 是

$$\lambda=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,\quad n=1,2,3,\cdots. \tag{2.3.20}$$

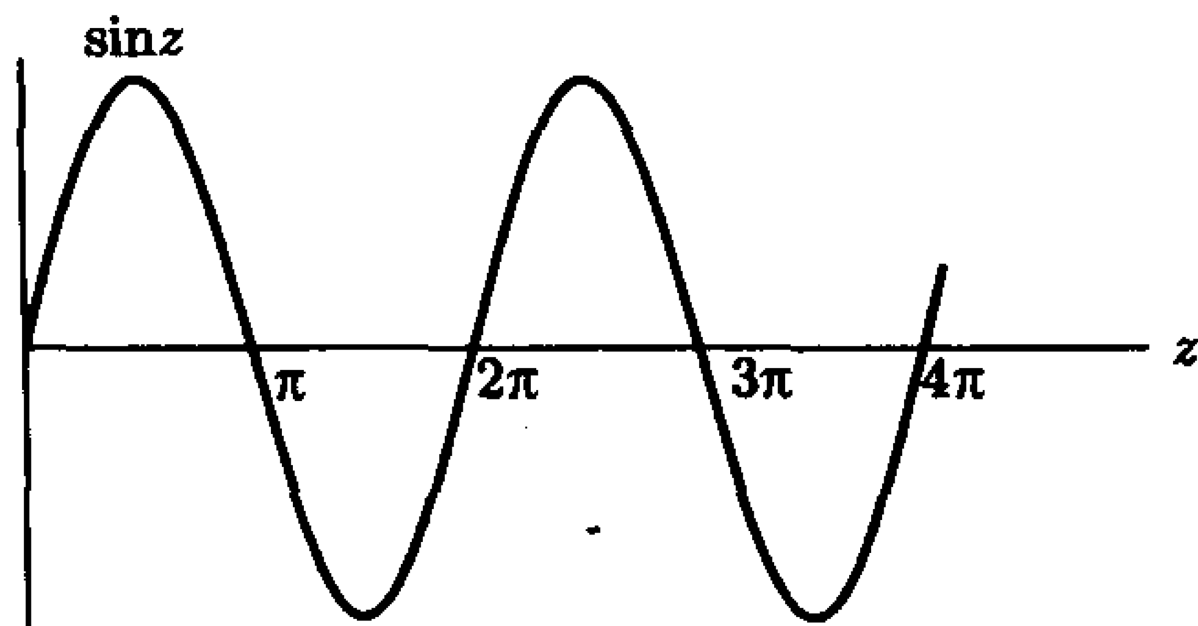


图 2.3.1 sinz 的零点

对应特征值 $\lambda=(n\pi/L)^2$ 的特征函数是

$$\phi(x)=c_2\sin\sqrt{\lambda}x=c_2\sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{2.3.21}$$

这里 c_2 是任意常数. 通常会为 c_2 选择一个方便的值，比如，$c_2=1$. 不过，应该记住，任何特定的特征函数总可以用任意常数相乘，因为偏微分方程和边界条件都是线性的和齐次的.

特征值($\lambda=0$). 现在要确定 $\lambda=0$ 是否是(2.3.15)满足边界条件(2.3.16)和(2.3.17)的特征值. $\lambda=0$ 是一个特殊情况. 如果 $\lambda=0$，(2.3.15)给出对应特征多项式[⊖]的二重零根 $r=0$，0 的解

$$\phi=c_1+c_2x,$$

为确定 $\lambda=0$ 是否为一个特征值，必须应用齐次边界条件: $\phi(0)=0$ 给出 $0=c_1$，因而 $\phi=c_2x$.

⊖ 请不要说 $\phi=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x$ 是 $\lambda=0$ 时的通解. 否则，就会发现 $\lambda=0$ 时，通解是一个任意常数. 虽然当 $\lambda=0$ 时，任意常数满足(2.3.15)，但是，(2.3.15)还是一个线性二阶微分方程；其通解必须是两个无关解的线性组合. 可以选择 $\sin\sqrt{\lambda}x/\sqrt{\lambda}$作为第二个无关解，以便当 $\lambda\to0$ 时，它与解 x 一致. 然而，这涉及太多的工作. 最好是把 $\lambda=0$ 作为一单独的情形来考虑.

另外，$\phi(L)=0$ 给出 $0=c_2L$. 既然杆的长度 L 是正的($\neq 0$)，$c_2=0$，所以，$\phi(x)\equiv 0$. 这是平凡解，所以，$\lambda=0$ 不是这个问题[(2.3.15)和(2.3.16)，(2.3.17)]的特征值. 不过，要留意，$\lambda=0$ 很可能是其他问题的特征值，对所遇到的任何新问题，都应该单独考虑 $\lambda=0$. 44

特征值($\lambda<0$). 有负的特征值吗？如果 $\lambda<0$，求解

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}=-\lambda\phi \tag{2.3.22}$$

是不难的，但必须要小心. 特征多项式的根是 $r=\pm\sqrt{-\lambda}$，所以，解是 $e^{\sqrt{-\lambda}x}$ 和 $e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. 如果不喜欢符号 $\sqrt{-\lambda}$，也可用与之等价的(若 $\lambda<0$) $\sqrt{|\lambda|}$. 不过，由 $\lambda<0$，$\sqrt{|\lambda|}\neq\sqrt{\lambda}$. 在 $\lambda<0$ 的情形，令

$$\lambda=-s$$

是方便的. 此时，$s>0$，微分方程(2.3.22)变为

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}=s\phi. \tag{2.3.23}$$

由 $s>0$，两个无关解是 $e^{+\sqrt{s}x}$ 和 $e^{-\sqrt{s}x}$. 通解是

$$\phi=c_1e^{\sqrt{s}x}+c_2e^{-\sqrt{s}x}. \tag{2.3.24}$$

经常用双曲函数代替指数函数. 双曲函数的定义是

$$\cosh z\equiv\frac{e^z+e^{-z}}{2} \quad 和 \quad \sinh z\equiv\frac{e^z-e^{-z}}{2},$$

它们是指数函数的简单线性组合. 在图 2.3.2 中给出了其示意图. 注意，$\sinh 0=0$ 和 $\cosh 0=1$ (这些结果与三角函数的结果类似). 还要注意，$d/dz\cosh z=\sinh z$ 和 $d/dz\sinh z=\cosh z$，与三角函数很相似，不过，由于在微分公式中没有负号出现，公式比较容易被记住. 如果用双曲函数代替指数，则(2.3.23)的通解可以写为

$$\phi=c_3\cosh\sqrt{s}x+c_4\sinh\sqrt{s}x, \tag{2.3.25}$$

一种与(2.3.24)等价的形式. 为确定是否存在负特征值($\lambda<0$，但 $s>0$，因为 $\lambda=-s$)，再次应用边界条件. 使用形式(2.3.24)，或者形式(2.3.25)；由两者得到的答案相同. 由(2.3.25)，$\phi(0)=0$ 给出 $0=c_3$，所以，$\phi=c_4\sinh\sqrt{s}x$. 另一个边界条件 $\phi(L)=0$ 给出 $c_4\sinh\sqrt{s}L=0$. 因为 $\sqrt{s}L>0$，且对一个正变量(见图 2.3.2)，sinh 从不等于零，因而，$c_4=0$. 所以，$\phi(x)\equiv 0$. 对 $\lambda<0$，(2.3.23)满足齐次边界条件的唯一解是平凡解. 所以，不存在负的特征值. 就这个例子而言，负特征值的存在对应着随时间的指数增长. 而物理上没有这样的解，因此从数学上已经清楚地证明了，这个问题不可能有负特征值. 但在其他一些问题中，可能会有负特征值. 后面(5.3 节)将建立一个包含瑞利商的理论，有许多事先就明确不可能有负特征值的问题. 当然，这就免除了刚才所做的那些计算. 45

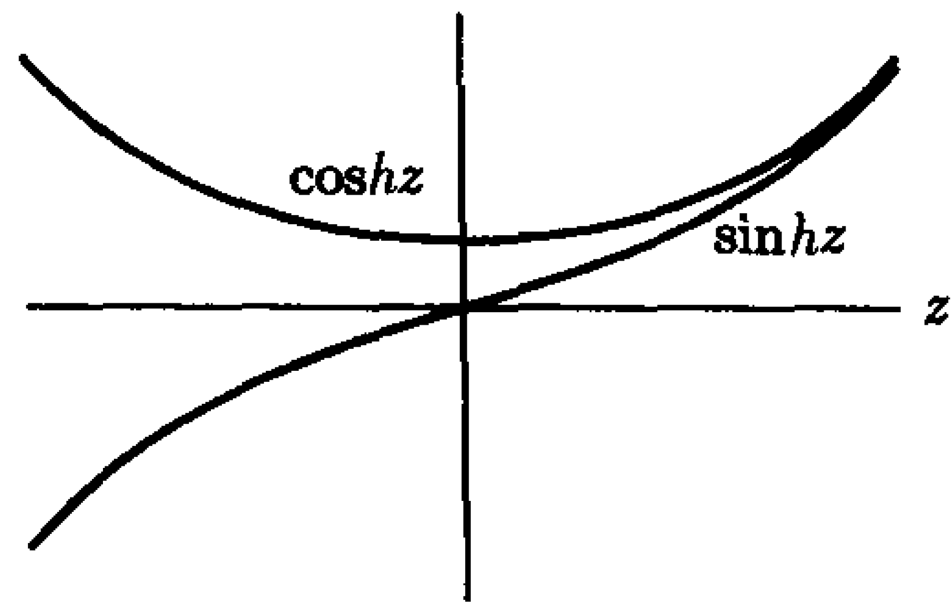


图 2.3.2 双曲函数

特征函数小结. 由分离变量所产生的边值问题的结果可以概述为：

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d^2\phi}{dx^2}+\lambda\phi&=0\\ \phi(0)&=0\\ \phi(L)&=0.\end{aligned}}$$

这个边值问题在本书中将会多次出现. 大体记住其特征值 λ 都是正的(不是零, 也不是负的)这个结果是有用的,

$$\boxed{\lambda=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,}$$

其中 n 是任意正整数, $n=1, 2, 3, \cdots$, 而对应的特征函数是

$$\boxed{\phi(x)=\sin\frac{n\pi x}{L}.}$$

如果对第一个(或最小的)特征值引入符号 λ_1, 下一个特征值为 λ_2, 等等, 就有 $\lambda_n=(n\pi/L)^2$, $n=1, 2, \cdots$. 对应的特征函数有时用 $\phi_n(x)$ 表示, 图 2.3.3 给出了前几个特征函数的示意图. 所有特征函数在 $x=0$ 和 $x=L$ 两端处(当然)都是零. 注意, $\phi_1(x)=\sin\pi x/L$ 在 $0<x<L$ 上没有零点, $\phi_2(x)=\sin 2\pi x/L$ 在 $0<x<L$ 上有一个零点. 事实上, $\phi_n(x)=\sin n\pi x/L$ 在 $0<x<L$ 上有 $n-1$ 个零点. 令人瞩目的是, 以后(5.3 节)将要说明, 这是特征函数的一般性质.

46

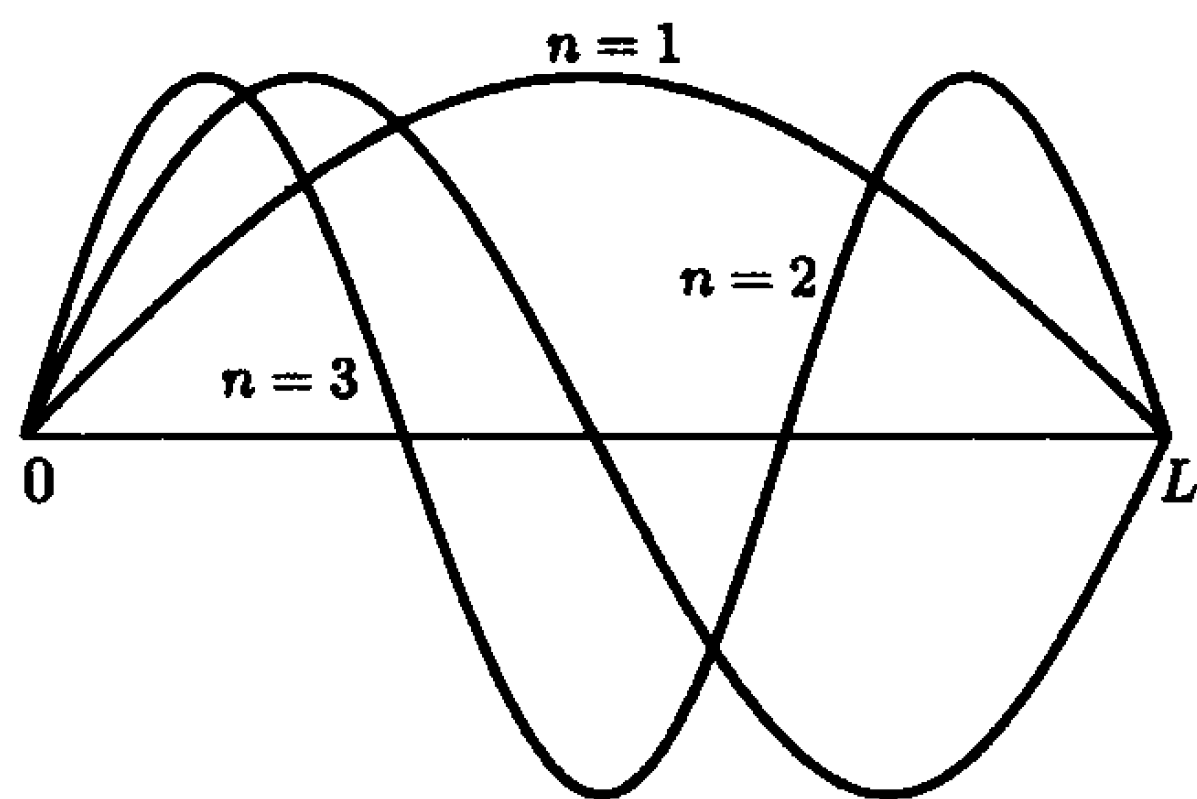


图 2.3.3 特征函数 $\sin n\pi x/L$ 和其零点

弹簧振子模拟. 前面得到了 $d^2\phi/dx^2=-\lambda\phi$ 的解. 现在给出对弹簧振子系统的模拟, 可能会对一些读者有帮助. 服从虎克定律的一个弹簧振子系统满足 $md^2y/dt^2=-ky$, 其中 $k>0$ 是弹簧常数. 于是, 如果 $\lambda>0$, 则常微分方程(2.3.15)可能就被想成是一个带有恢复力的弹簧振子系统. 因此, 如果 $\lambda>0$, 解应该是振荡的. 对 $\lambda>0$, 满足边界条件(2.3.16, 2.3.17)不会令人惊讶的; 由于恢复力的存在和常微分方程解的振荡, 常微分方程在 $x=0$ 处为零的非平凡解, 是有机会在 $x=L$ 处再次为零的. 我们已经证明了, 对 $\lambda>0$ 的某些特定值, 这种情况是能够发生的. 然而, 如果 $\lambda<0$, 则力不能恢复. 那么在 $x=0$ 处为零的非平凡解在 $x=L$ 处再次为零的可能性似乎很小. 但我们不能总是凭直觉行事, 所以, 我们从数学上验证了这些事实.

2.3.5 乘积解和叠加原理

总之, 这里仅仅对应于 $\lambda>0$, 得到了满足特定齐次边界条件 $u(0, t)=0$ 和 $u(L, t)=0$ 的热传导方程 $\partial u/\partial t=k\partial^2 u/\partial x^2$ 的乘积解. 这些解 $u(x, t)=\phi(x)G(t)$ 满足 $G(t)=ce^{-\lambda kt}$ 和 $\phi(x)=c_2\sin\sqrt{\lambda}x$, 其中由边界条件 $[\phi(0)=0$ 和 $\phi(L)=0]$, 确定了分离常数 λ 的容许值, $\lambda=(n\pi/L)^2$. 这里 n 是正整数. 因此, 热传导方程的乘积解是

$$\boxed{u(x,t) = B\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-k(n\pi/L)^2t},} \quad n = 1,2,\cdots, \tag{2.3.26}$$

其中 B 是任意常数($B=cc_2$)．对每个 n，这是不同的解．注意，当 t 增加时，这些特殊解依指数衰减，特别地，对这些解，$\lim\limits_{t\to\infty}u(x, t)=0$．另外，$u(x, t)$满足一个特殊的初始条件 $u(x, 0)=B\sin n\pi x/L$.

47

初值问题．如果初始条件恰好的话，简单乘积解(2.3.26)就可以满足初值问题．例如，假设要求解下列初值问题：

$$\text{PDE:} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\text{BC:} \quad u(0,t) = 0$$

$$u(L,t) = 0$$

$$\text{IC:} \quad u(x,0) = 4\sin\frac{3\pi x}{L}.$$

乘积解 $u(x, t)=B\sin n\pi x/L\cdot e^{-k(n\pi/L)^2t}$满足初始条件 $u(x, 0)=B\sin n\pi x/L$．所以，取 $n=3$ 和 $B=4$，就满足初始条件了．因而，这个例子的解是

$$u(x,t) = 4\sin\frac{3\pi x}{L}e^{-k(3\pi/L)^2t}.$$

可以证明，这个物理问题(如同我们所考虑的多数问题)有一个唯一解．因此，用什么方法得到这个解无关紧要．

叠加原理．乘积解是非常特殊的，因为只有当初始条件以适当形式出现时，才有可能直接使用它们．然而，我们想要说明，这些解在其他很多情况下是有用的；事实上，它们在所有情况下都是有用的．考虑相同的偏微分方程和边界条件，但改用初始条件

$$u(x,0) = 4\sin\frac{3\pi x}{L} + 7\sin\frac{8\pi x}{L}.$$

这个问题的解可以通过相加两个由乘积方法所得的较为简单的解得到：

$$u(x,t) = 4\sin\frac{3\pi x}{L}e^{-k(3\pi/L)^2t} + 7\sin\frac{8\pi x}{L}e^{-k(8\pi/L)^2t}.$$

显而易见，这个函数满足初始条件(代入 $t=0$)以及边界条件(代入 $x=0$ 和 $x=L$)．只需稍微再多做一点工作就可以证明它满足偏微分方程．这是叠加原理的一个例子．

叠加(推广)．叠加原理可以被推广为，如果 u_1，u_2，u_3，…，u_M 是一个齐次线性问题的解，则这些解的任意线性组合 $c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3+\cdots+c_Mu_M=\sum\limits_{n=1}^{M}c_nu_n$ 也是一个解，其中 c_n 是任意常数．由分离变量方法知道，对所有正整数 n，$\sin n\pi x/L\cdot e^{-k(n\pi/L)^2t}$是热传导方程(满足零边界条件)的解，因此，这些解的任意线性组合也是齐次线性热传导方程的一个解．所以，对任意有限 M，

48

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{M}B_n\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-k(n\pi/L)^2t} \tag{2.3.27}$$

满足热传导方程(带有零边界条件)．这样就把热传导方程的解加起来了，记住，对每个解，

“振幅”B 可能都是不同的，为此引入下标 B_n. 方程(2.3.27)表明，如果初始条件

$$u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{M}B_n\sin\frac{n\pi x}{L},\tag{2.3.28}$$

即如果初始条件为合适的正弦函数的有限和，热传导方程是可以求解的. 通常当 $f(x)$ 不是正弦函数的有限线性组合时，应该做什么呢？傅里叶级数理论(在第3章中会做相当详细的描述)指出：

1. 任意函数 $f(x)$(在某些后面要讨论的相当合理的限制下)都可以用 $\sin n\pi x/L$ 的有限线性组合(在某种意义下)逼近.

2. 虽然当 M 较小时，这种逼近可能不够好，但随着 M 的增加，会得到越来越好的逼近(见5.10节).

3. 如果考虑 $M\to\infty$ 时的极限，(2.3.28)不仅是利用特征函数的线性组合对 $f(x)$ 的最佳逼近，而且(又是在某种意义下)由此所得无穷级数将收敛于 $f(x)$ [对 $f(x)$ 有一些限制，下面再讨论].

所以(在第3章中再做澄清和明确)，“任意”初始条件 $f(x)$ 可以写成 $\sin n\pi x/L$ 的一个无穷线性组合，称为一种傅里叶级数：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{L}.\tag{2.3.29}$$

更为重要的是，所对应的无穷级数是热传导问题的解：

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-k(n\pi/L)^2t}.}\tag{2.3.30}$$

分析像(2.3.29)和(2.3.30)这样的无穷级数并不容易. 这就必须讨论这些级数的收敛性以及简要地讨论整个问题的无穷级数解的有效性. 我们暂时忽略这些理论性的问题，集中精力来考虑这些无穷级数解的构造.

49

2.3.6 正弦函数的正交性

有一个非常重要的实用要点一直被忽略了. 由初始条件，解(2.3.30)的系数 B_n 满足(2.3.29)，但是，如何确定系数 B_n 呢？假设

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{L}}\tag{2.3.31}$$

是可能的，这在一维杆区域 $0\leqslant x\leqslant L$ 上成立. 我们将假设标准的数学运算对无穷级数也是成立的. 方程(2.3.31)表示了一个有无穷个未知量的方程，但它应对 x 的每个值都成立. 如果把一千个不同的 x 值代入(2.3.31)，这一千个方程中的每一个方程都应成立，但仍然有无穷个未知量. 显然这不是确定 B_n 的有效方法. 一个经常使用的极其重要的方法是基于注意到(或许是来自积分表)特征函数 $\sin n\pi x/L$ 满足下列积分性质：

$$\boxed{\int_0^L\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ L/2 & m=n,\end{cases}}\tag{2.3.32}$$

其中，m 和 n 是正整数.

为了利用这些条件(2.3.32)来确定 B_n，在(2.3.31)的两边乘以 $\sin m\pi x/L$(对任意固定的正整数 m，与"哑"指标 n 无关)：

$$f(x)\sin\frac{m\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}. \tag{2.3.33}$$

下一步，对(2.3.33)从 $x=0$ 到 $x=L$ 积分：

$$\int_0^L f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\mathrm{d}x. \tag{2.3.34}$$

对有限级数而言，各项和的积分等于各项积分的和. 假设，这对无穷级数也成立. 现在，计算无穷和. 由积分性质(2.3.32)可见，只要 $n\neq m$，和的每一项都是零. 关于 n 求和，最终 n 等于 m. 仅仅是 n 的这个值(即 $n=m$)，对该无穷和有贡献. 出现在(2.3.34)右边唯一的一项是用 m 替换 n 的那一项：

50

$$\int_0^L f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}\mathrm{d}x = B_m \int_0^L \sin^2\frac{m\pi x}{L}\mathrm{d}x.$$

由右边积分等于 $L/2$，就能够求出 B_m：

$$B_m = \frac{\int_0^L f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}\mathrm{d}x}{\int_0^L \sin^2\frac{m\pi x}{L}\mathrm{d}x} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}\mathrm{d}x. \tag{2.3.35}$$

这个结果非常重要，得到该结果的方法也很重要. 要记住这两点. 由 $f(x)$ 是给定的初始条件，(2.3.35)中的积分是已知的. 通常这个积分是算不出来的，因此，可能需要(在计算机上)做数值积分，以便得到 $B_m(m=1, 2, 3, \cdots)$ 的确切值.

读者会发现，公式(2.3.32) $\int_0^L \sin^2 n\pi x/L\mathrm{d}x = L/2$ 在许多情形下是相当有用的，包括与本书内容无关的一些应用. 其应用广泛性的一个原因是，在自然界中有很多周期现象($\sin\omega t$)，能量或者力量通常与其平方($\sin^2\omega t$)成比例. 其平均能量则与 $\int_0^{2\pi/\omega}\sin^2\omega t\mathrm{d}t$ 除以周期 $2\pi/\omega$ 成比例. 正弦平方或余弦平方在一个全周期内的均值为 1/2 是值得记住的一件事. 因此，在一个正弦或余弦平方的任意多个全周期内的积分等于该区间长度的一半. 即，$\int_0^L \sin^2 n\pi x/L\mathrm{d}x = L/2$，因为 0 到 L 的区间或者是 $\sin n\pi x/L$ 的全周期，或者为半周期.

正交性. 当 $\int_0^L A(x)B(x)\mathrm{d}x = 0$ 时，称函数 $A(x)$ 和 $B(x)$ 在区间 $0\leqslant x\leqslant L$ 上是正交的. 术语"正交的"是从垂直向量那里借用来的，因为 $\int_0^L A(x)B(x)\mathrm{d}x = 0$ 与零点积类似，这一点将在本节的附录中作进一步的解释. 若一个函数集中的每个元素都与其他元素正交，就称之为正交函数集. 由函数 $\sin n\pi x/L$ 组成的函数集就是一个例子，它们是边值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} + \lambda\phi = 0 \quad 满足 \quad \phi(0) = 0 \quad 和 \quad \phi(L) = 0$$

的特征函数. 由(2.3.32)，它们是相互正交的. 所以，称(2.3.32)为正交性条件.

事实上，后面会看到，对其他大多数边值问题，特征函数构成一个函数的正交集(在第5章中讨论有关施图姆-刘维尔特征值问题时会有某些变动).

2.3.7 实例

作为例子，分析在初始温度为常温100℃的情形下热传导问题解. 这对应着一个很容易在 [51] 实验室中再现的物理问题. 取一根一维杆，并把整根杆放入一大桶沸水(100℃)中. 将它长时间放置在桶内. 之后，杆的各处(预期)都将达到100℃. 现在，(如果前期没有做的话)对其侧面做绝热处理，然后，突然地($t=0$)把两端浸于搅拌好的(0℃)冰水大槽中. 这个数学问题是

$$\text{PDE:}\quad \frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad t>0,\quad 0<x<L \tag{2.3.36}$$

$$\text{BC:}\quad \begin{aligned} u(0,t) &= 0\\ u(L,t) &= 0\end{aligned}\quad t>0 \tag{2.3.37}$$

$$\text{IC:}\quad u(x,0) = 100\quad 0<x<L. \tag{2.3.38}$$

根据(2.3.30)和(2.3.35)，它的解是

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}, \tag{2.3.39}$$

其中

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \tag{2.3.40}$$

而$f(x)=100$. 回忆一下，系数B_n是由(2.3.39)满足初始条件

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L} \tag{2.3.41}$$

而确定的. 从(2.3.40)计算系数B_n:

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{L}\int_0^L 100\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{200}{L}\left(-\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\right)\Bigg|_0^L \\ &= \frac{200}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} 0 & n\text{ 为偶数}\\ \dfrac{400}{n\pi} & n\text{ 为奇数.}\end{cases}\end{aligned} \tag{2.3.42}$$

因为$\cos n\pi=(-1)^n$，n为偶数时，等于1，n为奇数时，等于-1. 在图2.3.4中画出了解(2.3.39)的图像. 第3章中将进一步研究级数(2.3.41). 特别地，我们一定要解释一下令人感兴趣的情况，即初始温度在各处等于100，但级数(2.3.41)在$x=0$和$x=L$处等于零(由于边界条件).

对初值问题的逼近. 现在得到了热传导方程的初值问题(2.3.36)~(2.3.38)的解，它具有零边界条件($x=0$和$x=L$)和初始温度分布100. 解由(2.3.39)给出，其中B_n由(2.3.42)给定. 由于这是一个无穷级数，所以解是相当复杂的. 关于解，可以说些什么呢？首先，注意到 [52] $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)=0$. 温度分布趋于一个稳态，$u(x,t)=0$. 因为两端处于0°，这从物理上看并不令人惊讶；可以预计，杆所包含的所有初始热能会从两端流出. 满足$u(0)=0$和$u(L)=0$的

平衡问题 $d^2u/dx^2=0$ 有唯一解 $u\equiv 0$，这与 t 趋于无穷时的不定常问题的极限一致.

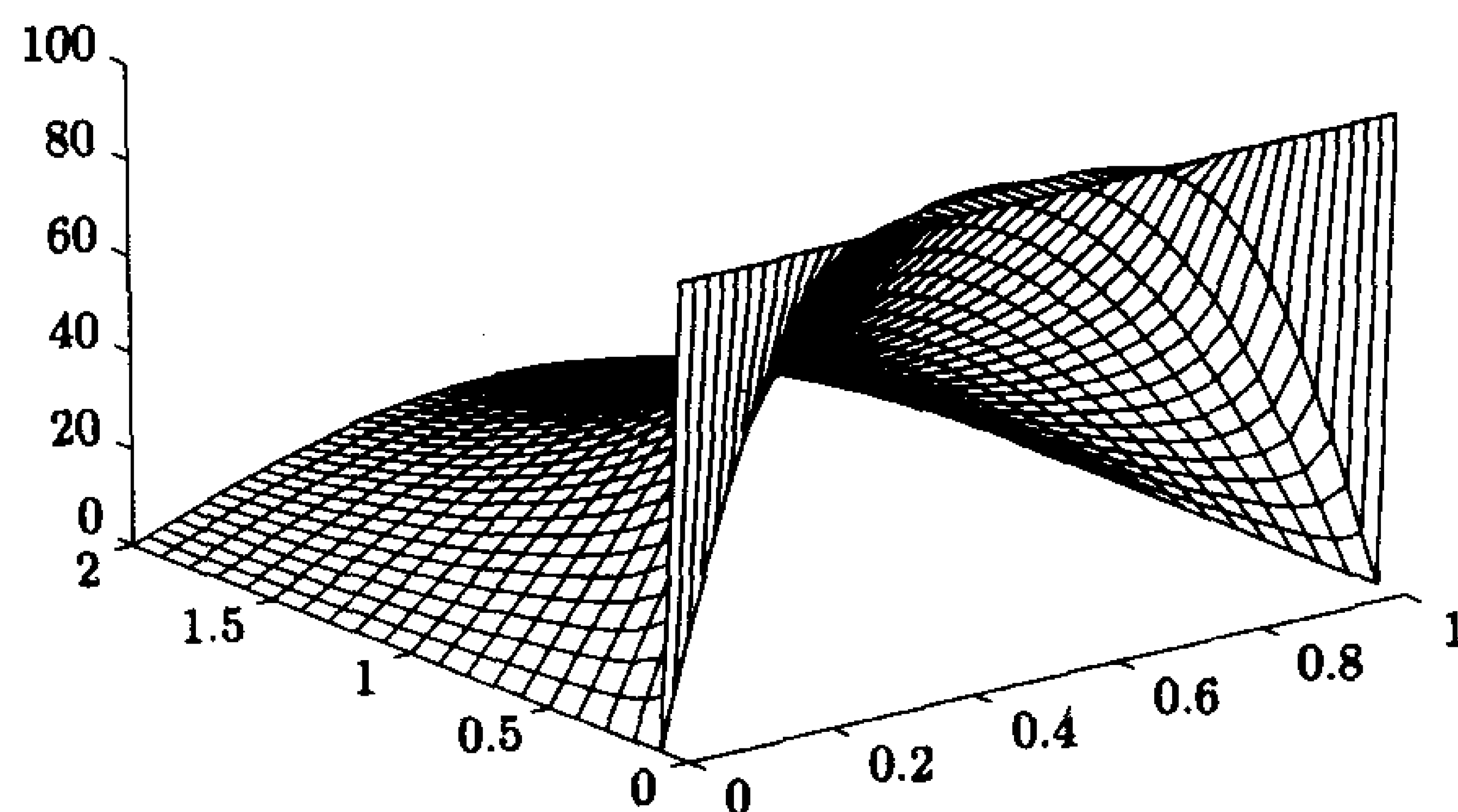


图 2.3.4 温度 $u(x,t)$ 对时间的依赖

可以解答的一个重要问题是这个解趋于稳态的方式. 如果 t 大，其近似温度分布是什么? 它与稳态 0°有何不同? 注意，(2.3.39)内的每一项都以不同的速率衰减. 在空间中振荡越大，衰减越快. 如果 t 能使得 $kt(\pi/L)^2$ 大，则后面的每项都比第一项小得多. 这样就可以只用第一项来近似该无穷级数:

$$u(x,t)\approx\frac{400}{\pi}\sin\frac{\pi x}{L}e^{-k(\pi/L)^2t}. \tag{2.3.43}$$

t 越大，近似结果越好. 即使 $kt(\pi/L)^2=1/2$，这个近似也不坏，因为

$$\frac{e^{-k(3\pi/L)^2t}}{e^{-k(\pi/L)^2t}}=e^{-8(\pi/L)^2kt}=e^{-4}=0.018\cdots.$$

所以，如果 $kt(\pi/L)^2\geqslant 1/2$，可以使用这个简单近似. 如图 2.3.5 所示，在这些时刻，温度对空间的依赖只是 $\sin\pi x/L$ 的简单上升和下降. 出现在中点 $x=L/2$ 处的峰值振幅随时间依指数衰减. 当 $kt(\pi/L)^2$ 小于 1/2 时，对空间的依赖就不能用一个简单的正弦曲线函数近似，而需要级数中的数十项. 这个解可以很容易地利用有限多项来计算. 在某些情形可能需要更多的项，还会有更好的方式计算 $u(x,t)$ 的.

53

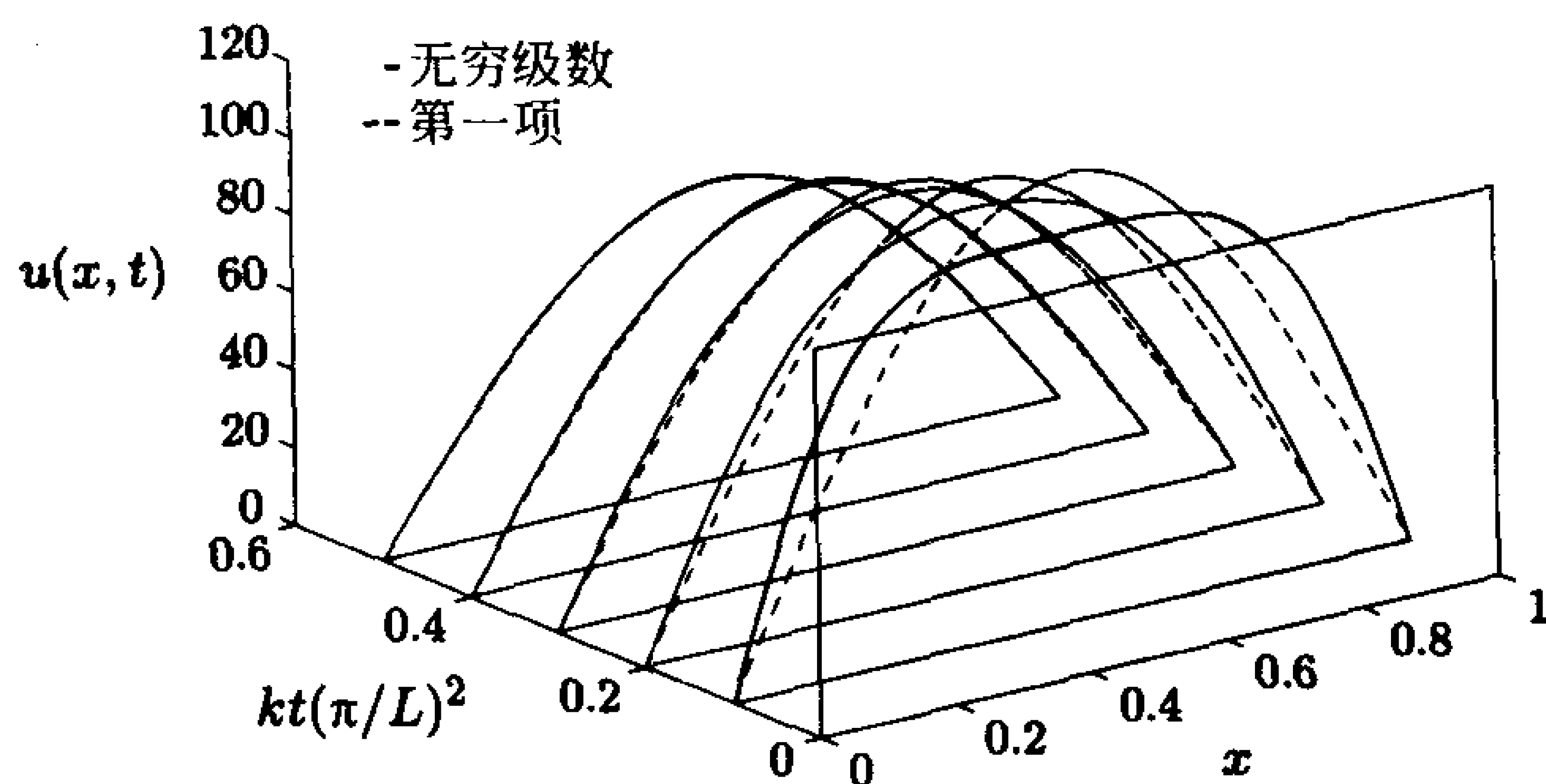


图 2.3.5 温度对时间的依赖(利用无穷级数)与第一项的比较. 注意，如果时间不太短，第一项是一个好的近似

2.3.8 小结

对出现在例子

$$\text{PDE:}\quad \frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$\text{BC:}\quad u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0$$
$$\text{IC:}\quad u(x,0)=f(x)$$

中的分离变量法，作如下小结：

1. 确定偏微分方程(PDE)是线性和齐次的，边界条件(BC)也是线性和齐次的.
2. 暂时忽略非零初始条件(IC).
3. 分离变量(确定由乘积解假设给出的微分方程)和引入一个分离常数.
4. 将分离常数确定为边值问题的特征值.
5. 求解其他微分方程. 记录由这种方法得到的偏微分方程的所有乘积解.
6. 应用叠加原理(对所有乘积解的线性组合).
7. 尝试满足初始条件.
8. 利用特征函数的正交性确定系数.

应该理解上面这些步骤，而不是死记硬背之. 注意下面两条是相当重要的.

1. 对偏微分方程的解应用叠加原理(不是累加不同常微分方程的解).
2. 在使用了叠加原理之后，再应用初始条件 $u(x,\ 0)=f(x)$.

54

习题 2.3

2.3.1 对下列偏微分方程，由分离变量法所给出的常微分方程是什么？

*(a) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)$ (b) $\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-v_0\frac{\partial u}{\partial x}$ *(c) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

(d) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{k}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)$ *(e) $\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ *(f) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

2.3.2 考虑微分方程

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}+\lambda\phi=0.$$

如果 ϕ 满足下列边界条件，确定特征值 λ(和对应特征函数). 分析三种情况($\lambda>0$, $\lambda=0$, $\lambda<0$). 可以假设特征值是实的.

(a) $\phi(0)=0$ 和 $\phi(\pi)=0$. *(b) $\phi(0)=0$ 和 $\phi(1)=0$.

(c) $\frac{d\phi}{dx}(0)=0$ 和 $\frac{d\phi}{dx}(L)=0$. (如果必要的话，参看 2.4.1 节.)

*(d) $\phi(0)=0$ 和 $\frac{d\phi}{dx}(L)=0$. (e) $\frac{d\phi}{dx}(0)=0$ 和 $\phi(L)=0$.

*(f) $\phi(a)=0$ 和 $\phi(b)=0$. (可以假设 $\lambda>0$.)

(g) $\phi(0)=0$ 和 $\frac{d\phi}{dx}(L)+\phi(L)=0$. (如果必要的话，参看 5.8 节.)

2.3.3 考虑热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

满足边界条件

$$u(0,t)=0 \quad 和 \quad u(L,t)=0.$$

在下列初始条件下，求解初值问题：

(a) $u(x,\ 0)=6\sin\frac{9\pi x}{L}$

(b) $u(x,\ 0)=3\sin\frac{\pi x}{L}-\sin\frac{3\pi x}{L}$

* (c) $u(x,\ 0)=2\cos\frac{3\pi x}{L}$

(d) $u(x,\ 0)=\begin{cases}1 & 0<x\leqslant L/2\\ 2 & L/2<x<L\end{cases}$

55

[(c)的解答中涉及的某些积分可以不计算.]

2.3.4 考虑

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

满足 $u(0,\ t)=0$, $u(L,\ t)=0$ 和 $u(x,\ 0)=f(x)$.

* (a)作为时间函数的杆内总热能是什么？

(b)在 $x=0$ 处，流出杆的热能是多少？在 $x=L$ 处呢？

* (c)(a)和(b)之间应该存在什么关系？

2.3.5 计算(当心 $n=m$ 的情形.)

$$\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\mathrm{d}x \quad 对\ n>0, m>0.$$

利用三角恒等式

$$\sin a\sin b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)].$$

*2.3.6 计算

$$\int_0^L \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\mathrm{d}x \quad 对\ n\geqslant 0, m\geqslant 0.$$

利用三角恒等式

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)].$$

(当心 $a-b=0$ 或 $a+b=0$ 的情形.)

2.3.7 考虑下列边值问题(如果必要的话，见2.4.1节)：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 满足\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0,\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0, \quad u(x,0)=f(x).$$

(a)给出这个问题的一句话物理解释.

(b)用分离变量法求解. 先证明没有随时间依指数增长的可分离解. [提示：答案是

$$u(x,t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\lambda_n kt}\cos\frac{n\pi x}{L}.]$$

λ_n 是多少？

56

(c)证明：如果

$$f(x)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi x}{L},$$

则解满足初始条件 $u(x,\ 0)=f(x)$.

(d)利用习题2.3.6，求解 A_0 和 A_n ($n\geqslant 1$).

(e)当 $t\to\infty$ 时，温度分布会发生什么变化？证明它趋向稳态温度分布(参见1.4节).

*2.3.8 考虑

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\alpha u.$$

这个方程对应这样的一维杆，其热损失或者由于外部温度为0°的侧面($\alpha>0$，见习题1.2.4)，或者是由于有与温度成比例的热汇而侧面绝热. 假设边界条件是

$$u(0,t)=0 \quad 和 \quad u(L,t)=0.$$

(a)如果 $\alpha>0$，平衡温度分布可能是什么?

(b)如果 $\alpha>0$，求解不定常问题$[u(x,0)=f(x)]$. 对长时间($t\to\infty$)，分析温度的变化，并与(a)比较.

*2.3.9 如果 $\alpha<0$，重做习题2.3.8. [要特别小心 $-\alpha/k=(n\pi/L)^2$ 的情形.]

2.3.10 对二维和三维向量，点积的基本性质 $A\cdot B=|A|\,|B|\cos\theta$，给出

$$|A\cdot B|\leqslant|A||B|. \tag{2.3.44}$$

在本习题中，把它推广到 n 维向量和函数，其中(2.3.44)就是有名的施瓦茨不等式. [Cauchy 和 Buniakovsky 的名字也与(2.3.44)有联系.]

(a)证明 $|A-\gamma B|^2>0$ 给出(2.3.44)，其中，$\gamma=A\cdot B/B\cdot B$.

(b)利用下面两个公式表示不等式

$$A\cdot B=\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n c_n\frac{b_n}{c_n}.$$

*(c)把(2.3.44)推广到函数. $\left[提示:让 A\cdot B 表示积分\int_0^L A(x)B(x)\,dx.\right]$

2.3.11 在一个矩形内，求解拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

满足边界条件

$$u(0,y)=g(y) \quad u(x,0)=0$$
$$u(L,y)=0 \quad u(x,H)=0.$$

57

(提示：如果需要的话，参见2.5.1节.)

2.3 节附录：函数的正交性

如果 $A\cdot B=0$，两个向量 A 和 B 就是正交的. 用分量形式，$A=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$和$B=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$；如果 $\sum_i a_ib_i=0$，A 和 B 就是正交的. 如果 x 只有三个值 x_1，x_2 和 x_3 是重要的，函数$A(x)$可以看作是一个向量，则(看作是一个向量的)函数 $A(x)$的分量是 $A(x_1)\equiv a_1$，$A(x_2)\equiv a_2$ 和 $A(x_3)\equiv a_3$. (由定义)如果 $\sum_i a_ib_i=0$，函数 $A(x)$与函数 $B(x)$就是正交的. 不过，在本章的问题中，x 在0和 L 之间的所有值都是重要的. 函数 $A(x)$可以看成一个无穷维向量，其分量为$A(x_i)$，其中 x_i 取遍某个区间. 这样，函数 $A(x)$ 称为与 $B(x)$ 正交，如果 $\sum_i A(x_i)\,B(x_i)=0$，其中的求和包括0和 L 之间的所有点. 自然地，如果 $\int_0^L A(x)B(x)\,dx=0$，就定义函数 $A(x)$正交于函数 $B(x)$. 积分代替了向量点积；二者都是"内积"的例子.

在向量的情形，存在三个相互垂直的(正交的)单位向量$\hat{i}$，$\hat{j}$和$\hat{k}$，称为标准基向量. 在分量形式

$$A = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$$

中，a_1 是 A 在 $\hat{i}$ 方向上的投影，等等．有时要用其他相互正交的向量(可能不是单位向量)u，v 和 w 表示 A，u，v 和 w 称为向量的一个正交集．这种情况下

$$A = \alpha_u u + \alpha_v v + \alpha_w w.$$

可以通过做点积确定关于这个正交集 u，v 和 w 的坐标 α_u，α_v，α_w．例如，

$$A \cdot u = \alpha_u u \cdot u + \alpha_v v \cdot u + \alpha_w w \cdot u.$$

注意，因为假设新向量集是相互正交的，有 $v \cdot u = 0$ 和 $w \cdot u = 0$．这样可以容易地求出 A 在 u 方向上的坐标 α_u，

$$\alpha_u = \frac{A \cdot u}{u \cdot u}. \tag{2.3.45}$$

($\alpha_u u$ 是 A 在 u 方向上的向量投影．)

对函数可以做类似的事情．如果 $f(x)$ 可以用正交集 $\sin n\pi x/L$ 的一个线性组合表示，则

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

其中 B_n 可以解释为 $f(x)$ 关于“方向”(或基向量) $\sin n\pi x/L$ 的坐标．为确定这些坐标，这个函数与基函数(向量) $\sin n\pi x/L$ 做内积，其中两个函数的内积是它们乘积的积分．所以，同前面一样，

$$\int_0^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \mathrm{d}x.$$

58

因为 $\sin n\pi x/L$ 是正交函数集，$\int_0^L \sin n\pi x/L \sin m\pi x/L \mathrm{d}x = 0$ 对 $n \neq m$ 成立．因此，就求出坐标(系数) B_n 为

$$B_n = \frac{\int_0^L f(x) \sin n\pi x/L \mathrm{d}x}{\int_0^L \sin^2 n\pi x/L \mathrm{d}x}. \tag{2.3.46}$$

由此可见与投影公式(2.3.45)相同的想法．标准公式(2.3.33)，$\int_0^L \sin^2 n\pi x/L \mathrm{d}x = L/2$，将(2.3.46)返回到更为熟悉的形式，

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \mathrm{d}x. \tag{2.3.47}$$

公式(2.3.45)和公式(2.3.46)都被某个东西相除．在(2.3.45)中，它是 $u \cdot u$，也就是向量 u 的平方长度．所以，$\int_0^L \sin^2 n\pi x/L \mathrm{d}x$ 可以看作是 $\sin n\pi x/L$ 的平方长度(虽然这里的长度指的不过是积分的平方根)．如此，函数 $\sin n\pi x/L$ 的平方长度就是 $L/2$，这是对在(2.3.47)中出现的 $2/L$ 的一种解释．

2.4 有关热传导方程的例子：其他边值问题

2.4.1 绝热端杆中的热传导

下面要详细地给出定义在 $0 \leqslant x \leqslant L$ 和 $t \geqslant 0$ 的问题

$$\text{PDE:}\ \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \tag{2.4.1}$$

$$\text{BC1:}\ \boxed{\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0} \tag{2.4.2}$$

$$\text{BC2:}\ \boxed{\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0} \tag{2.4.3}$$

$$\text{IC:}\ \boxed{u(x,0) = f(x)} \tag{2.4.4}$$

的求解过程(及其解的解释).

回想一下，这实际上是一根具有恒定热性质且没有热源的一维杆的热传导问题. 这个问题 [59] 与2.3节处理的问题十分类似，唯一的不同是边界条件. 在这里，两端都是绝热的，而在2.3节中，两端都固定在0℃. 偏微分方程和边界条件都是线性的和齐次的. 因此，应用分离变量法. 可以仿照在2.3.8节中所描述的一般步骤. 由如前所述的偏微分方程，乘积解的假设

$$u(x,t) = \phi(x)G(t) \tag{2.4.5}$$

给出

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = -\lambda kG \tag{2.4.6}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} = -\lambda\phi, \tag{2.4.7}$$

其中 λ 是分离常数. 又得到

$$G(t) = ce^{-\lambda kt}. \tag{2.4.8}$$

绝热边界条件(2.4.2)和(2.4.3)给出的分离解必须满足 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x(0)=0$ 和 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x(L)=0$. 则分离常数 λ 可以通过寻找使得对下列边值问题

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} = -\lambda\phi} \tag{2.4.9}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(0) = 0} \tag{2.4.10}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(L) = 0} \tag{2.4.11}$$

有非平凡解存在的那些 λ 来确定. 虽然边值问题的常微分方程与前面所分析问题中的相同，但边界条件是不同的. 这就必须重复所做过的那些分析. 要再一次讨论三种情况：$\lambda>0$，$\lambda=0$，$\lambda<0$(因为假设特征值是实的).

对 $\lambda>0$，(2.4.9)的通解又是

$$\phi = c_1\cos\sqrt{\lambda}x + c_2\sin\sqrt{\lambda}x. \tag{2.4.12}$$

计算 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x$ 和验证边界条件：

[60]

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\lambda}(-c_1\sin\sqrt{\lambda}x + c_2\cos\sqrt{\lambda}x). \tag{2.4.13}$$

边界条件 $d\phi/dx(0)=0$ 给出 $0=c_2\sqrt{\lambda}$，由 $\lambda>0$ 得 $c_2=0$. 所以，$\phi=c_1\cos\sqrt{\lambda}x$ 和 $d\phi/dx=-c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x$. 特征值 λ 及其对应的特征函数由剩下的边界条件 $d\phi/dx(L)=0$ 确定：

$$0=-c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}L.$$

与前面一样，对于非平凡解，$c_1\neq 0$，因此 $\sin\sqrt{\lambda}L=0$. $\lambda>0$ 的特征值与前面问题中的相同，$\sqrt{\lambda}L=n\pi$ 或者

$$\lambda=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,\quad n=1,2,3,\cdots, \tag{2.4.14}$$

但对应的特征函数是余弦(不是正弦)，

$$\phi(x)=c_1\cos\frac{n\pi x}{L},\quad n=1,2,3,\cdots. \tag{2.4.15}$$

由此产生的偏微分方程的乘积解是

$$u(x,t)=A\cos\frac{n\pi x}{L}e^{-(n\pi/L)^2kt},\quad n=1,2,3,\cdots, \tag{2.4.16}$$

其中 A 是任意常数.

在使用叠加原理之前，必须弄清是否还有其他特征值. 如果 $\lambda=0$，则

$$\phi=c_1+c_2x, \tag{2.4.17}$$

其中 c_1 和 c_2 是任意常数. ϕ 的导数是

$$\frac{d\phi}{dx}=c_2.$$

两个边界条件 $d\phi/dx(0)=0$ 和 $d\phi/dx(L)=0$，给出了相同的条件 $c_2=0$. 所以，对 $\lambda=0$，边值问题有非平凡解，也就是说，$\phi(x)$等于任意常数，

$$\phi(x)=c_1. \tag{2.4.18}$$

其不定常部分也是一个常数，因为对 $\lambda=0$，$e^{-\lambda kt}$等于1. 所以，齐次线性偏微分方程和边界条件的另一个乘积解 $u(x,t)=A$，其中 A 是任意常数.

对于 $\lambda<0$，不指望存在任何特征值，因为在这种情况下，不定常部分会依指数增长. 另外，似乎不可能找到一个指数的非平凡线性组合，该组合在 $x=0$ 和 $x=L$ 两端点处都有零斜率. 在习题2.4.4中，要求读者证明对于 $\lambda<0$，没有特征值.

为了满足初始条件，使用叠加原理. 取偏微分方程所有乘积解的线性组合(不只是对应 $\lambda>0$ 的解). 所以，

$$\boxed{u(x,t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi x}{L}e^{-(n\pi/L)^2kt}.} \tag{2.4.19}$$

61

有趣的是，这等价于

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi x}{L}e^{-(n\pi/L)^2kt}, \tag{2.4.20}$$

因为 $\cos 0=1$ 和 $e^0=1$. 事实上，在实际中(2.4.20)常常更易于使用. 但刚开始学习时，我们更愿意用(2.4.19)的形式，因为它能更清楚地表明，解是由对两个不太相同的情况 $\lambda=0$ 和 $\lambda>0$ 的分析得到的乘积解组合而成的.

如果对 $0\leqslant x\leqslant L$

$$\boxed{f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L},} \tag{2.4.21}$$

就满足初始条件 $u(x, 0) = f(x)$ 了. (2.4.21)成立也是根据傅里叶级数理论. 注意, 在前面的问题中, $f(x)$ 由正弦级数表示. 此处 $f(x)$ 则由余弦和常数项的级数组成. 这两种情况的不同是由于边界条件的不同. 要完成求解, 需要确定系数 A_0 和 $A_n (n \geqslant 1)$. 幸运的是, 由积分表可知, $\cos n\pi x/L$ 满足下列正交关系:

$$\boxed{\int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \dfrac{L}{2} & n = m \neq 0 \\ L & n = m = 0 \end{cases}} \tag{2.4.22}$$

对非负整数 n 和 m. 注意, $n = 0$ 或 $m = 0$ 在被积函数中对应常数 1. 常数 $L/2$ 是由于正弦或余弦函数平方的均值为 1/2. (2.4.22)中的常数 L 是因为对 $n = m = 0$, (2.4.22)变为 $\int_0^L \mathrm{d}x = L$. 方程(2.4.22)说明, 余弦函数(包括常数函数)构成一个函数的正交集. 和前面一样, 可以利用相同的想法来确定系数. 用 $\cos m\pi x/L$ 乘(2.4.21), 并从 0 到 L 积分, 得到

$$\int_0^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \mathrm{d}x.$$

这对所有 $m (m = 0, 1, 2, \cdots)$ 都成立. $m = 0$ 的情况恰对应着对(2.4.21)的直接积分. 由正交性, 可知在无穷和式中, 只有第 m 项有贡献,

[62]

$$\int_0^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} \mathrm{d}x = A_m \int_0^L \cos^2 \frac{m\pi x}{L} \mathrm{d}x.$$

因子 $\int_0^L \cos^2 m\pi x/L \mathrm{d}x$ 有两种不同的情况, $m = 0$ 和 $m \neq 0$. 求解 A_m 得到

$$\boxed{A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \mathrm{d}x} \tag{2.4.23}$$

$$(m \geqslant 1) \quad \boxed{A_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} \mathrm{d}x.} \tag{2.4.24}$$

两个公式的不同是这个余弦级数有些令人不快的特点, 这就是(2.4.22)中的 $L/2$ 和 L.

$\lambda > 0$ 和 $\lambda = 0$ 的解之间有明显的不同. 对应 $\lambda > 0$ 的所有解都随时间依指数衰减, 而对应 $\lambda = 0$ 的解则保持常值. 所以, 当 $t \to \infty$ 时, 复杂的无穷级数解(2.4.19)趋于稳态,

$$\lim_{t \to \infty} u(x, t) = A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \mathrm{d}x.$$

稳态温度是常值 A_0, 而且, 可以看出 A_0 是初始温度分布的均值. 这与前面得到的信息一致. 由 1.4 节可知, 带有绝热边界问题的平衡温度分布不是唯一的. 虽然任一个常值温度都是平衡解, 但是, 利用总热能守恒的想法, 就知道该常数一定是初始温度的均值.

2.4.2 细圆环中的热传导

迄今已经研究了特征函数为正弦函数的热流问题及特征函数为余弦函数的热流问题. 在本小节中，说明存在特征函数既有正弦函数又有余弦函数的热流问题.

如果将一根细金属丝(具有侧边绝热)弯成圆形，如图 2.4.1 所示，我们来建立适合它的初始边值问题. 由于暂时还不明显的原因，设金属丝具有长度 $2L$ (而不是以前两个热传导问题中的 L). 由圆周长是 $2\pi r$，半径 $r = 2L/2\pi = L/\pi$. 如果金属丝足够细，则假设金属丝内沿弯曲金属丝横截面的温度为常数是合理的. 在这种情况下，金属丝应满足一维热传导方程，其中距离实际上是沿金属丝的弧长 x:

63

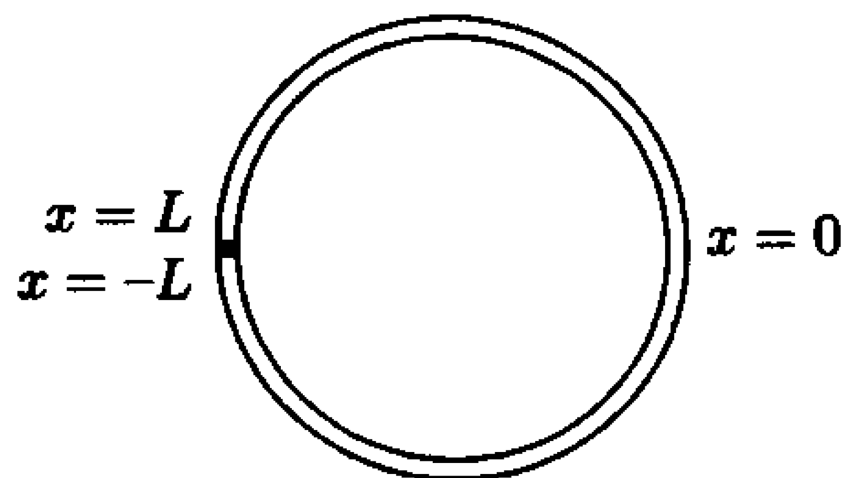


图 2.4.1 细圆环

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.} \tag{2.4.25}$$

已经假设了金属丝具有恒定热性质，且没有热源. 在此问题中，测量弧长 x 是方便的，使得 x 的范围是从 $-L$ 到 $+L$(不是较常用的 0 到 $2L$).

假设金属丝在端点处($x = -L$ 对 $x = +L$)非常牢地连接在一起. 在那里完全热接触条件应当成立(见习题 1.3.2). 且温度 $u(x, t)$在那里也是连续的，

$$\boxed{u(-L,t) = u(L,t).} \tag{2.4.26}$$

同样，因为在那里的热通量必须是连续的(并且热传导系数处处是常数)，故温度的导数也是连续的：

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}(-L,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t).} \tag{2.4.27}$$

偏微分方程的两个边界条件是(2.4.26)和(2.4.27). 初始条件是，沿金属丝的初始温度是给定位置的函数，

$$\boxed{u(x,0) = f(x).} \tag{2.4.28}$$

数学问题由满足齐次线性边界条件(2.4.26, 2.4.27)的齐次线性偏微分方程(2.4.25)组成. 下面按一般步骤应用分离变量法. 前面已经得到热传导方程的乘积解 $u(x, t) = \phi(x)G(t)$，其中$G(t) = ce^{-\lambda kt}$. 所对应的边值问题是

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} = -\lambda\phi} \tag{2.4.29}$$

$$\boxed{\phi(-L) = \phi(L)} \tag{2.4.30}$$

64

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(-L) = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(L).} \tag{2.4.31}$$

边界条件(2.4.30)和(2.4.31)都涉及两个边界(有时称为混合型). 特定的边界条件(2.4.30)和(2.4.31)称作周期边界条件，因为虽然从物理上可以把问题看成只是定义在 $-L < x < L$ 上的，但也常常看成是对所有 x 周期定义的；这个温度将是周期的($x = x_0$ 与 $x = x_0 + 2L$ 是相同的

物理点，因而，一定具有相同的温度）.

如果 $\lambda>0$，(2.4.29)的通解还是

$$\phi = c_1\cos\sqrt{\lambda}x + c_2\sin\sqrt{\lambda}x.$$

边界条件 $\phi(-L)=\phi(L)$ 给出

$$c_1\cos\sqrt{\lambda}(-L) + c_2\sin\sqrt{\lambda}(-L) = c_1\cos\sqrt{\lambda}L + c_2\sin\sqrt{\lambda}L.$$

因为余弦函数是偶函数，$\cos\sqrt{\lambda}(-L)=\cos\sqrt{\lambda}L$，而正弦函数是奇函数，$\sin\sqrt{\lambda}(-L)=-\sin\sqrt{\lambda}L$，因此只有当

$$c_2\sin\sqrt{\lambda}L = 0 \tag{2.4.32}$$

成立时，才会满足 $\phi(-L)=\phi(L)$. 在求解(2.4.32)之前，先分析涉及导数的第二个边界条件，

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\lambda}(-c_1\sin\sqrt{\lambda}x + c_2\cos\sqrt{\lambda}x).$$

所以，$\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x(-L)=\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x(L)$ 只有当

$$c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}L = 0 \tag{2.4.33}$$

时才成立，其中再次用到了余弦函数的偶函数性和正弦函数的奇函数性. 条件(2.4.32)和(2.4.33)是很容易求解的. 如果 $\sin\sqrt{\lambda}L\neq 0$，则 $c_1=0$ 和 $c_2=0$ 恰为平凡解. 所以，对非平凡解，

$$\sin\sqrt{\lambda}L = 0,$$

它确定了特征值 λ. 因此(和前面一样)，$\sqrt{\lambda}L=n\pi$，或等价地，

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,\quad n = 1,2,3,\cdots. \tag{2.4.34}$$

选择金属丝的长度为 $2L$ 使得特征值具有与前面一样的公式(当问题的解答都相似时，比较容易记忆). 不过，在这个问题中(不同于其他问题)，没有要求 c_1 和 c_2 都必须满足的附加约束. 两个都是任意的. $\sin n\pi x/L$ 和 $\cos n\pi x/L$ 都称为对应特征值 $\lambda=(n\pi/L)^2$ 的特征函数，

65

$$\phi(x) = \cos\frac{n\pi x}{L},\quad \sin\frac{n\pi x}{L},\quad n = 1,2,3,\cdots. \tag{2.4.35}$$

事实上，$\cos n\pi x/L$ 和 $\sin n\pi x/L$ 的任意线性组合也是特征函数，

$$\phi(x) = c_1\cos\frac{n\pi x}{L} + c_2\sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{2.4.36}$$

当两个函数都是特征函数时，这总的是对的. 所以，偏微分方程有两个乘积解无穷族，

$$u(x,t) = \cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{e}^{-(n\pi/L)^2kt} \quad 和 \quad u(x,t) = \sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{e}^{-(n\pi/L)^2kt}. \tag{2.4.37}$$

其中 $n=1, 2, 3, \cdots$. 这些讨论对应的是正特征根.

如果 $\lambda=0$，(2.4.29)的通解是

$$\phi = c_1 + c_2x.$$

边界条件 $\phi(-L)=\phi(L)$ 给出

$$c_1 - c_2L = c_1 + c_2L.$$

所以，$c_2=0$，$\phi(x)=c_1$，$\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x=0$. 自动满足边界条件(2.4.30). 因此任意常值的数

$$\phi(x)=c_1$$

是对应零特征值的特征函数. 有时说 $\phi(x)=1$ 是特征函数，因为特征函数的倍数仍是一个特征函数. 此时，乘积解 $u(x,t)$ 也是常值函数. 注意，对应 $\lambda=0$ 只有一个线性无关特征函数，而对问题中的每个正特征值，$\lambda=(n\pi/L)^2$，却存在两个线性无关特征函数 $\sin n\pi x/L$ 和 $\cos n\pi x/L$. 不必惊讶，$\lambda<0$ 时没有特征值.

在应用初始条件之前，必须先使用叠加原理. 用分离变量法所得到的最一般解，是所有乘积解的任意线性组合：

$$\boxed{u(x,t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{e}^{-(n\pi/L)^2kt}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{e}^{-(n\pi/L)^2kt}.}\tag{2.4.38}$$

常数 a_0 是对应 $\lambda=0$ 的乘积解，而对于特征值 $\lambda>0$，需要两族系数 a_n 和 b_n. 如果

$$\boxed{f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L},}\tag{2.4.39}$$

66

就满足初始条件 $u(x,0)=f(x)$. 这里 $f(x)$ 是正弦和余弦(及常值函数)的线性组合，与前面的问题不同，前面的问题或是使用正弦或是使用余弦(包括常值函数项). 另一个根本不同点是，(2.4.39)要对整个环都成立，即 $-L\leqslant x\leqslant L$，而以前仅有正弦或余弦的级数只在 $0\leqslant x\leqslant L$ 上成立. 傅里叶级数理论将证明(2.4.39)是正确的，更重要的是，前面的正弦或余弦级数只是(2.4.39)中级数的特例.

目前要做的就是确定(2.4.39)中的系数 a_0，a_n，b_n. 这些特征函数也构成了正交集，由积分表验证了下列正交性条件：

$$\boxed{\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & n\neq m\\ L & n=m\neq 0\\ 2L & n=m=0\end{cases}}\tag{2.4.40}$$

$$\boxed{\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & n\neq m\\ L & n=m\neq 0\end{cases}}\tag{2.4.41}$$

$$\boxed{\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\mathrm{d}x=0,}\tag{2.4.42}$$

其中 n 和 m 是任意(非负)整数. 常值特征函数对应的是 $n=0$ 或 $m=0$. 正弦或余弦($n=m$)平方的积分还是用“积分区间长度的一半”准则计算得到. 因为正弦函数是奇函数，余弦函数是偶函数[⊖]，所以最后的公式(2.4.42)的推导特别简单. 可以看到，例如，$\cos n\pi x/L$ 与其他特征函数[正弦特征函数由(2.4.42)，余弦特征函数和常值特征函数由(2.4.40)]正交.

系数的推导方法与以前的方法相同. 注意(2.4.39)就是

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

⊖ 奇函数和偶函数的乘积是奇函数. 由反称性，对称区间上的奇函数积分是零.

[67] 如果既用 $\cos m\pi x/L$ 又用 $\sin m\pi x/L$ 乘以上式，再从 $x=-L$ 到 $x=+L$ 积分，就得到

$$\int_{-L}^{L} f(x)\left\{\begin{matrix}\cos \frac{m\pi x}{L}\\ \sin \frac{m\pi x}{L}\end{matrix}\right\}dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\left\{\begin{matrix}\cos \frac{m\pi x}{L}\\ \sin \frac{m\pi x}{L}\end{matrix}\right\}dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\left\{\begin{matrix}\cos \frac{m\pi x}{L}\\ \sin \frac{m\pi x}{L}\end{matrix}\right\}dx.$$

利用(2.4.40)～(2.4.42)就得到

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx = a_m\int_{-L}^{L}\cos^2\frac{m\pi x}{L}dx$$

$$\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx = b_m\int_{-L}^{L}\sin^2\frac{m\pi x}{L}dx.$$

用我们已经熟悉的方法解出系数，

$$(m \geqslant 1)\quad \boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \\ a_m &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx \\ b_m &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx. \end{aligned}} \qquad (2.4.43)$$

(2.4.38)就是问题的解，其系数由(2.4.43)给出.

2.4.3 边值问题小结

在很多问题中，包括刚刚讨论过的问题，这个具体的简单常系数微分方程

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda\phi$$

构成了边值问题的基本部分. 已讨论过的典型边界条件的特征值和特征函数的相关公式，都收集在表 2.4.1 之中. 读者会发现，这张表有助于对这些结果的理解，这些结果在本书中有大量应用. 在这些情形中，只要 $\lambda=0$ 是特征值，常数就是特征函数(在 $\cos n\pi x/L$ 中对应 $n=0$)，

[68] 注意到这种情况是重要的.

表 2.4.1 $\frac{d^2\phi}{dx^2}=-\lambda\phi$ 的边值问题

边界条件	$\phi(0)=0$ $\phi(L)=0$	$\frac{d\phi}{dx}(0)=0$ $\frac{d\phi}{dx}(L)=0$	$\phi(-L)=\phi(L)$ $\frac{d\phi}{dx}(-L)=\frac{d\phi}{dx}(L)$
特征值 λ_n	$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ $n=1,2,3,\cdots$	$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ $n=0,1,2,3,\cdots$	$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ $n=0,1,2,3,\cdots$

（续）

特征函数	$\sin\frac{n\pi x}{L}$	$\cos\frac{n\pi x}{L}$	$\sin\frac{n\pi x}{L}$和 $\cos\frac{n\pi x}{L}$
级数	$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{L}$	$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi x}{L}$	$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}$
系数	$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x$	$A_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\mathrm{d}x$ $A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x$	$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)\mathrm{d}x$ $a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x$ $b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x$

习题 2.4

*2.4.1 求解热传导方程$\partial u/\partial t=k\partial^2 u/\partial x^2(0<x<L,\ t>0)$在下列边界条件和初值条件下的解：

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0\quad t>0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0\quad t>0.$$

(a) $u(x,\ 0)=\begin{cases}0 & x<L/2\\ 1 & x>L/2\end{cases}$　　(b) $u(x,\ 0)=6+4\cos\frac{3\pi x}{L}$

(c) $u(x,\ 0)=-2\sin\frac{\pi x}{L}$　　(d) $u(x,\ 0)=-3\cos\frac{8\pi x}{L}$

69

*2.4.2 求解

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad 满足\quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$$
$$u(L,t)=0$$
$$u(x,0)=f(x).$$

对这个问题，读者可以假设没有热传导方程的解随时间依指数增长．还可以猜测特征函数的正交性条件．

*2.4.3 求解特征值问题：

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}=-\lambda\phi$$

满足

$$\phi(0)=\phi(2\pi)\quad 和\quad \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(0)=\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(2\pi).$$

2.4.4 证明：边值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}=-\lambda\phi\quad 满足\quad \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(0)=0\quad 和\quad \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(L)=0$$

没有负特征值．

2.4.5 这个题目给出细金属丝热传导方程的另一种推导方式．对有限厚度的圆金属丝的方程是个二维热传导方程(用极坐标系)．证明：如果温度与 r 无关，并且金属丝很细，这个方程将简化为(2.4.25)．

2.4.6 确定2.4.2节细圆环的平衡温度分布：

(a)直接从平衡问题(见1.4节)出发.

(b)计算不定常问题当$t\to\infty$时的极限.

2.4.7 在半径为a的圆域内，求解拉普拉斯方程，

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,$$

其边界条件是

$$u(a,\theta) = f(\theta).$$

70

(提示：参见2.5.2节.)

2.5 拉普拉斯方程：求解和定性性质

2.5.1 矩形区域内的拉普拉斯方程

为了得到更多的实际经验，下面考虑另一个可以用分离变量法分析的问题. 这个问题讨论的是二维区域内的稳态热传导. 具体地说，当在边界上指定的温度是位置(与时间无关)的函数时，考虑矩形内($0\leqslant x\leqslant L$, $0\leqslant y\leqslant H$)的平衡温度，此时. 平衡温度$u(x, y)$满足带有下列边界条件的拉普拉斯方程：

$$\text{PDE:}\ \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0} \qquad (2.5.1)$$

$$\text{BC1:}\ \boxed{u(0,y) = g_1(y)} \qquad (2.5.2)$$

$$\text{BC2:}\ \boxed{u(L,y) = g_2(y)} \qquad (2.5.3)$$

$$\text{BC3:}\ \boxed{u(x,0) = f_1(x)} \qquad (2.5.4)$$

$$\text{BC4:}\ \boxed{u(x,H) = f_2(x),} \qquad (2.5.5)$$

其中，$f_1(x)$，$f_2(x)$，$g_1(y)$和$g_2(y)$分别是x和y的给定函数. 这里的偏微分方程是线性和齐次的，边界条件虽然是线性的，但不是齐次的. 对该问题的现有形式，还不能使用分离变量法，因为分离变量时，边值问题(确定分离常数)一定要具有齐次边界条件. 而在本例里，所有的边界条件都是非齐次的. 这个困难可以如此来避开：原问题的非齐次是由于四个非齐次的边界条件. 而叠加原理的想法有时也可以用于非齐次问题，(见习题2.2.4). 把这个问题分为四个问题，每个问题有一个非齐次条件. 设

$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y) + u_3(x,y) + u_4(x,y), \qquad (2.5.6)$$

其中每个$u_i(x, y)$都满足带有一个非齐次边界条件和相关的三个齐次边界条件的拉普拉斯方程，如图2.5.1所示. 不是直接求解u，而是求解u_1，u_2，u_3和u_4. 为什么它们的和满足原问题呢？检查发现偏微分方程和四个非齐次边界条件都是满足的. 因为u_1，u_2，u_3和u_4满足拉普拉斯方程，这个方程是线性的和齐次的，由叠加原理，$u\equiv u_1+u_2+u_3+u_4$也满足同样的线性和齐次的偏微分方程. 在$x=0$处，$u_1=0$，$u_2=0$，$u_3=0$，$u_4=g_1(y)$，所以，在$x=0$处，$u=u_1+u_2+u_3+u_4=g_1(y)$，这正是想要的非齐次边界条件. 用类似方法可以验证，所有四个非齐次条件都满足.

71

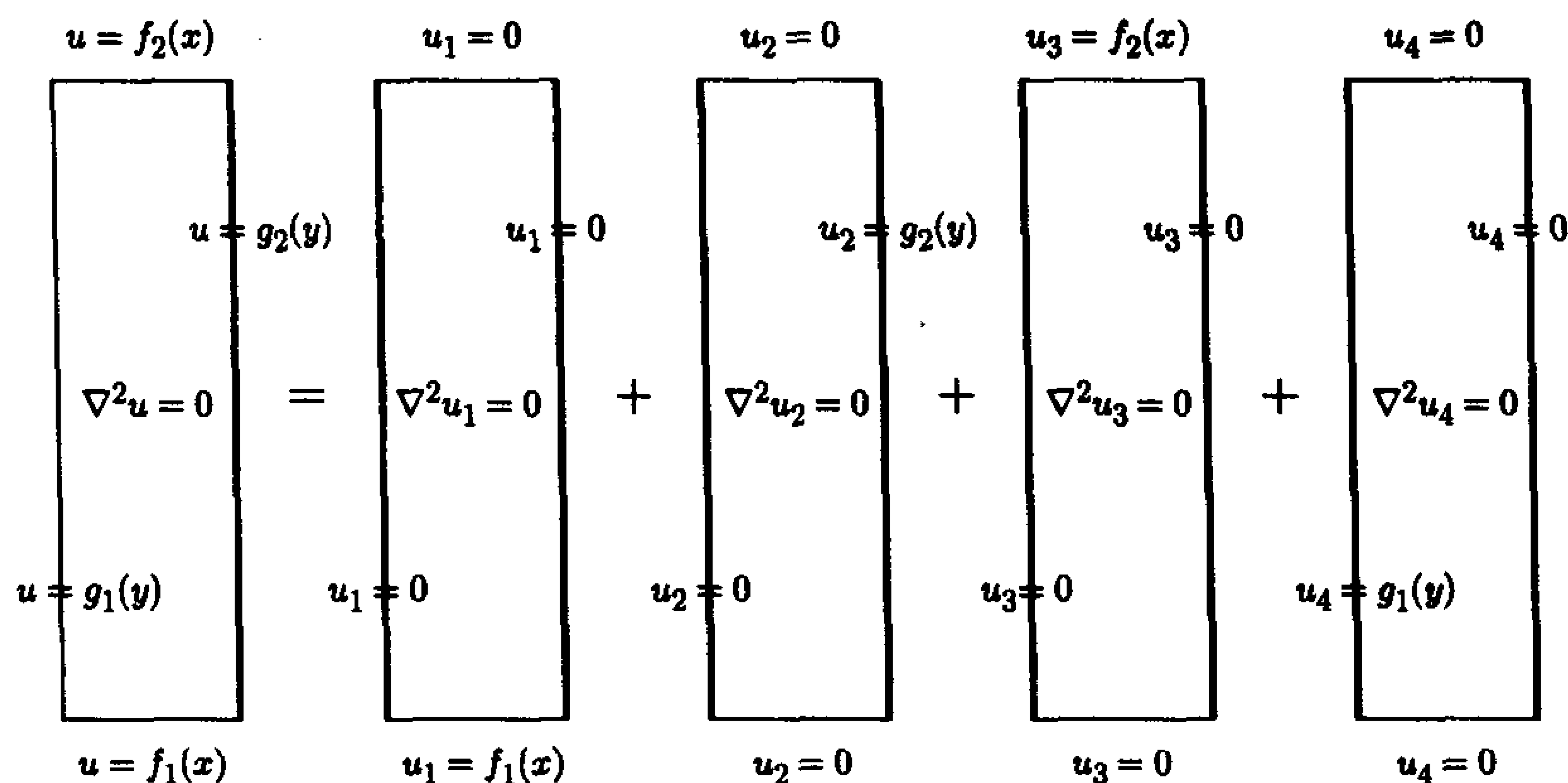


图 2.5.1 矩形区域内的拉普拉斯方程

求解每个 $u_i(x, y)$ 的方法都是相同的，只是细节略有不同. 这里只求解 $u_4(x, y)$，把其余的留作习题：

$$\text{PDE}: \boxed{\frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial y^2} = 0} \tag{2.5.7}$$

$$\text{BC1}: \boxed{u_4(0,y) = g_1(y)} \tag{2.5.8}$$

$$\text{BC2}: \boxed{u_4(L,y) = 0} \tag{2.5.9}$$

$$\text{BC3}: \boxed{u_4(x,0) = 0} \tag{2.5.10}$$

$$\text{BC4}: \boxed{u_4(x,H) = 0.} \tag{2.5.11}$$

72

用分离变量法来求解这个问题. 先忽略非齐次边界条件 $u_4(0, y) = g_1(y)$. 最后再把乘积解加起来合成出 $g_1(y)$. 寻求乘积解

$$u_4(x,y) = h(x)\phi(y). \tag{2.5.12}$$

由三个齐次边界条件可见

$$h(L) = 0 \tag{2.5.13}$$

$$\phi(0) = 0 \tag{2.5.14}$$

$$\phi(H) = 0. \tag{2.5.15}$$

所以，与 y 有关的解 $\phi(y)$ 有两个齐次边界条件，而与 x 有关的解 $h(x)$ 只有一个齐次边界条件. 将(2.5.12)代入拉普拉斯方程就得到

$$\phi(y)\frac{d^2h}{dx^2} + h(x)\frac{d^2\phi}{dy^2} = 0.$$

用 $h(x)\phi(y)$ 去除，就把变量分离了，使得

$$\frac{1}{h}\frac{d^2h}{dx^2} = -\frac{1}{\phi}\frac{d^2\phi}{dy^2}. \tag{2.5.16}$$

左边只是 x 的函数，而右边只是 y 的函数. 这二者必须等于一个分离常数. 是用 $-\lambda$ 还是 λ

呢？总有一个比较方便的．如果分离变量是负的(如前所述)，(2.5.16)意味着 $h(x)$ 是振荡的，而 $\phi(y)$ 由指数函数构成．这似乎令人怀疑，因为齐次边界条件(2.5.13—2.5.15)表明，与 y 有关的解满足两个齐次条件；$\phi(y)$ 必须在 $y=0$ 和 $y=H$ 处为零．这样就不能指望 y 的指数函数奏效．另一方面，如果分离常数是正的，(2.5.16)所给出的 $h(x)$ 由指数函数构成，而 $\phi(y)$ 是振荡的．这好像更有道理些，因此引入分离常数 λ(但不假设 $\lambda\geqslant 0$)：

$$\frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{1}{\phi}\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}y^2}=\lambda. \tag{2.5.17}$$

这就产生了两个常微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}x^2}=\lambda h$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}y^2}=-\lambda\phi.$$

与 x 有关的问题不是一个边值问题，因为它没有两个齐次边界条件：

73

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}x^2}=\lambda h} \tag{2.5.18}$$

$$\boxed{h(L)=0.} \tag{2.5.19}$$

然而，与 y 有关的问题却是一个边值问题，将用于确定特征值 λ(分离常数)：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}y^2}=-\lambda\phi} \tag{2.5.20}$$

$$\boxed{\phi(0)=0} \tag{2.5.21}$$

$$\boxed{\phi(H)=0.} \tag{2.5.22}$$

这个边值问题是以前出现过的问题，但此处的区间长度是 H．所有的特征值都是正的，$\lambda>0$．因为 $\phi(0)=0$，特征函数显然是正弦．此外，条件 $\phi(H)=0$ 给出

$$\boxed{\begin{aligned}\lambda&=\left(\frac{n\pi}{H}\right)^2\\ \phi(y)&=\sin\frac{n\pi y}{H}\end{aligned}}\qquad n=1,2,3,\cdots. \tag{2.5.23}$$

为了得到乘积解，必须求解满足(2.5.19)的方程(2.5.18)．由 $\lambda=(n\pi/H)^2$，

$$\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}x^2}=\left(\frac{n\pi}{H}\right)^2 h. \tag{2.5.24}$$

其通解是指数函数的线性组合，或双曲函数的线性组合．二者都可以用，但又都不太适合求解齐次边界条件 $h(L)=0$．如果注意到 $\cosh n\pi(x-L)/H$ 和 $\sinh n\pi(x-L)/H$ 都是(2.5.24)的线性无关解，就能够更快地得到解．其通解可以写为这两个函数的线性组合：

$$h(x)=a_1\cosh\frac{n\pi}{H}(x-L)+a_2\sinh\frac{n\pi}{H}(x-L), \tag{2.5.25}$$

虽然由 $h(L)=0$ 给出 $a_1=0$(因为 $\cosh 0=1$ 和 $\sinh 0=0$)是显然的．像原来所猜测的那样，

$$h(x)=a_2\sinh\frac{n\pi}{H}(x-L).\tag{2.5.26}$$

(2.5.25)之所以是解(除了它满足微分方程外)，是因为它只是我们较熟悉的解 $\cosh n\pi x/L$ 和 $\sinh n\pi x/L$ 的一个简单平移. 只有当微分方程不依平移发生变化时(称为不变的)，才允许平移微分方程的解. 既然(2.5.24)具有常系数，把 $x=L$ 看作原点(即，$x'=x-L$)并不影响微分方程，因为由链式法则，$\mathrm{d}^2h/\mathrm{d}x'^2=(n\pi/H)^2h$. 例如，$\cosh n\pi x'/H=\cosh n\pi(x-L)/H$ 是一个解. [74]

乘积解是

$$u_4(x,y)=A\sin\frac{n\pi y}{H}\sinh\frac{n\pi}{H}(x-L).\tag{2.5.27}$$

可以验证，拉普拉斯方程以及三个所要求的齐次条件都是被满足的. 有趣的是，一部分(y 部分)振荡，而另一部分(x 部分)不振荡. 这就是拉普拉斯方程的一般性质，既不限于这个几何特性(矩形)，也不限于那些边界条件.

我们希望利用这些乘积解去满足剩下的非齐次边界条件 $u_4(0,y)=g_1(y)$. 单个乘积解一般并不满足非齐次条件. 所以再次使用叠加原理. 如果(2.5.27)是一个解，则

$$\boxed{u_4(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi y}{H}\sinh\frac{n\pi}{H}(x-L)}\tag{2.5.28}$$

也是一个解. 在 $x=0$ 处进行计算就能由非齐次条件

$$g_1(y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi y}{H}\sinh\frac{n\pi}{H}(-L)$$

确定系数 A_n. 如果把 $A_n\sinh n\pi(-L)/H$ 作为上式的系数，则这就与已经简要地讨论过的正弦函数级数类似. 所以(利用 $\sin n\pi y/H$ 对 y 在 0 和 H 之间的正交性)，

$$A_n\sinh\frac{n\pi}{H}(-L)=\frac{2}{H}\int_0^H g_1(y)\sin\frac{n\pi y}{H}\mathrm{d}y.$$

由 $\sinh n\pi(-L)/H$ 不等于零，可以用它相除而最终得到系数的公式：

$$\boxed{A_n=\frac{2}{H\sinh n\pi(-L)/H}\int_0^H g_1(y)\sin\frac{n\pi y}{H}\mathrm{d}y.}\tag{2.5.29}$$

由(2.5.29)确定的系数公式(2.5.28)，只是给出解 $u_4(x,y)$. 而把四个这样的解相加就可以得到原本的 $u(x,y)$ 了. [75]

2.5.2 圆盘内的拉普拉斯方程

假设有一个半径为 a 的薄圆盘(具有恒定热性质且没有热源)，圆盘在边界上具有指定的温度，如图 2.5.2 所示. 如果边界上的温度与时间无关，就有理由确定平衡温度分布. 温度满足拉普拉斯方程，$\nabla^2u=0$. 这个问题的几何特性表明要采用极坐标，$u=u(r,\theta)$. 特别在圆周 $r=a$ 上，温度分布是 θ 的函数，$u(a,\theta)=f(\theta)$. 要求解的问题是

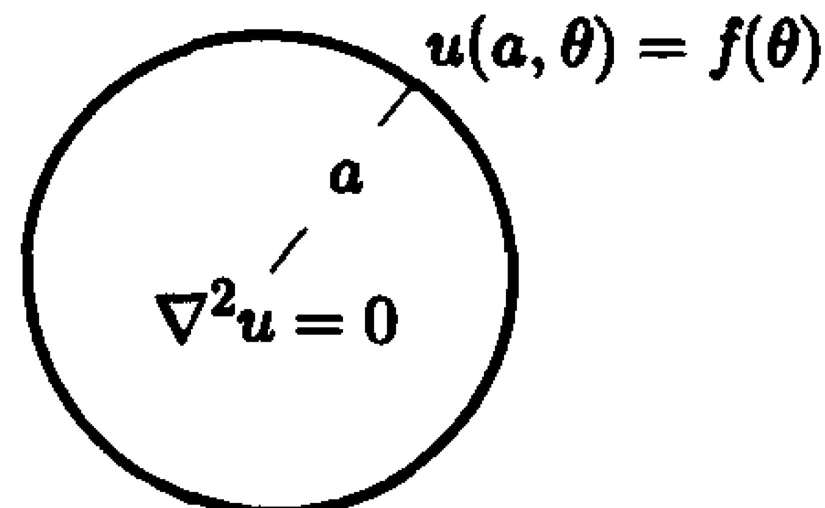


图 2.5.2 圆盘内的拉普拉斯方程

$$\text{PDE:}\ \boxed{\nabla^2u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=0}\tag{2.5.30}$$

$$\text{BC:} \boxed{u(a,\theta) = f(\theta).} \tag{2.5.31}$$

初看上去，由于没有附加齐次条件，好像不能使用分离变量．然而，经过对极坐标的引入进行的一些讨论，会说明分离变量法的用法．如果在矩形 $0 \leqslant x \leqslant L$，$0 \leqslant y \leqslant H$ 上，求解拉普拉斯方程(见 2.5.1 节)，则在变量定义范围的端点 $x=0$，L 和 $y=0$，H 处需要附加条件．有幸的是，这些端点和物理边界刚好重合．然而，对于极坐标，$0 \leqslant r \leqslant a$ 和 $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$(其中，对角 θ 的定义范围存在一定的自由度)．从数学上讲，在极坐标系的端点 $r=0$，a 和 $\theta=-\pi$，π 处需要附加条件．这里，只有 $r=a$ 对应着物理边界条件．所以，在 $r=0$ 和 $\theta= \pm \pi$ 处，需要有根据对物理问题的思考而启发出来的一些条件．极坐标在 $r=0$ 处是奇异的；由于物理上的原因，将指定这里的温度是有限的，或等价地说，是有界的：

$$\text{在原点有界} \quad \boxed{|u(0,\theta)| < \infty.} \tag{2.5.32}$$

由于数学原因，$\theta= \pm \pi$ 处需要附加条件．这与圆金属丝的情况是类似的．$\theta=-\pi$ 与 $\theta=\pi$ 对应着相同的点．虽然确实不存在边界，但这里的温度是连续的，并且 θ 方向的热流也是连续的，这就给出

76

$$\text{周期性} \quad \boxed{\begin{aligned} u(r,-\pi) &= u(r,\pi) \\ \frac{\partial u}{\partial \theta}(r,-\pi) &= \frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\pi), \end{aligned}} \tag{2.5.33}$$

就像两个区域在那里处于完全热接触中(见习题 1.3.2)．方程(2.5.33)称为周期性条件；它们等价于 $u(r,\ \theta)=u(r,\ \theta+2\pi)$．注意，附加条件(2.5.32)和(2.5.33)都是线性的和齐次的(容易验证 $u \equiv 0$ 满足这三个条件)．在这种形式中的数学问题与在矩形内的拉普拉斯方程显得有些类似．有四个条件．幸运的是，只有 $u(a,\ \theta)=f(\theta)$ 是非齐次的．因此，这个问题适合于使用分离变量法．

先寻找特殊的乘积解，

$$u(r,\theta) = \phi(\theta) G(r), \tag{2.5.34}$$

它满足偏微分方程(2.5.30)和三个齐次条件(2.5.32)和(2.5.33)．注意，(2.5.34)不满足非齐次边界条件(2.5.31)．把(2.5.34)代入周期性条件表明

$$\begin{aligned} \phi(-\pi) &= \phi(\pi) \\ \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta}(-\pi) &= \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta}(\pi); \end{aligned} \tag{2.5.35}$$

依赖于 θ 的部分也满足周期边界条件．由乘积形式将满足拉普拉斯方程

$$\frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}r}\right) \phi(\theta) + \frac{1}{r^2} G(r) \frac{\mathrm{d}^2 \phi}{\mathrm{d}\theta^2} = 0.$$

用 $G(r)\phi(\theta)$ 去除，变量没有被分离，因为 $1/r^2$ 仍与依赖于 θ 的项相乘．而用 $(1/r^2)G(r)\phi(\theta)$ 去除，就有

$$\frac{r}{G} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{1}{\phi} \frac{\mathrm{d}^2 \phi}{\mathrm{d}\theta^2} = \lambda. \tag{2.5.36}$$

引入分离常数 λ(而不是 $-\lambda$)，因为对 θ 有两个齐次条件(2.5.35)，可以预计在 θ 内振荡．方程(2.5.36)给出两个常微分方程．所以确定分离常数的边值问题是

77

$$\boxed{\begin{array}{c}\dfrac{d^2\phi}{d\theta^2}=-\lambda\phi\\ \hline \phi(-\pi)=\phi(\pi)\\ \dfrac{d\phi}{d\theta}(-\pi)=\dfrac{d\phi}{d\theta}(\pi).\end{array}}\tag{2.5.37}$$

特征值 λ 按通常的方式就确定了. 事实上，这是三个标准问题之一，与圆金属丝($L=\pi$)的问题相同. 因此，特征值是

$$\lambda=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2=n^2,\tag{2.5.38}$$

对应的特征函数有两个，即

$$\sin n\theta \quad 和 \quad \cos n\theta.\tag{2.5.39}$$

$n=0$ 的情况一定包括在内(只是一个常值特征函数).

而依赖于 r 的问题是

$$\frac{r}{G}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dG}{dr}\right)=\lambda=n^2,\tag{2.5.40}$$

其常见的形式为

$$r^2\frac{d^2G}{dr^2}+r\frac{dG}{dr}-n^2G=0.\tag{2.5.41}$$

这里，前面讨论过的在 $r=0$ 处的条件规定 $|u(0,\ \theta)|<\infty$. 对乘积解 $u(r,\ \theta)=\phi(\theta)G(r)$，可得到在原点处的条件是，$G(r)$在那里必须有界，

$$|G(0)|<\infty.\tag{2.5.42}$$

方程(2.5.41)是线性的和齐次的，但有变系数. 只有极少的变系数的二阶线性方程易于求解. 而方程(2.5.41)就是其中之一，这个方程有好几个不同的名称：等量纲方程、柯西方程，或者欧拉方程. 求解(2.5.41)最简单的方法是注意到：对于(2.5.41)中的线性微分算子，任何幂函数 $G=r^p$ 都再现它自己㊀. 将 $G=r^p$ 一代入(2.5.41)，就得到$[p(p-1)+p-n^2]r^p=0$. 一般有两个不同的解

$$p=\pm n,$$

[78]

除了 $n=0$ 时，只有一个 r^p 形式的无关解外. 对于 $n\neq0$，(2.5.41)的通解是

$$G=c_1r^n+c_2r^{-n}.\tag{2.5.43}$$

对于 $n=0$($n=0$ 很重要，因为在这个问题中，$\lambda=0$ 是一个特征值)，一个解是 $r^0=1$ 或任意常数. $n=0$ 的第二个解从(2.5.40)中得到是最容易的. 如果 $n=0$，$d/dr(r dG/dr)=0$. 通过积分，$r dG/dr$ 是常数，或等价地说，dG/dr 与 $1/r$ 成比例. 因而，第二个无关的解是 $\ln r$. 所以，对 $n=0$，(2.5.41)的通解是

$$G=\bar{c}_1+\bar{c}_2\ln r.\tag{2.5.44}$$

对方程(2.5.41)只附加了一个齐次条件，$|G(0)|<\infty$，所以，它不是一个特征值问题. 在我们前面所研究的问题中，有界性条件不会附加任何限制. 然而，这里的(2.5.43)或(2.5.44)

㊀ 对常系数线性微分算子，指数再现它自己.

表明，当 $r\to 0$ 时，解可能趋于 ∞. 所以，由于 $|G(0)|<\infty$，在(2.5.43)中，$c_2=0$；在(2.5.44)中，$\bar{c}_2=0$. 依赖于 r(在 $r=0$ 处有界)的解是

$$G(r) = c_1 r^n, \quad n \geqslant 0,$$

其中对 $n=0$，就简化为一个任意常数.

由分离变量法得到的满足三个齐次条件的乘积解是

$$r^n \cos n\theta (n \geqslant 0) \quad 和 \quad r^n \sin n\theta (n \geqslant 1).$$

注意，与在直角坐标系中的拉普拉斯方程一样，振荡只出现在一个变量(这里是 θ)中，而不出现在另一个变量(r)中. 由叠加原理，

$$\boxed{u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^n \sin n\theta,} \quad \begin{matrix} 0 \leqslant r < a \\ -\pi < \theta \leqslant \pi \end{matrix} \tag{2.5.45}$$

在圆内满足拉普拉斯方程. 为了满足非齐次条件 $u(a, \theta)=f(\theta)$，

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n a^n \sin n\theta, \quad -\pi < \theta \leqslant \pi. \tag{2.5.46}$$

所指定的温度是所有正弦和余弦(包括一个常数项，$n=0$)的一个线性组合. 如果设 $A_n a^n$ 为 $\cos n\theta$ 的系数，$B_n a^n$ 为 $\sin n\theta$ 的系数，则这正好是在2.4.2节中 $L=\pi$ 时所解答的问题. 利用正交性公式得到

79

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ (n \geqslant 1) \quad A_n a^n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta \\ B_n a^n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned} \tag{2.5.47}$$

由 $a^n \neq 0$，系数 A_n 和 B_n 可以由(2.5.47)唯一地解出.

由(2.5.47)给出系数的公式(2.5.45)确定了圆内的稳态温度分布. 这个解相对来说要复杂一些，常常需要做两个无穷级数的数值计算. 对该解的更多解释，参见第9章有关格林函数的讨论.

2.5.3 绕过圆柱体的流体流动(升力)

在某些假设下，由热流的热能守恒可以推导出拉普拉斯方程 $\nabla^2 u=0$. 在流体动力学中，由质量守恒和动量守恒也能够用下列方式推导出拉普拉斯方程：

$$\nabla^2 \psi = 0,$$

在习题中，证明了，流体的质量守恒与常值质量密度 ρ 的假定一起给出

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \text{ 在二维时} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{2.5.48}$$

其中速度具有 x 和 y 分量 $\boldsymbol{u}=(u, v)$. 经常要引入流函数 ψ，它自然满足(2.5.48)：

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad 和 \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{2.5.49}$$

与流体流动平行的流线($\psi=$常数)经常是画出来的. 可以证明，在某些情况下，流体是无旋的($\nabla \times \boldsymbol{u}=0$)，这使得流函数满足拉普拉斯方程

$$\boxed{\nabla^2\psi = 0.} \tag{2.5.50}$$

最简单的例子是 x 方向的常值流 $u=(U,\ 0)$，此时的流函数是 $\psi=Uy$，显然满足拉普拉斯方程.

作为设计飞机机翼的第一步，科学家们考虑了绕半径为 a 的圆柱体的流动. 至于更多的细节，建议感兴趣的读者参看 Acheson[1990]. 速度位势[⊖]一定满足拉普拉斯方程，在极坐标中，这个方程就是前面的(2.5.30). 将假定远离圆柱体的流动是均匀的，使得 ψ 对大 r 时的近似为 80

$$\psi \approx Uy = Ur\sin\theta, \tag{2.5.51}$$

下面要的是极坐标. 边界条件是，流体流动的径向分量在 $r=a$ 处一定为零. 流体流动一定要与边界平行，所以可以假设

$$\psi(a,\theta) = 0. \tag{2.5.52}$$

由分离变量，包括由(2.5.44)给出的 $n=0$ 的特征函数，

$$\psi(r,\theta) = c_2 + c_1\ln r + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n r^n + B_n r^{-n})\sin n\theta, \tag{2.5.53}$$

其中可以包括 $\cos n\theta$ 项(但系数为零). 通过应用在 $r=a$ 处的边界条件，可见

$$c_2 + c_1\ln a = 0$$

$$A_n a^n + B_n a^{-n} = 0,$$

所以

$$\psi(r,\theta) = c_1\ln\frac{r}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}A_n\left(r^n - \frac{a^{2n}}{r^n}\right)\sin n\theta. \tag{2.5.54}$$

为使流体速度在无穷远处趋于一个常数，并且，对于大 r，$\psi\approx Uy=Ur\sin\theta$，有对于 $n\geqslant 2$，$A_n=0$ 和 $A_1=U$. 所以

$$\boxed{\psi(r,\theta) = c_1\ln\frac{r}{a} + U\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta.} \tag{2.5.55}$$

一般可以证明，在极坐标系中，流体速度可以由流函数得到：$u_r=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}$，$u_\theta=-\dfrac{\partial\psi}{\partial r}$. 所以，流体速度的 θ 分量是 $u_\theta=-\dfrac{c_1}{r}-U\left(1+\dfrac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta$. 环流量被定义为 $\int_0^{2\pi}u_\theta r\mathrm{d}\theta=-2\pi c_1$. 对无穷远处给定的速度，在图 2.5.3 中，给出了依赖于绕圆柱体环流量不同流动的图示.

流体的压力在与圆柱体外法向相反的方向$(x/a,\ y/a)=(\cos\theta,\ \sin\theta)$上施加了一个力. 由圆柱体上的流动施加的曳力($x$ 方向)和升力(y 方向)(z 方向的每一单位长度)是

$$F = -\int_0^{2\pi}p(\cos\theta,\sin\theta)a\mathrm{d}\theta. \tag{2.5.56}$$

对如此的定常流动，压力由伯努利条件确定

$$p + \frac{1}{2}\rho|u|^2 = \text{constant}. \tag{2.5.57}$$

81

所以，在速度较快的地方，压力较低. 如果环流量是顺时针环绕圆柱体的(负环流量)，则凭直觉(可以证明)，圆柱体上面的速度要大于其下面的速度，而圆柱体上面的压力较小，于是

⊖ 也就是流函数 ψ. ——译者注

将生成升力(y方向上的正力). 在圆柱体表面上 $u_r=0$, 则有 $|u|^2=u_\theta^2$. 可以证明, x方向上的力(曳力)是零, 而y分量, 也就是升力为

$$F_y = \frac{1}{2}\rho\int_0^{2\pi}\left[-\frac{c_1}{r} - U\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta\right]^2\sin\theta a\mathrm{d}\theta \tag{2.5.58}$$

(因为与常数有关的积分变为零)和

$$F_y = \rho\frac{c_1}{a}U2\int_0^{2\pi}\sin^2\theta a\mathrm{d}\theta = \rho 2\pi c_1 U, \tag{2.5.59}$$

这一公式的简化是利用正弦函数的奇函数性质, $\int_0^{2\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta = 0$. 如果环流量是零, 则升力变为零. 负环流量(正 c_1)由流体在圆柱体上产生一个升力.

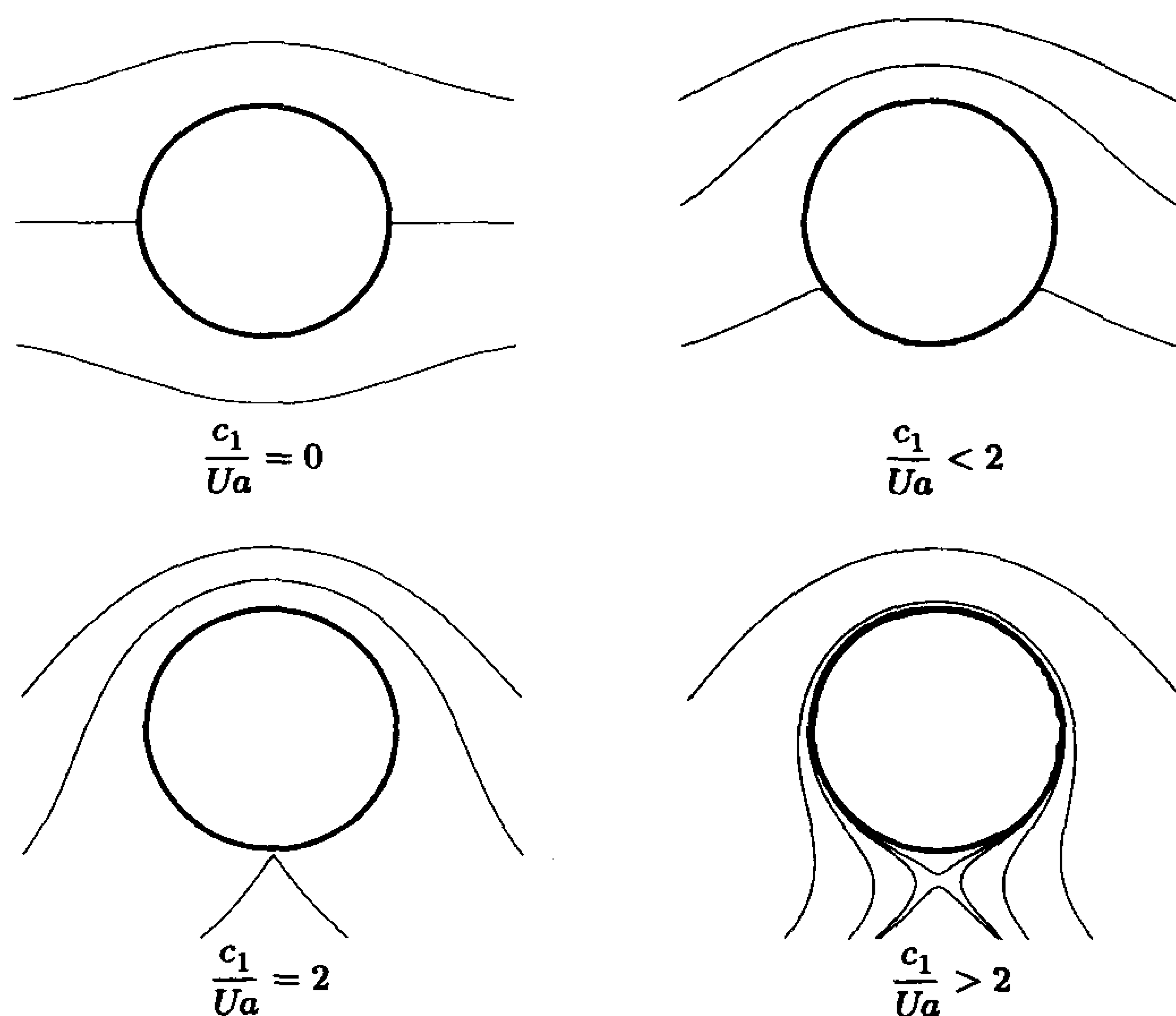


图 2.5.3 绕圆柱体的流动和升力 $=2\pi\rho c_1 U$

在现实生活中, 曳力更为复杂. 由于流体的粘性性质, 存在边界层. 在边界层上, 压力是连续的, 所以前面的分析常常还是有效的. 然而, 当边界层与圆柱分离时, 事情就变得更复杂了, 此时, 出现了一个更重要的曳力(它在这种初等分析中被忽略了). 如果升力大于飞机的重量, 则飞机就飞起来. 然而, 要想飞得快, 就需要一个强有力的发动机在x方向上施加一个克服曳力的力.

82

2.5.4 拉普拉斯方程的定性性质

有时, 分离变量法不太适用. 如果想要定量信息, 则数值法(见第13章)可能是必需的. 本小节将简要地描述一些可由拉普拉斯方程推导出的定性性质.

均值定理. 拉普拉斯方程在圆内的求解公式, 是在 2.5.2 节中由分离变量法得到的, 这个公式提供了一个重要结果. 如果计算在原点 $r=0$ 处的温度, 由(2.5.45)就会发现

$$u(0,\theta) = a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,\mathrm{d}\theta;$$

这个温度等于圆周上温度的平均值．这称为拉普拉斯方程的均值性质．这个性质一般在下面的特定意义下成立．假设想要在区域 R 内求解拉普拉斯方程(见图2.5.4)．考虑 R 内点 P 和半径为 r_0 的圆(使得该圆在区域 R 内)．在原点为 P 的极坐标系中，设在圆周上的温度为 $f(\theta)$．前面的分析仍然成立，因此，在任一点的温度是以该点为中心，半径为 r_0 的圆周上(含在 R 内[⊖])温度的均值．

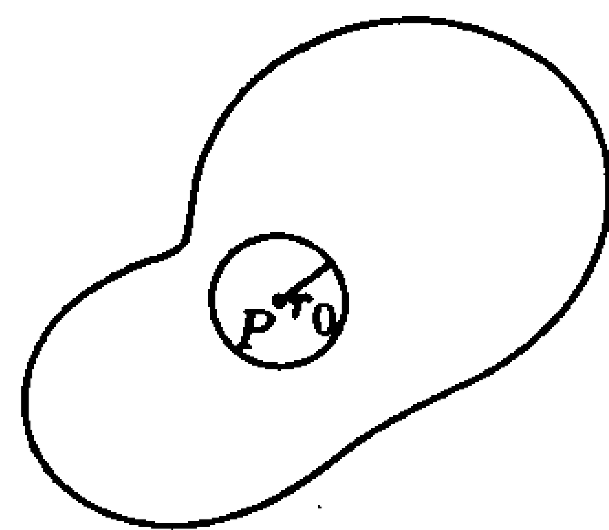


图2.5.4 任意区域内的圆

最大值原理．可以利用下面的事实证明拉普拉斯方程的最大值原理：在假设没有热源的情况下，稳态下的温度不能在内部达到其最大值(除非温度处处是一个常值)．证明是用反证法．假设最大值在点 P 处达到，如图2.5.4所示．然而，这个值应该是在任意圆周上所有点值的平均(考虑所画的圆)．在点 P 处的温度不可能更大了．这与原假设矛盾，因而这个假设不能成立．最大值原理不应该令我们吃惊．如果温度在点 P 处是最大的，则热能的浓度会随着时间扩散，在稳态时，最大值不可能在内部．设 $\psi=-u$，还可以证明，温度也不可能在内部达到其最小值．所以，在稳态时，最大值和最小值温度都出现在边界上．

83

适定性和唯一性．最大值原理是进一步分析偏微分方程的一个非常重要的工具，特别是在建立定性性质方面(例如，参见 Protter and Weinberger[1967])．一个问题称作是适定的，如果存在一个连续依赖非齐次已知条件的唯一解(即如果变化微小，则解变化也不大)．这对物理问题来讲是一个重要的概念．因为如果对已知条件的微小变化就引起解的巨大变化，则，为了使解可靠，每个物理测量都必须要是精确的了．幸运的是，大多数标准偏微分方程的问题都是适定的．例如，最大值原理可用于证明拉普拉斯方程 $\nabla^2 u=0$ 和指定 u 在边界上的值 $u=f(x)$ 所组成的问题是适定的．

假设对边界值作个小变化，使得

$$\nabla^2 v = 0, \quad \text{在边界上满足 } v = g(x)$$

这里 $g(x)$ 在边界上几乎处处与 $f(x)$ 相同．考虑这两个解的差 $w=u-v$．由线性性质

$$\nabla^2 w = 0, \quad \text{在边界上满足 } w = f(x) - g(x),$$

拉普拉斯方程的最大值(和最小值)原理给出最大值和最小值都在边界上达到．所以，在任何内部的点处，

$$\min(f(x) - g(x)) \leqslant w \leqslant \max(f(x) - g(x)). \tag{2.5.60}$$

因为 $g(x)$ 与 $f(x)$ 几乎相同，所以 w 很小，因此解 v 几乎与 u 相同；如果边界值只做微小变化，则拉普拉斯方程的解也做微小变化．

还可以证明拉普拉斯方程的解是唯一的．用反证法证明这点．假设存在两个解，像前面的 u 和 v，满足相同的边界条件[即让 $(f(x)=g(x))$]．如果再次考虑差 $(w=u-v)$，则最大值和最小值原理给出[见(2.5.60)]，在区域内

$$0 \leqslant w \leqslant 0.$$

⊖ 由上下文，读者可以看出是要求整个圆盘都在区域 R 内．——译者注

得到结论，在区域内部 $w=0$ 处处成立，所以，$u=v$；这就证明了：如果解存在，则它一定是唯一的. 这些性质(唯一性和依赖于数据的连续性)表明，在边界上指定了 u 值的拉普拉斯方程是一个适定问题.

84

可解性条件. 如果在边界上，指定的是热流 $-K_0\nabla u\cdot\hat{n}$，而不是温度，则拉普拉斯方程可能没有解[对一维例子，参见习题 1.4.7(b)]. 为说明这点，对 $\nabla^2u=0$ 在整个二维区域上积分

$$0=\iint\nabla^2u\,dx\,dy=\iint\nabla\cdot(\nabla u)\,dx\,dy.$$

由(二维)散度定理，得到(参见习题 1.5.8)

$$0=\oint\nabla u\cdot\hat{n}\,ds. \tag{2.5.61}$$

因为 $\nabla u\cdot\hat{n}$ 与通过边界的热流成比例，(2.5.61)给出通过边界的净热流一定为零，以使稳态存在. 这在物理上是显然的，否则在内部就会有热能(随时间)的变化，这违背了稳态的假设. 方程(2.5.61)称为拉普拉斯方程的可解性条件或相容性条件.

习题 2.5

2.5.1 在矩形 $0\leqslant x\leqslant L$，$0\leqslant y\leqslant H$ 内求解带有下列边界条件的拉普拉斯方程：

*(a) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,y)=0$，　$\frac{\partial u}{\partial x}(L,y)=0$，　$u(x,0)=0$，　$u(x,H)=f(x)$

(b) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,y)=g(y)$，　$\frac{\partial u}{\partial x}(L,y)=0$，　$u(x,0)=0$，　$u(x,H)=0$

*(c) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,y)=0$，　$u(L,y)=g(y)$，　$u(x,0)=0$，　$u(x,H)=0$

(d) $u(0,y)=g(y)$，　$u(L,y)=0$，　$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=0$，　$u(x,H)=0$

*(e) $u(0,y)=0$，　$u(L,y)=0$，　$u(x,0)-\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=0$，　$u(x,H)=f(x)$

(f) $u(0,y)=f(y)$，　$u(L,y)=0$，　$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=0$，　$\frac{\partial u}{\partial y}(x,H)=0$

(g) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,y)=0$，　$\frac{\partial u}{\partial x}(L,y)=0$，　$u(x,0)=\begin{cases}0 & x>L/2\\ 1 & x<L/2\end{cases}$，　$\frac{\partial u}{\partial y}(x,H)=0$

2.5.2 设 $u(x,y)$ 在矩形 $0<x<L$，$0<y<H$ 内部满足拉普拉斯方程和满足边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y)=0\quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,y)=0\quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,H)=f(x).$$

*(a)假设这个问题有一个解，不求解这个问题，请简要地解释一下这个问题的物理条件.

85

(b)用分离变量法求解这个问题. 试说明该方法只在(a)的条件下适用.

(c)[(b)部分]解含有一个任意常数. 请由不定常热传导方程(1.5.11)确定它，该方程满足初始条件

$$u(x,y,0)=g(x,y).$$

*2.5.3 在圆盘外($r\geqslant a$)求解拉普拉斯方程，边界条件为

(a) $u(a,\theta)=\ln2+4\cos3\theta$　　(b) $u(a,\theta)=f(\theta)$

可以假设当 $r\to\infty$ 时，$u(r,\theta)$ 仍是有限的.

*2.5.4 对一个圆盘($r\leqslant a$)内的拉普拉斯方程，使用(2.5.45)和(2.5.47)，证明

$$u(r,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\bar{\theta})\left[-\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{n}\cos n(\theta-\bar{\theta})\right]\mathrm{d}\bar{\theta}.$$

利用 $\cos z=\mathrm{Re}[e^{iz}]$，对所得的几何级数求和，就得到泊松积分公式.

2.5.5 在半径为1的四分之一圆($0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$, $0\leqslant r\leqslant 1$)内求解拉普拉斯方程，边界条件为

*(a) $\frac{\partial u}{\partial\theta}(r,0)=0$, $u\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=0$, $u(1,\theta)=f(\theta)$

(b) $\frac{\partial u}{\partial\theta}(r,0)=0$, $\frac{\partial u}{\partial\theta}\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=0$, $u(1,\theta)=f(\theta)$

*(c) $u(r,0)=0$, $u\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=0$, $\frac{\partial u}{\partial r}(1,\theta)=f(\theta)$

(d) $\frac{\partial u}{\partial\theta}(r,0)=0$, $\frac{\partial u}{\partial\theta}\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=0$, $\frac{\partial u}{\partial r}(1,\theta)=g(\theta)$

证明只有当 $\int_0^{\pi/2}g(\theta)\,\mathrm{d}\theta=0$ 时，[(d)部分]解才存在. 从物理上解释这个条件.

2.5.6 在半径为 a 的半圆($0<r<a$, $0<\theta<\pi$)内求解拉普拉斯方程，边界条件为

*(a)在直径上 $u=0$，且 $u(a,\theta)=g(\theta)$

(b)直径是绝热的，且 $u(a,\theta)=g(\theta)$

2.5.7 在半径为 a、顶角为60°的扇形区域内求解拉普拉斯方程，边界条件为

(a) $u(r,0)=0$, $u\left(r,\frac{\pi}{3}\right)=0$, $u(a,\theta)=f(\theta)$

*(b) $\frac{\partial u}{\partial\theta}(r,0)=0$, $\frac{\partial u}{\partial\theta}\left(r,\frac{\pi}{3}\right)=0$, $u(a,\theta)=f(\theta)$

86

2.5.8 在圆环($a<r<b$)内求解拉普拉斯方程，边界条件为

*(a) $u(a,\theta)=f(\theta)$, $u(b,\theta)=g(\theta)$

(b) $\frac{\partial u}{\partial r}(a,\theta)=0$, $u(b,\theta)=g(\theta)$

(c) $\frac{\partial u}{\partial r}(a,\theta)=f(\theta)$, $\frac{\partial u}{\partial r}(b,\theta)=g(\theta)$

如果有可解性条件，请陈述之，并从物理上解释它.

*2.5.9 在圆环的90°部分($a<r<b$, $0<\theta<\pi/2$)内求解拉普拉斯方程，边界条件为

(a) $u(r,0)=0$, $u(r,\pi/2)=0$, $u(a,\theta)=0$, $u(b,\theta)=f(\theta)$

(b) $u(r,0)=0$, $u(r,\pi/2)=f(r)$, $u(a,\theta)=0$, $u(b,\theta)=0$

2.5.10 利用拉普拉斯方程的最大值原理，证明在边界上满足 $u=f(x)$ 的泊松方程 $\nabla^2u=g(x)$ 的解是唯一的.

2.5.11 做习题1.5.8.

2.5.12 (a)利用散度定理，确定 $\iint u\,\nabla^2u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 的另一个表达式.

(b)利用(a)，证明拉普拉斯方程 $\nabla^2u=0$(在边界上给定 u)的解是唯一的.

(c)如果在边界上，$\nabla u\cdot\hat{n}=0$，给出类似(b)的结论.

(d)如果在边界上，$\nabla u\cdot\hat{n}+hu=0$，给出类似(b)的结论. 并证明牛顿冷却定律对应的是 $h<0$.

2.5.13 证明满足拉普拉斯方程的温度在内部不能达到其最小值.

2.5.14 证明满足 $u(0,t)=u(L,t)=0$ 和 $u(x,0)=f(x)$ 的"后向"热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-k\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$$

不是适定的. [提示：证明如果已知条件变化了任意小的量，例如，

$$f(x) \to f(x) + \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{L},$$

对大 n，则解 $u(x, t)$以很大的量变化.]

[87] 2.5.15 在半无限带($0<x<\infty$，$0<y<H$)内求解拉普拉斯方程，边界条件为

(a) $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0)=0$， $\frac{\partial u}{\partial y}(x, H)=0$， $u(0, y)=f(y)$

(b) $u(x, 0)=0$， $u(x, H)=0$， $u(0, y)=f(y)$

(c) $u(x, 0)=0$， $u(x, H)=0$， $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y)=f(y)$

(d) $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0)=0$， $\frac{\partial u}{\partial y}(x, H)=0$， $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y)=f(y)$

证明只有当 $\int_0^H f(y)\,dy = 0$ 时，解[(d)部分]才存在.

2.5.16 考虑在一个矩形 $0\leqslant x\leqslant L$，$0\leqslant y\leqslant H$ 内的拉普拉斯方程，其边界条件为

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,y) = g(y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,H) = f(x).$$

(a)可解性条件及其物理解释是什么?

(b)证明：如果$f(x)$和$g(y)$是常数[在(a)的条件下]，则 $u(x, y)=A(x^2-y^2)$是解.

(c)在(a)的条件下，求出一般情况[非常数$f(x)$和$g(y)$]下的解. [提示：利用(b)和$f(x)=f_{av}+[f(x)-f_{av}]$，其中，$f_{av}=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$.]

2.5.17 由质量守恒，证明：质量密度$\rho(x, t)$满足$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho u)=0$.

2.5.18 如果质量密度是常数，利用习题2.5.17的结果，证明$\nabla\cdot u=0$.

2.5.19 证明流线与流体速度平行.

2.5.20 证明：总存在一个流函数，满足$\nabla\times u=0$.

2.5.21 由 $u=\frac{\partial \psi}{\partial y}$和 $v=-\frac{\partial \psi}{\partial x}$，推导出 $u_r=\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$，$u_\theta=-\frac{\partial \psi}{\partial r}$.

2.5.22 证明：对均匀流过一个圆柱体的含有环流量的流动，曳力是零.

2.5.23 考虑圆柱体的速度 u_θ. 最大值和最小值出现在哪里?

2.5.24 考虑圆柱体的速度 u_θ. 如果环流量是负的，证明在圆柱体上面的速度大于其下面的速度.

2.5.25 停滞点是使得 $u=0$ 的点. 对环流量的哪些值，圆柱体上存在停滞点?

2.5.26 对 θ 的哪些值，在圆柱体外有 $u_r=0$? 对这些 θ，在何处(r取哪些值)$u_\theta=0$还成立?

[88] 2.5.27 证明：$\psi=\alpha\frac{\sin\theta}{r}$满足拉普拉斯方程. 证明流线是圆，并作出这些流线的图.

第3章 傅里叶级数

3.1 引言

用分离变量法求解偏微分方程时，要想满足关键性条件[例如，初值条件 $u(x, 0)=f(x)$]，一定要 $f(x)$ 能够等于给定边值问题特征函数的无穷线性组合. 我们已经研究了三种特殊情况. 一种产生了含有正弦函数的级数，一种产生了只含有余弦的级数(包括常数项)，第三种产生了包括所有这些项的级数.

下面开始研究既有正弦又有余弦的级数，将要证明其他级数只是这个一般级数的特例. 对在区间 $-L \leqslant x \leqslant L$ 上的周期边界条件问题，要问下列无穷级数(叫做傅里叶级数)是否有意义：

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}. \tag{3.1.1}$$

这个无穷级数收敛吗？它收敛于 $f(x)$ 吗？所得的无穷级数真的是偏微分方程的解吗(并且还满足所有其他的附加条件吗)？数学家说，这些问题没有一个有简单的答案. 尽管如此，傅里叶级数通常非常有效(尤其当它们源自物理问题时). 19 世纪初期，傅里叶在他有关热流的名著中开发出了这类级数.

所产生的第一个困难是(3.1.1)并非对所有函数 $f(x)$ 都成立. 不过，(3.1.1)对有些种类的函数成立，而对其他函数只需要做一些小的修改. 为了易于沟通各种不同概念，这里只讨论分段光滑函数 $f(x)$. 一个函数 $f(x)$(在某个区间上)是分段光滑的，如果该区间可以被分成段(或部分)，使得每段内的函数 $f(x)$ 是连续的[⊖]，并且其导数 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ 也是连续的. 函数 $f(x)$ 可以不是连续的，但其允许的间断类型只能有有限多个跳跃间断点. 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有跳跃间断，如果左极限 $[f(x_0^-)]$ 和右极限 $[f(x_0^+)]$ 都存在(且不相等)，如图 3.1.1 所示. 图 3.1.2 中所示的是分段光滑函数例子，$f(x)$ 在 $x=x_1$ 处和 $x=x_3$ 处有跳跃间断. 另外，$f(x)$ 对 $x_1 \leqslant x \leqslant x_3$ 是连续的，但 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ 对 $x_1 \leqslant x \leqslant x_3$ 不是连续的. 然而 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ 对 $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ 和 $x_2 \leqslant x \leqslant x_3$ 却是连续的. 可以将区间分成几段，使得 $f(x)$ 和 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ 在每个区间内都是连续的. 现在，分成四段，$x \leqslant x_1$，$x_1 \leqslant x \leqslant x_2$，$x_2 \leqslant x \leqslant x_3$ 和 $x \geqslant x_3$. 几乎所有实际中出现的函数(和本书讨论的大多数函数)都是分段光滑的. 下面简要地给出一个非分段光滑函数的例子. 考虑 $f(x)=x^{1/3}$，图像如图 3.1.3. 因为在 $x=0$ 处，$\mathrm{d}f/\mathrm{d}x = 1/3x^{-2/3}$ 是 ∞，它在含有 $x=0$ 的任何区间上都不是分段光滑的. 换句话说，含有 $x=0$ 的任何区域都不能被分成几段，使得 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ 在每一段内都是连续的.

⊖ 这里不给有关连续函数的定义. 不过，一个有用的事实是：如果一个函数在某点处趋于 ∞，则它在任何含有该点的区间上都是间断的.

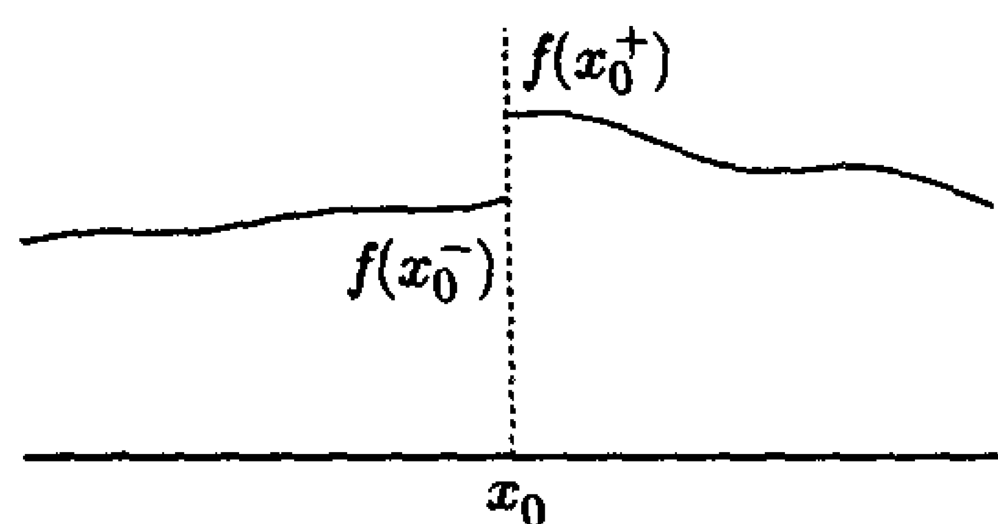


图 3.1.1 在 $x=x_0$ 处跳跃间断

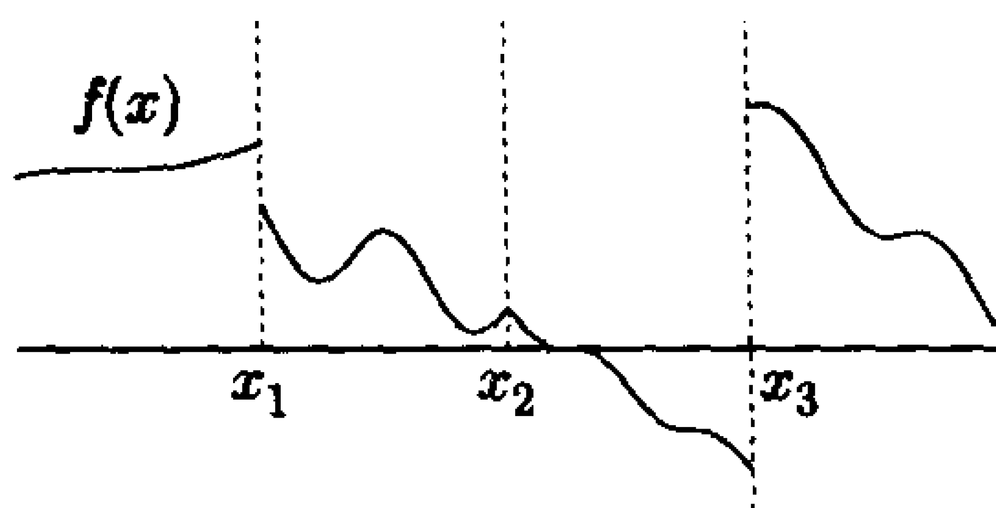


图 3.1.2 分段光滑函数的例子

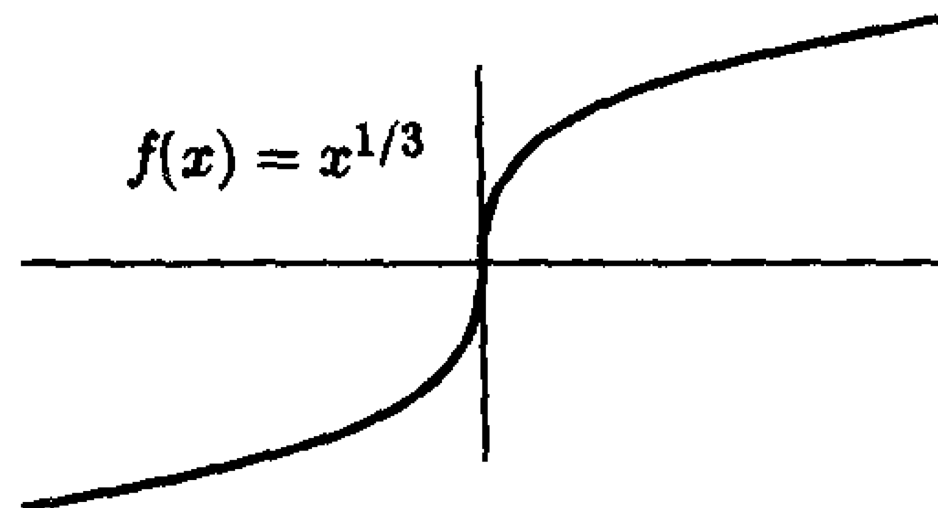


图 3.1.3 非分段光滑函数的例子

傅里叶级数中的每个函数都是周期为 $2L$ 的周期函数．所以，$f(x)$在区间 $-L\leqslant x\leqslant L$ 上的傅里叶级数是周期为 $2L$ 的周期函数．函数$f(x)$不必是周期的．但需要$f(x)$的周期延拓．为了画出$f(x)$周期延拓的示意草图，只需对 $-L\leqslant x\leqslant L$ 画出 $f(x)$的草图，然后，以周期 $2L$ 重复平移原本在 $-L\leqslant x\leqslant L$ 的草图．例如，在图 3.1.4 中，作 $f(x)=3x/2$ 的周期延拓草图[对 $|x|>L$，用虚线画函数 $f(x)=3x/2$ 的草图]．注意$f(x)$与其周期延拓之间的差别．

90

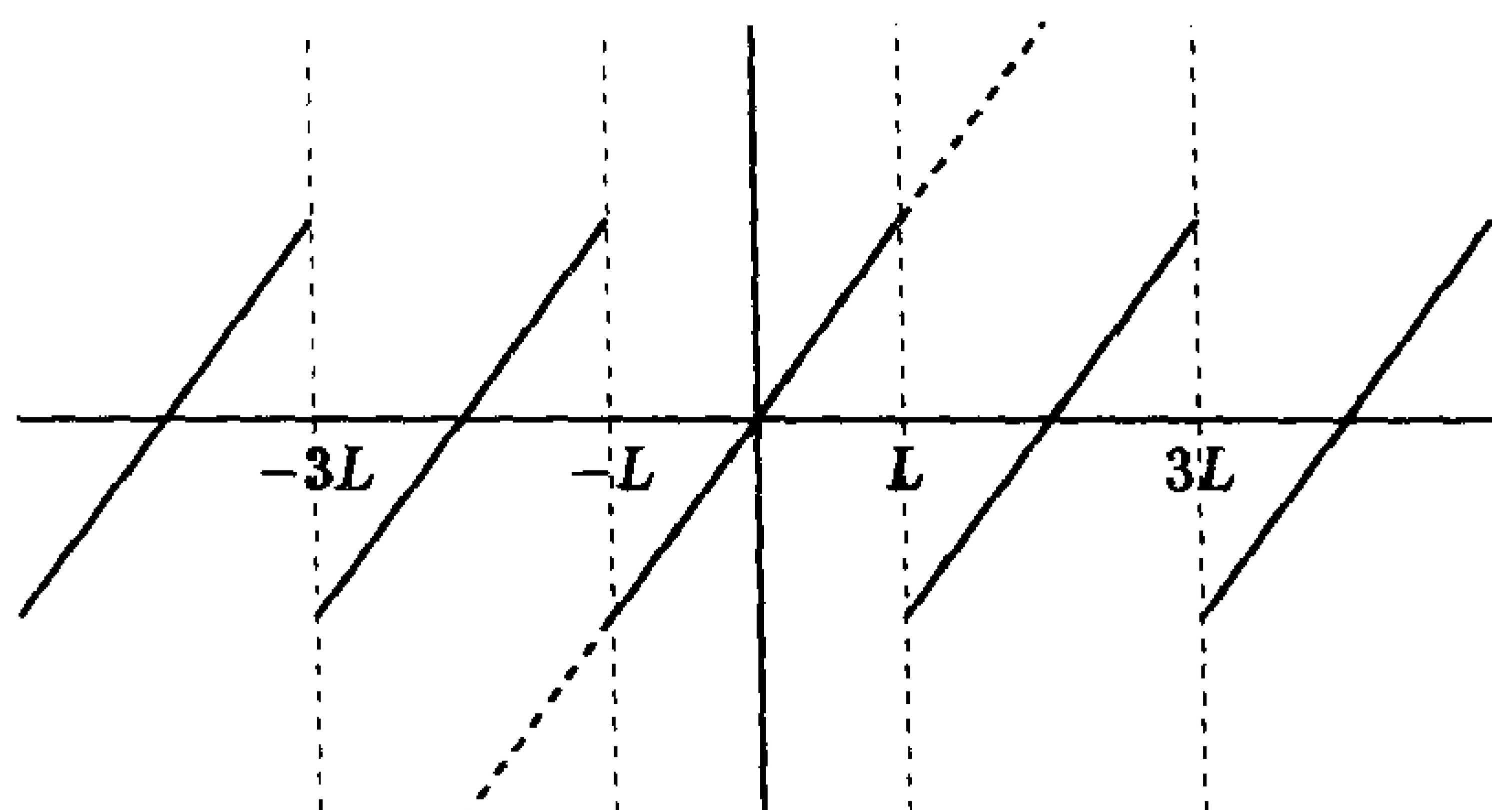


图 3.1.4 $f(x)=3x/2$ 的周期延拓

3.2 收敛定理

傅里叶系数和傅里叶级数的定义． 必须小心区分区间 $-L\leqslant x\leqslant L$ 上函数 $f(x)$和它的傅里叶级数：

$$\text{傅里叶级数}=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{3.2.1}$$

这个无穷级数甚至可能不是收敛的，即使收敛，可能也不收敛于$f(x)$．不过，如果级数收敛，第 2 章中利用正交性积分(2.3.32)确定了傅里叶系数 a_0，a_n，b_n．下面就用那些结果作为傅里叶系数的定义：

$$\boxed{\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)\,\mathrm{d}x\\a_n&=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x\\b_n&=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x.\end{aligned}} \tag{3.2.2}$$

91

区间 $-L\leqslant x\leqslant L$ 上函数 $f(x)$的傅里叶级数定义为无穷级数(3.2.1)，其傅里叶系数由(3.2.2)给

出. 显而易见，要想傅里叶级数存在，除非它的系数都存在，比如a_0存在$\left[\text{即}\left|\int_{-L}^{L}f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\infty\right]$. 这样就可以排除掉某些函数. 例如，不考虑$f(x)=l/x^2$的傅里叶级数.

即使在$\int_{-L}^{L}f(x)\,\mathrm{d}x$存在的情况下，这个无穷级数也可能不收敛；更有甚者，如果它收敛，也可能不收敛于$f(x)$. 为此使用下面的记号：

$$\boxed{f(x)\sim a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L},}\tag{3.2.3}$$

其中，~ 表示$f(x)$位于左边，$f(x)$(在区间$-L\leqslant x\leqslant L$上)的傅里叶级数位于右边(即使该级数发散)，但这两个函数可能完全不同. 符号 ~ 被读作"(在给定的区间上)有傅里叶级数."

傅里叶级数收敛定理. 先把傅里叶级数的某些性质概述为一个定理：

> 如果$f(x)$在区间$-L\leqslant x\leqslant L$上是分段光滑的，则$f(x)$的傅里叶级数收敛.
> 1. 在其周期延拓的连续点，收敛于$f(x)$的周期延拓；
> 2. 在其周期延拓的跳跃间断点，收敛于周期延拓左右极限的极限平均值：
>
> $$\frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)].$$

这个结果称作傅里叶定理. 在参考书目的很多书中都有这个定理的证明.

从数学上讲，如果$f(x)$是分段光滑的，则对$-L<x<L$(除去端点)，

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L},\tag{3.2.4}$$

其中傅里叶系数由(3.2.2)给出. 在$f(x)$连续的点，$f(x+)=f(x-)$，此时，对$-L<x<L$，(3.2.4)也就是

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

92

其实傅里叶级数在$-L$和L之间的连续点收敛于$f(x)$. 在端点，$x=L$或$x=-L$，这个级数收敛于周期延拓两个值的平均值. 在$-L\leqslant x\leqslant L$范围之外，傅里叶级数收敛的值不难由傅里叶级数的周期性(周期为$2L$)确定.

作傅里叶级数的草图. 现在，可以应用傅里叶定理了. 画$f(x)$(在区间$-L\leqslant x\leqslant L$上)的傅里叶级数草图的步骤如下：

> 1. 画$f(x)$的草图(最好只对$-L\leqslant x\leqslant L$画).
> 2. 画$f(x)$周期延拓的草图.

根据傅里叶定理，傅里叶级数收敛(这里收敛的意思是"相等")于周期延拓，其中周期延拓是(几乎处处)连续的. 不过，在周期延拓的跳跃间断点，傅里叶级数收敛于左右极限的平均值. 所以，第三步：

> 3. 在周期延拓的任意跳跃间断点的两个极限值的平均值处，标记"×".

例. 考虑

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<\dfrac{L}{2}\\ 1 & x>\dfrac{L}{2}.\end{cases} \tag{3.2.5}$$

要确定$f(x)$在$-L\leqslant x\leqslant L$上的傅里叶级数. 先在图3.2.1中画出$f(x)$对所有x的草图(虽然只要画出在$-L\leqslant x\leqslant L$上的草图). 由$f(x)$是分段光滑的, 就可以应用傅里叶定理. 在图3.2.2中画出了$f(x)$周期延拓的草图. 经常至少要画三个全周期($-3L\leqslant x\leqslant 3L$)的草图才可以理解得更清楚, 即便在对偏微分方程的应用中, 只需要区间$-L\leqslant x\leqslant L$上的部分. $f(x)$的傅里叶级数等于$f(x)$的周期延拓, 只要周期延拓是连续的(即除了跳跃间断点外的所有点, 跳跃间断点是$x=L/2$, L, $L/2+2L$, $-L$, $L/2-2L$, 等等). 根据傅里叶定理, 在这些跳跃间断点处, $f(x)$的傅里叶级数一定收敛于平均值. 应该把这些点标记出来, 多半用×标记, 如图3.2.2所示. 93 在$x=L/2$和$x=L$(同样在$x=L/2\pm 2nL$和$x=L\pm 2nL$)处, 傅里叶级数收敛于平均值$1/2$. 总之, 对这个例子,

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & x=-L\\ 0 & -L<x<L/2\\ \dfrac{1}{2} & x=L/2\\ 1 & L/2<x<L\\ \dfrac{1}{2} & x=L.\end{cases}$$

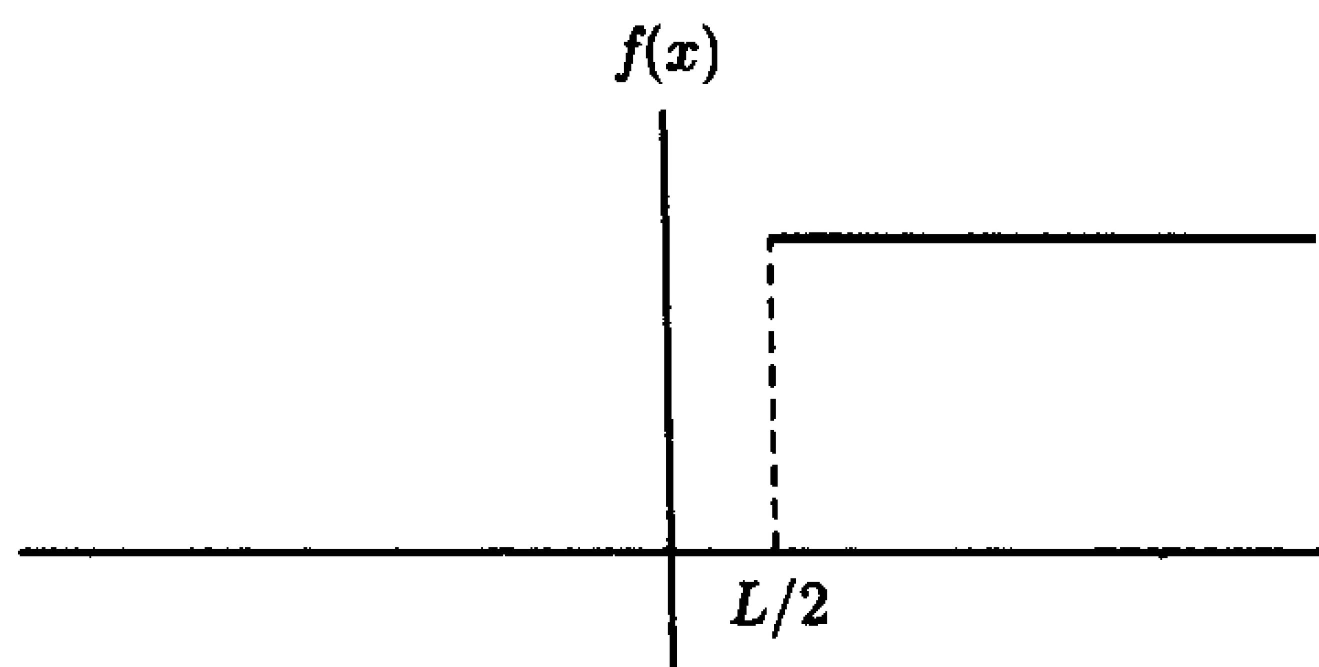


图3.2.1 $f(x)$的草图

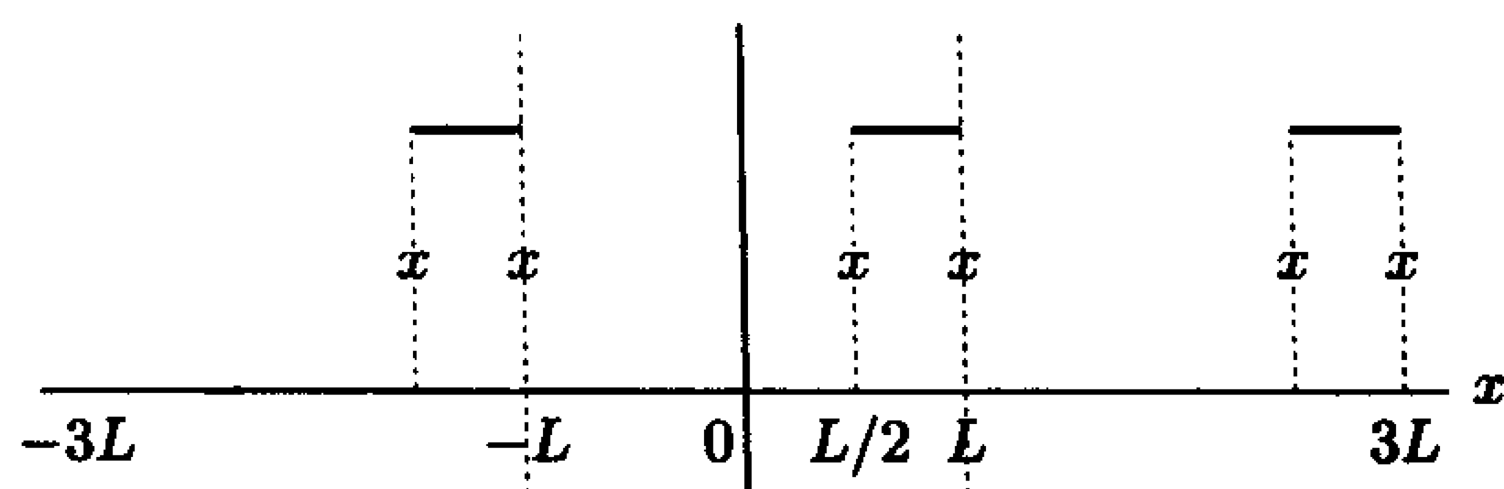


图3.2.2 $f(x)$的傅里叶级数

傅里叶级数可以收敛于相当奇怪的函数, 不过, 它们与原始函数差别不大.

傅里叶系数. 对一个给定的$f(x)$, 要画出$f(x)$的傅里叶级数草图, 并不需要计算其傅里叶系数. 然而, 知道如何计算由(3.2.2)给出的傅里叶系数却是重要的. 傅里叶系数的计算可能包含许多代数技巧. 有时, 它是分部积分法的练习. 常常可以通过适当地使用积分表或计算机代数系统来简化计算. 无论如何, 总可以使用计算机数值近似这些系数. 虽然(3.2.5)式定义的$f(x)$是一个非常简单的例子, 但它可以说明一些要点. 由(3.2.2), 系数是

94

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2L}\int_{L/2}^{L}\mathrm{d}x=\frac{1}{4} \tag{3.2.6}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x = \frac{1}{L}\int_{L/2}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}\bigg|_{L/2}^{L}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left(\sin n\pi - \sin\frac{n\pi}{2}\right) \tag{3.2.7}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x = \frac{1}{L}\int_{L/2}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x = \frac{-1}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\bigg|_{L/2}^{L}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi\right). \tag{3.2.8}$$

这里省略了由 $\sin n\pi = 0$，$\cos n\pi = (-1)^n$ 等可做的简化.

习题 3.2

3.2.1 对下列函数，画出 $f(x)$（在区间 $-L \leqslant x \leqslant L$ 上）的傅里叶级数的草图．把 $f(x)$ 与其傅里叶级数做比较．

(a) $f(x) = 1$

*(b) $f(x) = x^2$

(c) $f(x) = 1 + x$

*(d) $f(x) = e^x$

(e) $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases}$

*(f) $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 + x & x > 0 \end{cases}$

(g) $f(x) = \begin{cases} x & x < L/2 \\ 0 & x > L/2 \end{cases}$

3.2.2 对下列函数，画出 $f(x)$（在区间 $-L \leqslant x \leqslant L$ 上）的傅里叶级数的草图，并确定其傅里叶系数.

*(a) $f(x) = x$

(b) $f(x) = e^{-x}$

*(c) $f(x) = \sin\frac{\pi x}{L}$

(d) $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < L/2 \\ 0 & |x| > L/2 \end{cases}$

*(f) $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

(g) $f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 2 & x > 0 \end{cases}$

95

3.2.3 证明傅里叶级数运算是线性的，即证明 $c_1 f(x) + c_2 g(x)$ 的傅里叶级数是 c_1 倍的 $f(x)$ 的傅里叶级数与 c_2 倍的 $g(x)$ 的傅里叶级数之和.

3.2.4 假设 $f(x)$ 是分段光滑的．那么在 $x = -L$ 处，$f(x)$ 的傅里叶级数收敛于什么值？在 $x = L$ 处又如何？

3.3 傅里叶余弦级数和傅里叶正弦级数

在本节中，我们要说明正弦级数（以及余弦级数）只是傅里叶级数的特例.

3.3.1 傅里叶正弦级数

奇函数． 奇函数是具有性质 $f(-x) = -f(x)$ 的函数．画奇函数在 $x < 0$ 时的草图就是在 $x > 0$ 时 $f(x)$ 草图的镜面像加负号，参看图 3.3.1．奇函数的例子是 $f(x) = x^3$（事实上，任何奇次幂函数）和 $f(x) = \sin 4x$．奇函数在对称区间上的积分

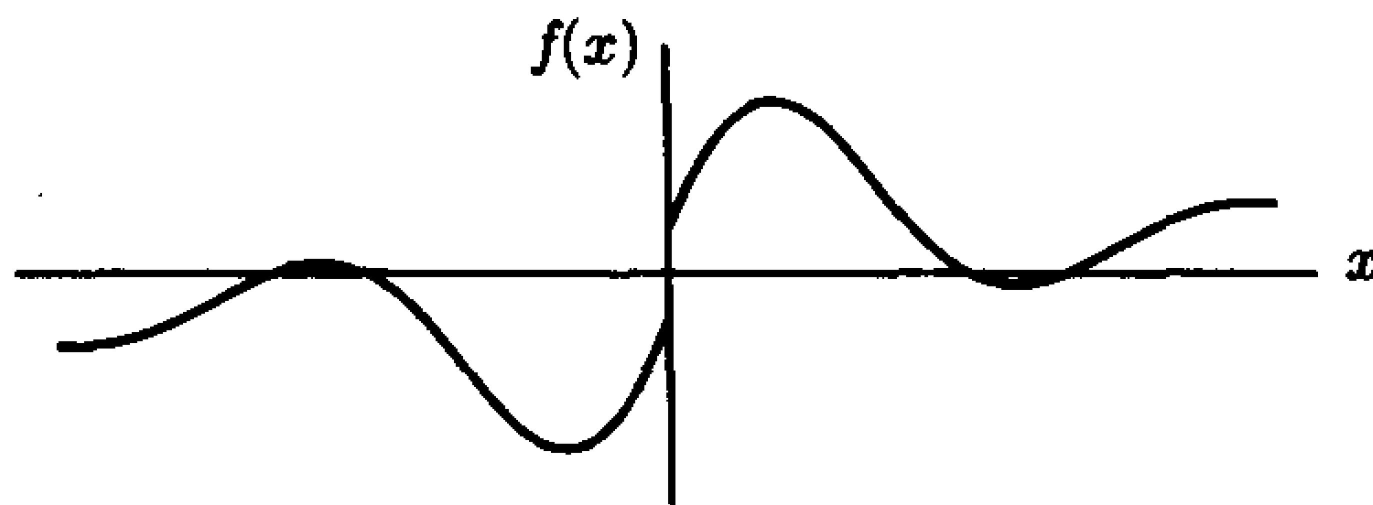


图 3.3.1 奇函数

为零($x>0$ 部分的贡献被 $x<0$ 部分的贡献抵消掉了).

奇函数的傅里叶级数. 计算奇函数的傅里叶系数:

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x = 0.$$

二者都是零，因为被积函数 $f(x)\cos n\pi x/L$ 是奇函数[它是偶函数 $\cos n\pi x/L$ 和奇函数 $f(x)$ 的乘积]. 由于 $a_n=0$，故所有余弦函数(偶函数)都不会出现在奇函数的傅里叶级数中. 奇函数的傅里叶级数是奇函数(正弦)的无穷级数：如果 $f(x)$ 是奇函数，

96

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{3.3.1}$$

此时，傅里叶系数 b_n 的公式可以被简化为

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x, \tag{3.3.2}$$

因为在 $-L$ 到 $+L$ 对称区间上偶函数的积分是在 0 到 L 区间上积分的两倍. 所以对奇函数，只需要 $f(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant L$ 上的信息即可.

傅里叶正弦级数. 不过，只是偶尔才有机会计算奇函数的傅里叶级数. 而正弦级数却经常出现在分离变量的情形中. 回想一下，零端点温度[$u(0,\ t)=u(L,\ t)=0$]的一维杆 $0<x<L$ 的温度满足

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{e}^{-(n\pi/L)^2 kt}, \tag{3.3.3}$$

其中初值条件 $u(x,\ 0)=f(x)$ 成立，只要

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{3.3.4}$$

$f(x)$ 必须表示成正弦级数；(3.3.4)以与(3.3.1)相同的方式出现. 然而，它们存在显著的区别. 在(3.3.1)中，$f(x)$ 是一个奇函数，定义在 $-L\leqslant x\leqslant L$ 上. 在(3.3.4)中，$f(x)$ 只定义在 $0\leqslant x\leqslant L$ 上(就是初始温度分布)；当然 $f(x)$ 不必是奇函数. 如果 $f(x)$ 只在 $0\leqslant x\leqslant L$ 上给出，它可以被延拓为奇函数，参见图 3.3.2，这个延拓称为 $f(x)$ 的奇延拓. $f(x)$ 的奇延拓定义在 $-L\leqslant x\leqslant L$ 上. 傅里叶定理将适用[如果 $f(x)$ 的奇延拓是分段光滑的，也就是 $f(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant L$ 上是分段光滑的]. 此外，因为 $f(x)$ 的奇延拓当然是奇函数，其傅里叶级数只包含正弦：

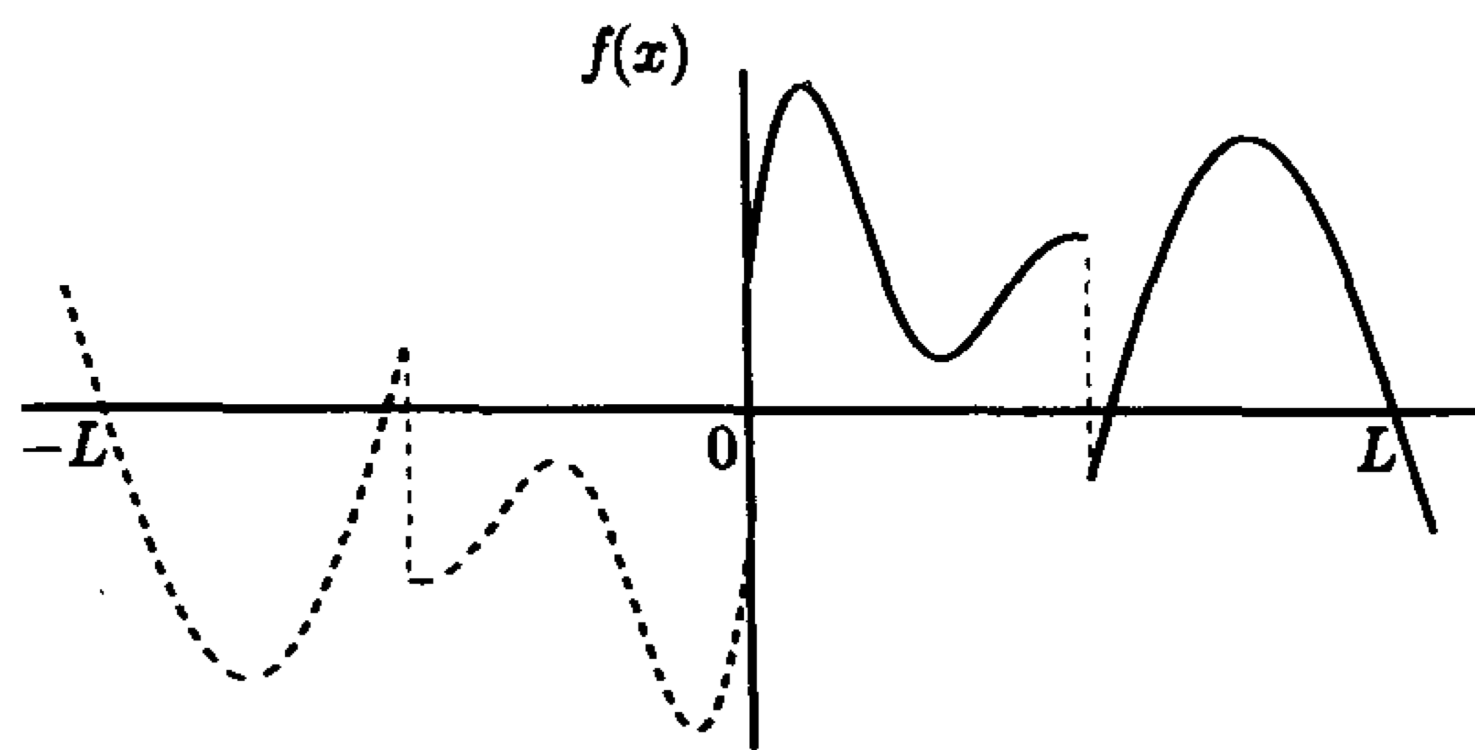


图 3.3.2 $f(x)$ 的奇延拓

$$f(x)\text{的奇延拓} \sim \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\pi x/L,\quad -L\leqslant x\leqslant L,$$

其中 B_n 由(3.3.2)给出. 不过，我们只对在 $x=0$ 和 $x=L$ 之间的 $f(x)$ 感兴趣. 在该区域内，$f(x)$ 与其奇延拓一模一样：

$$\boxed{f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}} \quad 0 \leqslant x \leqslant L, \tag{3.3.5}$$

其中

$$\boxed{B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x.} \tag{3.3.6}$$

97

称之为 $f(x)$（在区间 $0\leqslant x\leqslant L$ 上）的**傅里叶正弦级数**. 这个级数(3.3.5)仅仅只是傅里叶级数的一个例子. 如此就可以引用傅里叶定理了；记住 $f(x)$ 只定义在 $0\leqslant x\leqslant L$ 上. 通过把 $f(x)$ 延拓为奇函数就可以认为 $f(x)$ 是奇的（虽然不必要）. 公式(3.3.6)非常重要，但不必非记住不可. 因为它可以由假定 $f(x)$ 是奇的，从傅里叶级数推导出来. [更准确地说，考虑 $f(x)$ 的奇延拓]. 由于被积函数是偶函数，公式(3.3.6)的因子 2 倍于傅里叶系数中的因子，而积分只是从 $x=0$ 到 $x=L$.

根据傅里叶定理，很容易画 $f(x)$ 的傅里叶正弦级数草图：

1. 画 $f(x)$ 的草图（对 $0<x<L$）.
2. 画 $f(x)$ 的奇延拓草图.
3. 延拓为周期函数（周期为 $2L$）.
4. 在 $f(x)$ 的奇周期延拓的跳跃间断点，用 × 标记平均值.

例. 下面用例子说明如何画 $f(x)=100$ 的傅里叶正弦级数的草图. 只在 $0\leqslant x\leqslant L$ 上考虑 $f(x)=100$. 先在图 3.3.3 中画出奇延拓的草图. $f(x)$ 的傅里叶正弦级数等于 $f(x)$ 奇延拓的傅里叶级数. 在图 3.3.4 中，周期地重复奇延拓（周期为 $2L$）. 在间断点处，用 × 标记平均值. 根据傅里叶定理（如图 3.3.4 所示），100 的傅里叶正弦级数对 $0<x<L$ 就等于 100，但该无穷级数在 $x=0$ 和 $x=L$ 处不等于 100：

$$100 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L},\quad 0 < x < L. \tag{3.3.7}$$

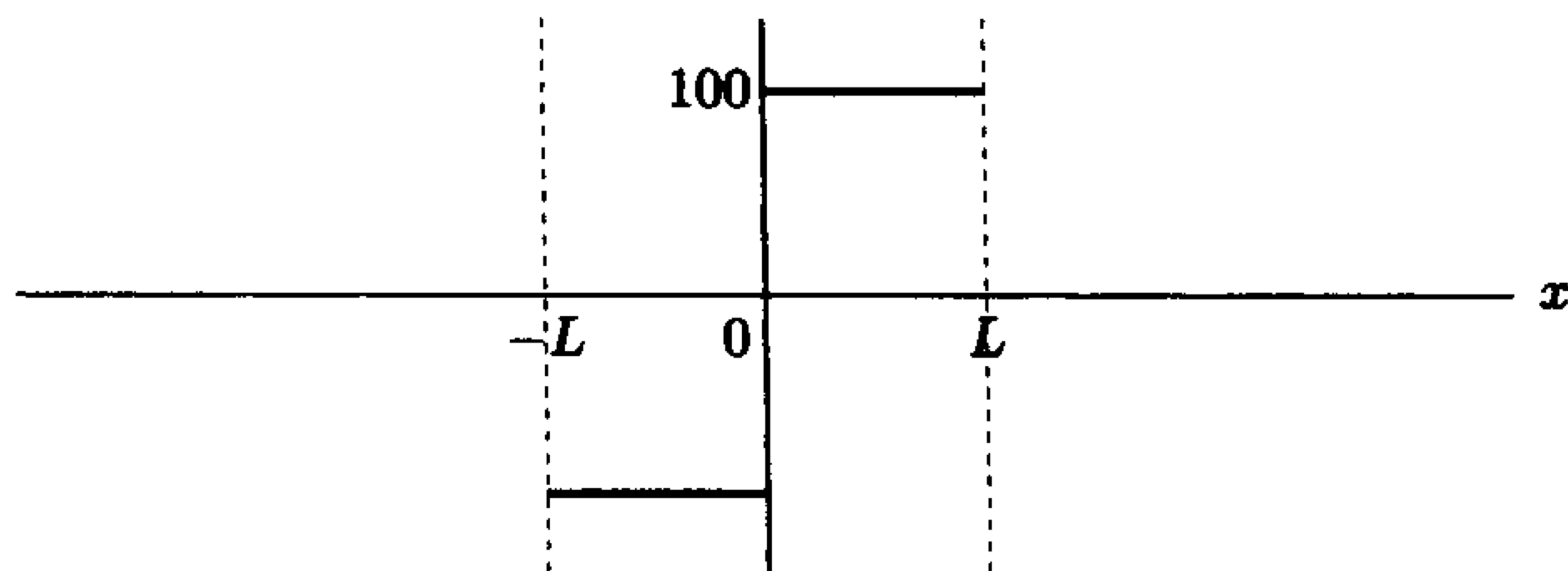


图 3.3.3　$f(x)=100$ 的奇延拓

在 $x=0$ 处，图 3.3.4 表明傅里叶正弦级数收敛于 0，因为在 $x=0$ 处，正弦级数的奇性产生了 100 和 -100 的平均值：0. 类似地，傅里叶级数在 $x=L$ 处也收敛于 0. 这些观察与把 $x=0$（和 $x=L$）代入正弦无穷级数的结果相符合. 与前面一样[见(2.3.42)]，由(3.3.6)确定的傅里叶系数：

98

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x = \frac{200}{L}\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & n\text{ 为偶数} \\ \dfrac{400}{n\pi} & n\text{ 为奇数} \end{cases} \tag{3.3.8}$$

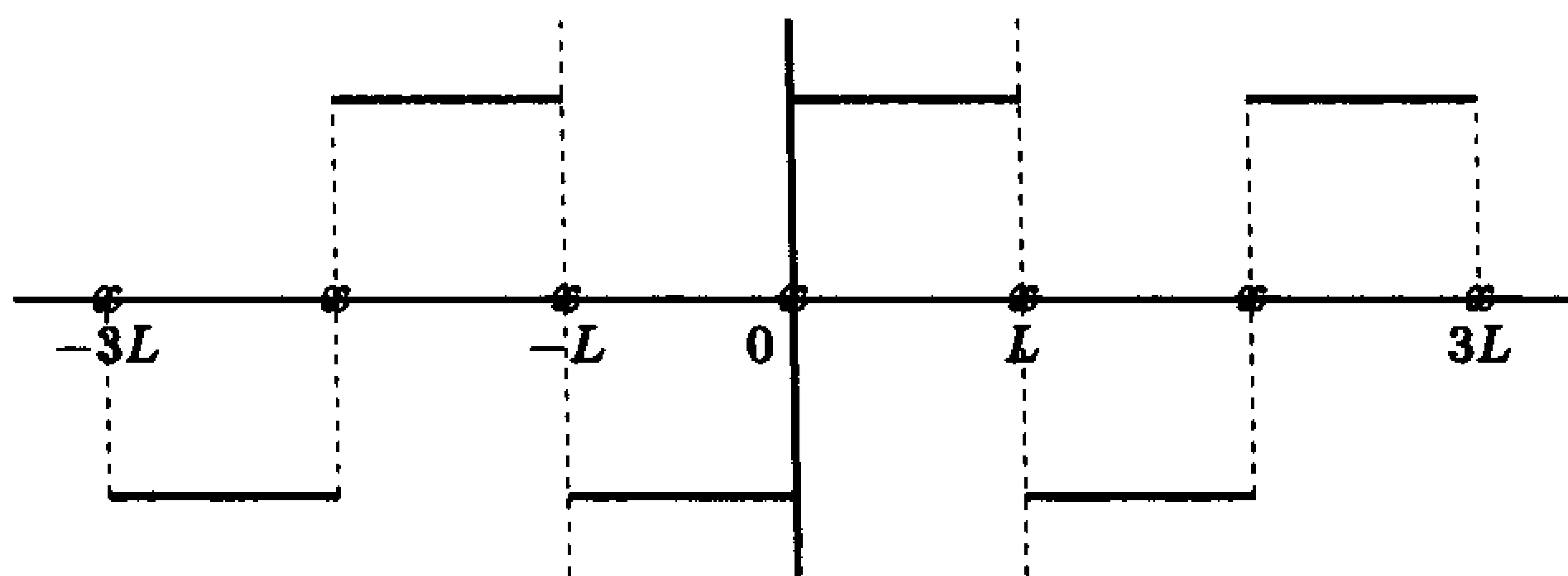


图 3.3.4 $f(x)=100$ 的傅里叶正弦级数

物理实例. 常数傅里叶正弦级数是最简单的例子之一. 这个问题源自在零边界条件和常数初值 100°条件下，求解一维热传导方程：

$$\begin{aligned} \text{PDE:} \quad & \frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L, t > 0 \\ \text{BC1:} \quad & u(0,t) = 0 \\ \text{BC2:} \quad & u(L,t) = 0 \\ \text{IC:} \quad & u(x,0) = f(x) = 100^\circ. \end{aligned}$$

由 2.3 节的分离变量法就得到：

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-(n\pi/L)^2 kt}. \tag{3.3.9}$$

满足初值条件要求

99

$$100 = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad 0 < x < L.$$

这可以解释为 $f(x)=100$ 的傅里叶正弦级数[参见(3.3.8)]. 等价地说，由 $\sin n\pi x/L$ 的正交性可以确定 B_n[参见(2.3.42)].

从数学上看，初值条件的傅里叶级数在 $x=0$（和在 $x=L$）处的性态相当奇异. 事实上，对该问题，在 $x=0$ 处（当 $t=0$ 时）的物理状况刻画得不是很清楚. 这在时-空图(图 3.3.5)中有所说明. 图 3.3.5 问题所涉及的区域是 $t \geq 0$ 和 $0 \leq x \leq L$. 然而，这在介于初值条件和边界条件之间的 $x=0$，$t=0$ 处出现了抵触. 在 $x \to 0$ 时，初值条件($t=0$)指定温度为 100°，而在 $t \to 0$ 时，边界条件($x=0$)指定温度为 0°. 所以，这个物理问题在 $x=0$，$t=0$ 处有个间断. 而在现实物理世界中，

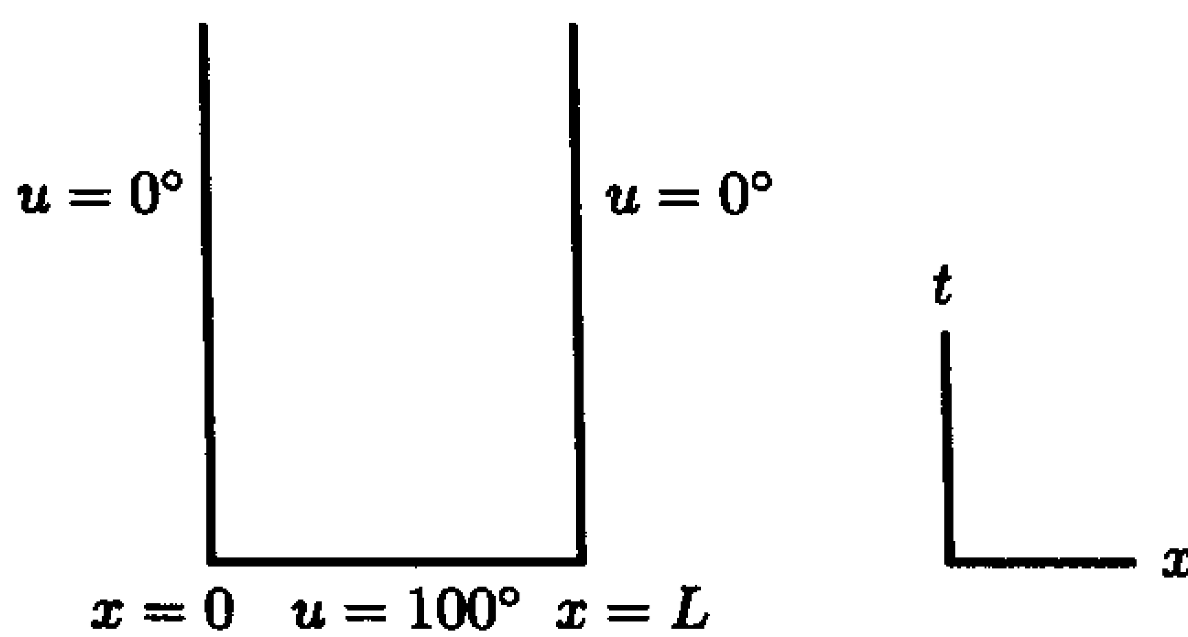


图 3.3.5 边界条件和初值条件

温度不可能是间断的. 通过(在$t=0$时)把杆从100°的容器"瞬时"送到0°容器内，在数学模型上引入了间断点. 这实际上还是要花费时间的，但温度会是连续的. 尽管如此，从0°到100°的转变应是在极小的距离和极短时间内发生的. 引入这个温度间断性是为了近似更为复杂的真实的物理状况. 所以，傅里叶定理说明了在$x=0$(初始时刻$t=0$)处的物理间断是如何在数学上再现出来的. 100°(表示$t=0$处的物理解)的傅里叶正弦级数具有很好的性质：对于杆内$0<x<L$的所有x，它等于100°(所以，满足那里的初值条件)，但在边界$x=0$和$x=L$处，它等于0°(所以，还满足边界条件). 虽然100°的傅里叶正弦级数是一个奇特的数学函数，而其所需要的物理近似也同样奇特.

傅里叶级数的计算和吉布斯现象. 现在来获得些对傅里叶级数有效性的信心. $f(x)=100$的傅里叶正弦级数为

$$100=\frac{400}{\pi}\left(\frac{\sin\pi x/L}{1}+\frac{\sin3\pi x/L}{3}+\frac{\sin5\pi x/L}{5}+\cdots\right). \tag{3.3.10}$$

那么(3.3.10)可靠吗? 当然，它在$x=0$(以及$x=L$)处不成立，因为在$x=0$处，级数的每项都是零(这些项无法加出100). 不过，傅里叶级数的理论声称：(3.3.10)在除两个端点之外的所有点都是成立的. 例如，在$x=L/2$处是成立的. 把$x=L/2$代入(3.3.10)就有 100

$$100=\frac{400}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots\right)\quad 或 \quad \frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots.$$

最初，这个式子看起来似乎有些奇怪. 然而，它是π的欧拉公式. 它可以用来计算π(尽管效率很低)；它的证明也可以不依赖于无穷三角级数的理论(见习题3.3.17). (3.3.10)对其他$x(0<x<L)$成立也可能会令人惊奇. 下面画出(3.3.10)左端函数和右端函数的草图，以便确信它们相等. 通过把级数的各项相加，画出右端函数的草图. 当然，不可能加完所要求的无穷多项；而只加了有限个项. 事实上，要的是画出前几项之和的草图，以便看清随着项数的增加，级数如何趋向常数100. 如果知道$400/\pi=127.323\,95\cdots$是很有用的(虽然对于作草图，125或130就够了). 第一项$(400/\pi)\sin\pi x/L$是先升后降的正弦函数；如图3.3.6所示，它不是常数100的好近似值. 另一方面，因为只用了无穷级数的一项，它也不是太坏的近似值. 要加上的下一项是$(400/3\pi)\sin3\pi x/L$. 这是一个典型的正弦曲线振荡，振幅和周期都是第一项的三分之一. 在$x=0$和$x=L$附近是正的，需要增加这附近的近似值，而在$x=L/2$附近是负的，这附近的近似值就需要减少. 在图3.3.7中把它画成虚线的草图，再把它加到第一项. 可以看出，两个非零项的和好像已经是对第一项的显著改进了. 在图3.3.8中，给出了部分和的计算机绘图.

实际上，从图3.3.8中可以获得很多东西. 或许现在看来，对于$0<x<L$，该级数收敛于100确实是合理的. 随着项数的增加，最坏的地方(级数与100相差最远的地方)越来越接近$x=0$和$x=L$处. 对级数的有限项，解在$x=0$处从零开始，然后上冒超过100，我们称为初次"上冲". 有趣的是，图3.3.8生动地显示了这种上冲. 甚至由此可以推测，加到1000项时的情况. 随着项数的增加，级数应该越来越精确. 当$n\to\infty$时，预期上冲可能会消失，而只在最大上冲的点上加一条直边. 上冲似乎就不趋于100，而是远离，接近118. 这种上冲是吉布斯

现象的一个例子. 一般地(对大 n), 存在一个近似为跳跃间断9%的上冲(和对应下冲). 目前(见图3.3.4), $f(x)=100$ 的傅里叶正弦级数在 $x=0$ 处, 从 -100 跳到 $+100$. 所以, 有限级数大约将上冲200的9%, 或近似18. 通常吉布斯现象只出现在特征函数的有限级数近似间断函数的时候.

101

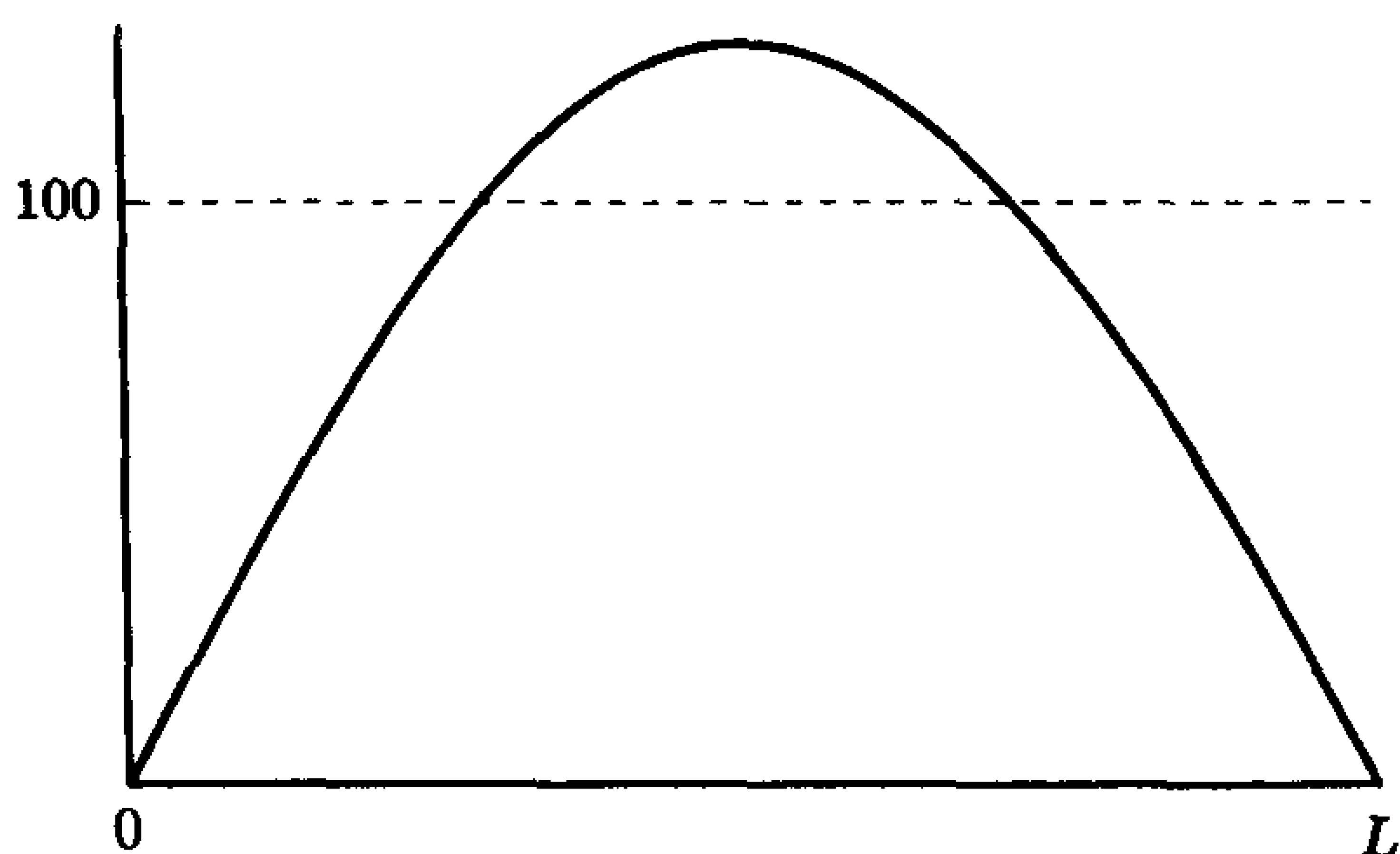


图 3.3.6 $f(x)=100$ 的傅里叶正弦级数的第一项

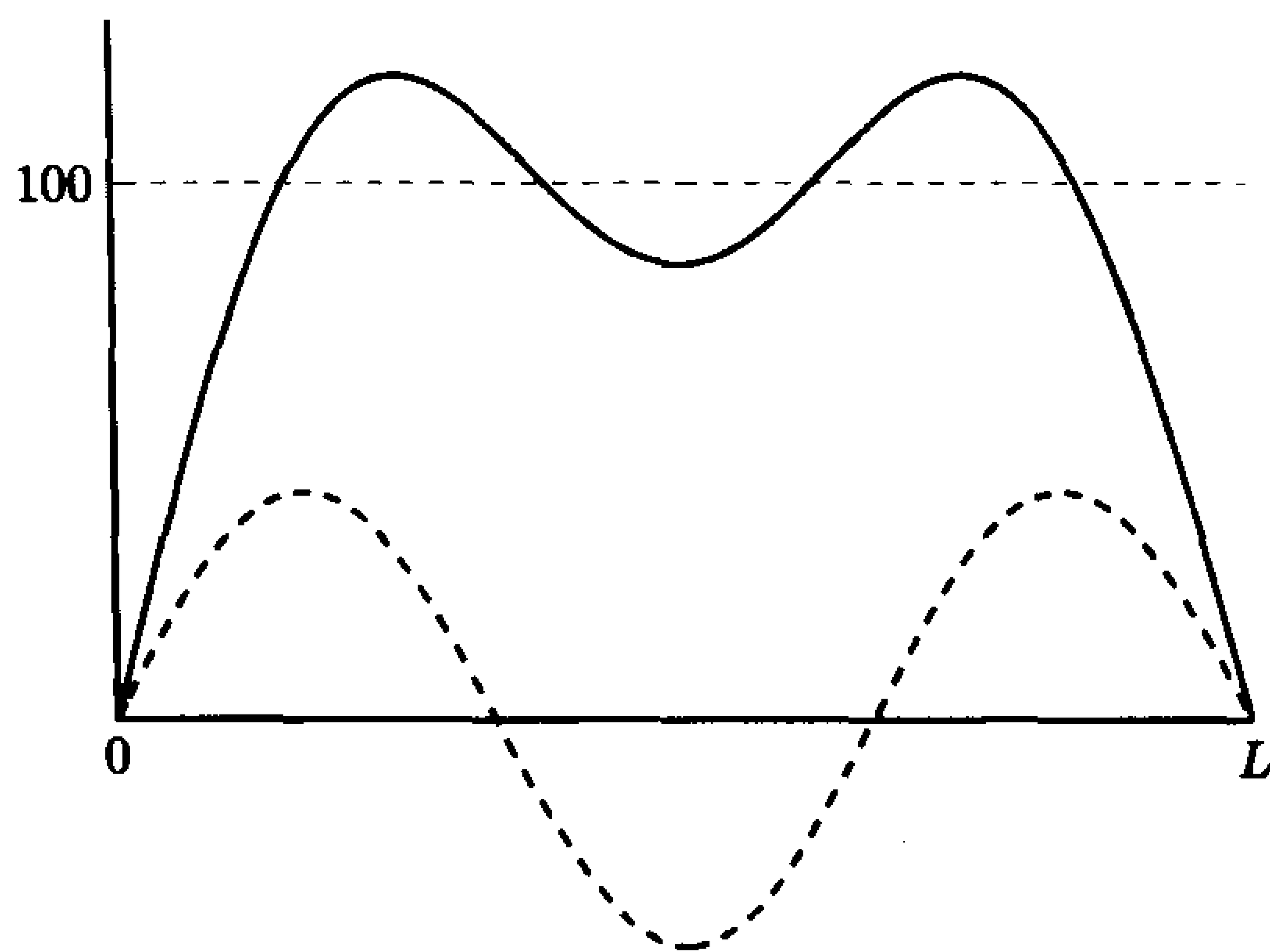


图 3.3.7 $f(x)=100$ 的傅里叶正弦级数的前两个非零项

傅里叶正弦级数更深入的例子. 考虑 $f(x)=x$ 的傅里叶正弦级数. 在图3.3.9a中, 给出了 $f(x)=x$ 在区间 $0\leqslant x\leqslant L$ 上的草图. 在图3.3.9b中, 画的是 $f(x)$ 奇周期延拓的草图. 奇周期延拓在 $x=(2n-1)L$ 处的跳跃间断表明: $f(x)=x$ 的傅里叶正弦级数在 $x=L$ 处收敛于零. 而 $f(L)\neq 0$. 注意, 对 $-L<x<L$, $f(x)=x$ 的傅里叶正弦级数实际上等于 x,

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{L},\quad -L<x<L. \tag{3.3.11}$$

傅里叶系数由(3.3.6)确定:

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x=\frac{2}{L}\int_0^L x\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x=\frac{2L}{n\pi}(-1)^{n+1}, \tag{3.3.12}$$

其中的积分可以使用分部积分法(或积分表)求出.

例. 现在考虑 $f(x)=\cos\pi x/L$ 的傅里叶正弦级数. 这似乎要求一个偶函数的正弦级数展

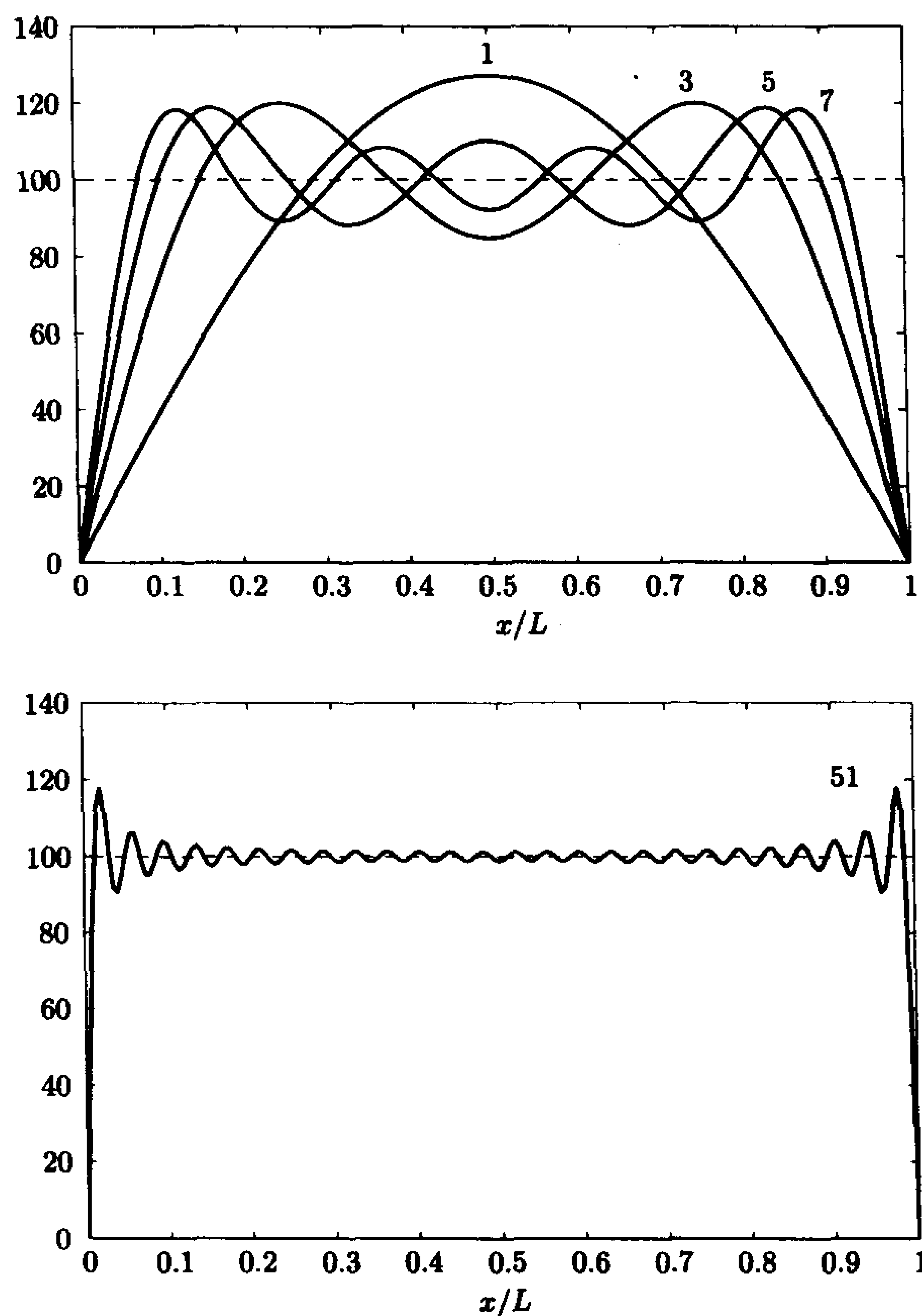


图 3.3.8 $f(x)=100$ 的傅里叶正弦级数的各个部分和. 加到第 51 项时(包括 $n=51$)，离开端点的有限级数是 $f(x)=100$ 的一个好近似. 在端点附近(这里的跳跃间断为 200)，存在一个 9% 的上冲(吉布斯现象)

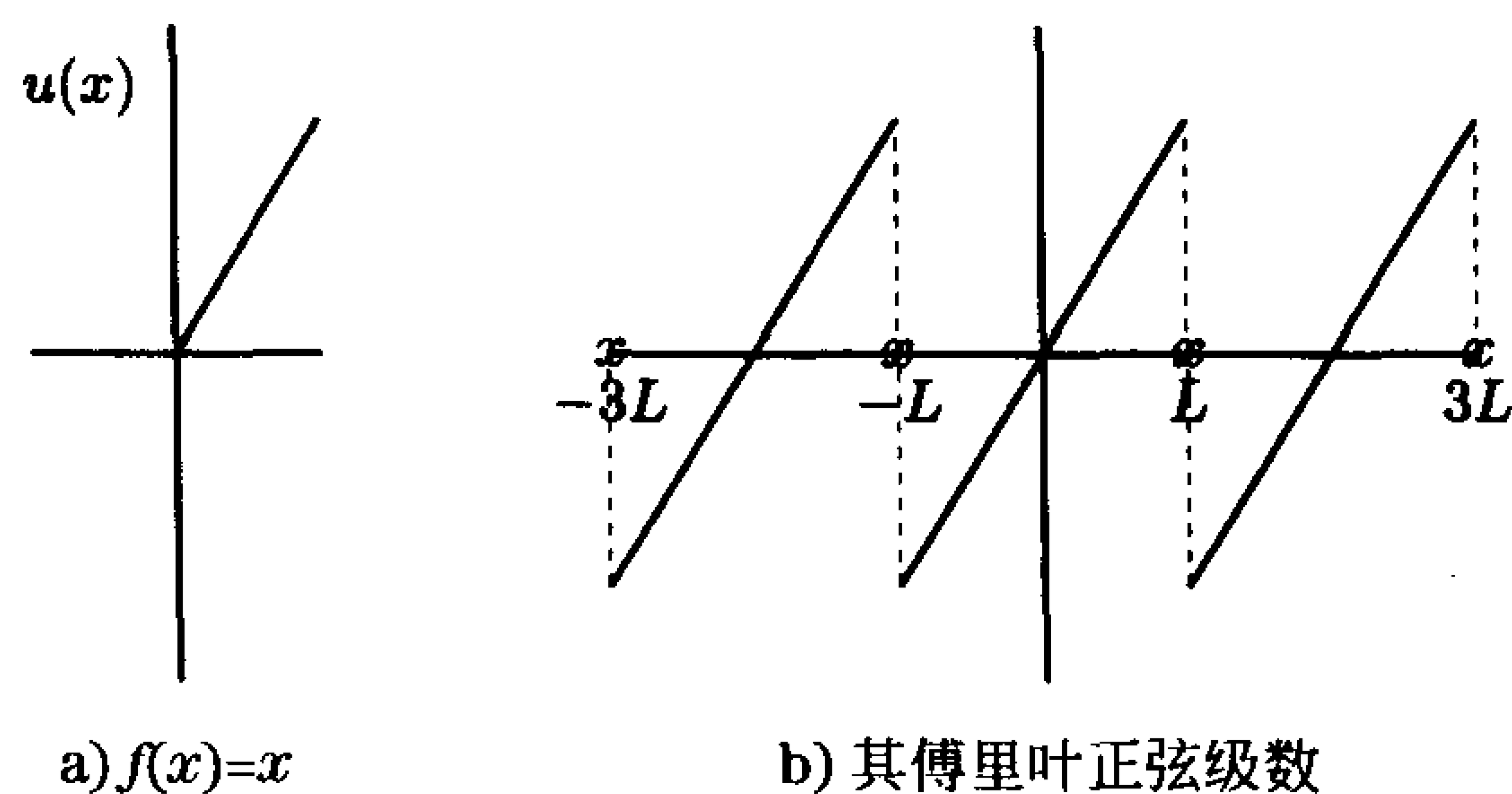


图 3.3.9

开，而在应用中，函数经常只在 $0\leqslant x\leqslant L$ 上给出，由于边界条件的原因，函数一定要展成正弦级数. 图 3.3.10a 给出了 $\cos\pi x/L$ 的草图，它是个偶函数，图 3.3.10b 是其奇延拓的草图. $f(x)$ 的傅里叶正弦级数等于 $f(x)$ 奇延拓的傅里叶级数. 所以，重复周期地作图 3.3.10b 中的图

形(见图3.3.11)，在跳跃间断点的两个极限值的平均值处画×. $\cos\pi x/L$ 的傅里叶正弦级数表示是

$$\cos\frac{\pi x}{L} \sim \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leqslant x \leqslant L,$$

其中

102~104

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L \cos\frac{\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & n \text{ 为奇数} \\ \dfrac{4n}{\pi(n^2-1)} & n \text{ 为偶数}. \end{cases} \tag{3.3.13}$$

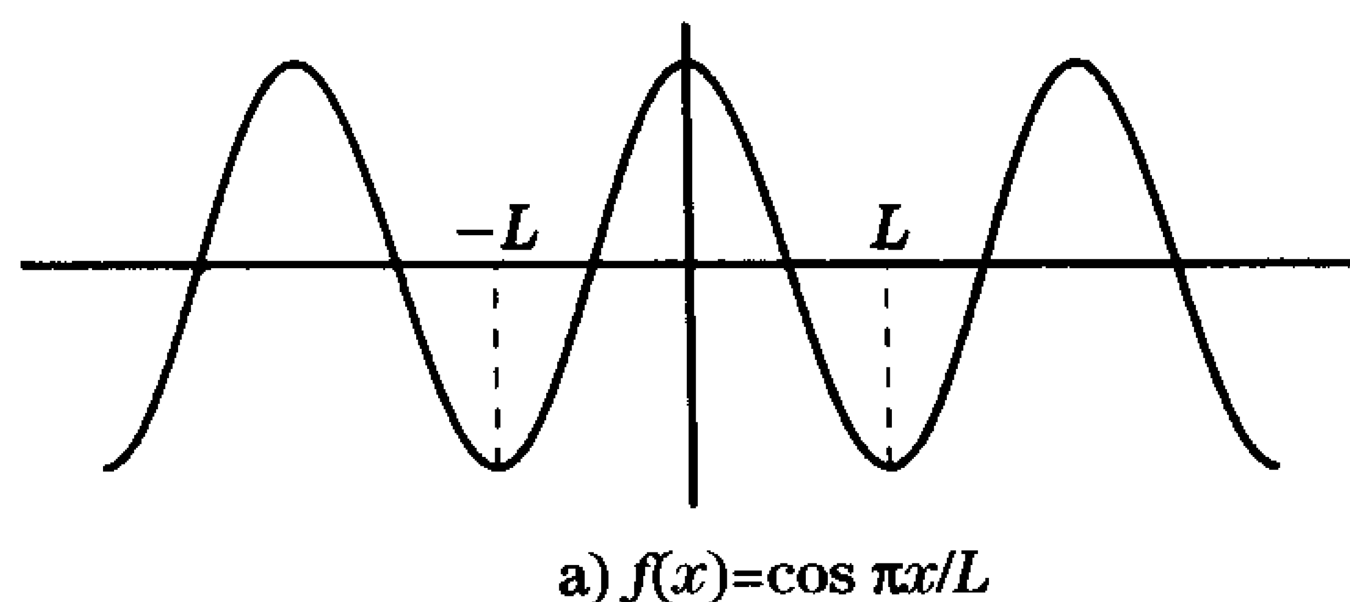
根据图3.3.11(基于傅里叶定理)，等式对 $0<x<L$ 成立，但在 $x=0$ 和 $x=L$ 处不成立：

$$\cos\frac{\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad 0 < x < L.$$

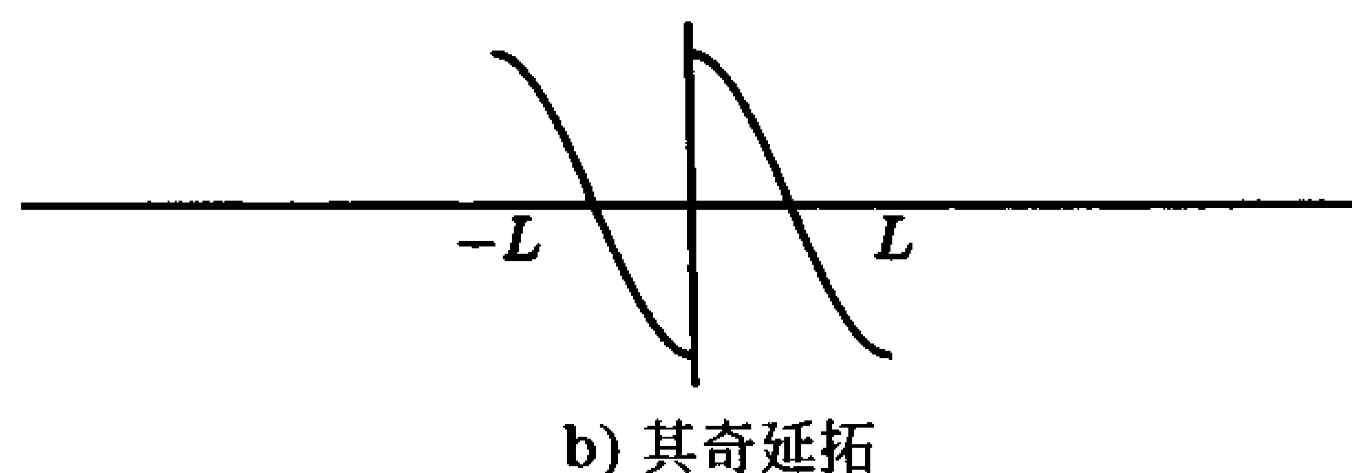
在 $x=0$ 和 $x=L$ 处，无穷级数一定收敛于0，因为该级数中的所有项都是零. 图3.3.11与此一致. 这个问题中有一点使人可能有些困惑. 那就是，回忆一下 $\sin n\pi x/L$ 与 $\cos m\pi x/L$ 正交，因此预计(3.3.12)中的所有 B_n 都是零. 然而，$B_n \neq 0$. 微妙之处在于：要记住在区间 $-L \leqslant x \leqslant L$ 上，$\cos m\pi x/L$ 和 $\sin n\pi/L$ 是正交的，$\int_{-L}^{L}\cos m\pi x/L \sin n\pi x/L\mathrm{d}x = 0$；但是它们在 $0 \leqslant x \leqslant L$ 上不

105

正交.



a) $f(x)=\cos \pi x/L$



b) 其奇延拓

图 3.3.10

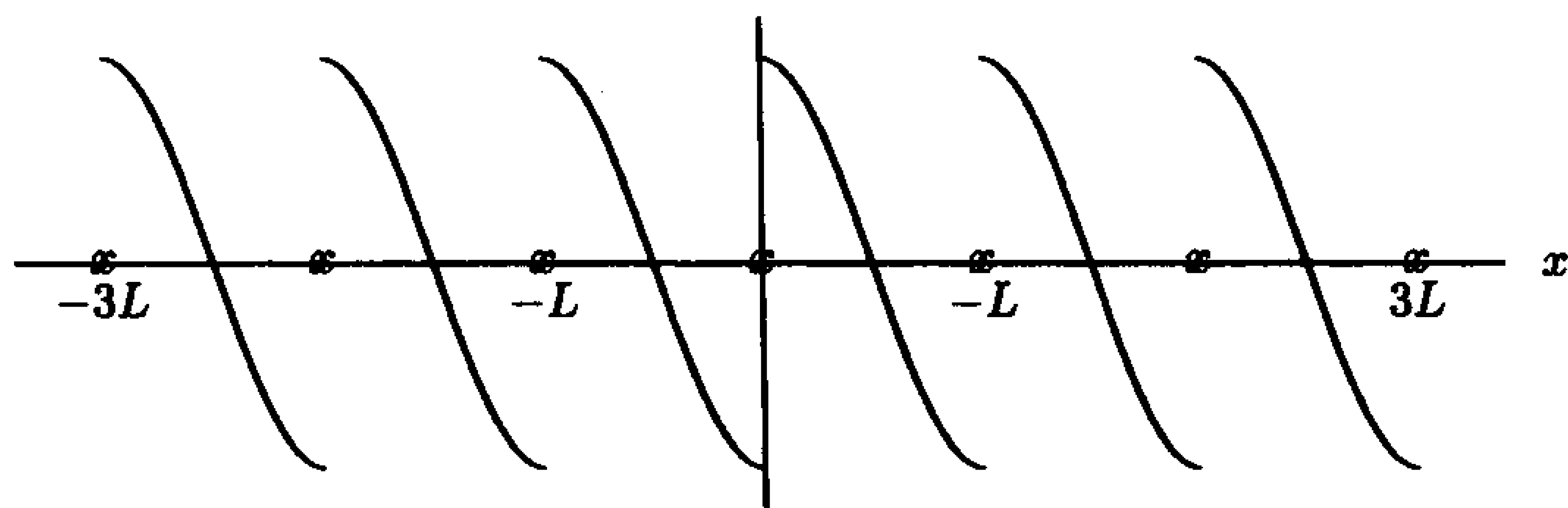


图3.3.11 $f(x)=\cos\pi x/L$ 的傅里叶正弦级数

3.3.2 傅里叶余弦级数

偶函数. 对偶函数$f(-x)=f(x)$，类似的思想仍是有效的，现在来开发这些基本结果. 对偶函数$f(x)$，其傅里叶级数的正弦系数将为零：

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = 0,$$

偶函数的傅里叶级数是$f(x)$只有偶函数(余弦)的无穷和表示：

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \tag{3.3.14}$$

余弦系数可以只用$f(x)$在$x=0$和$x=L$之间的信息计算出来，这是因为，利用$f(x)$是偶函数和$f(x)\cos n\pi x/L$是偶函数的事实：

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx \tag{3.3.15}$$

$$(n \geqslant 1) \quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx. \tag{3.3.16}$$

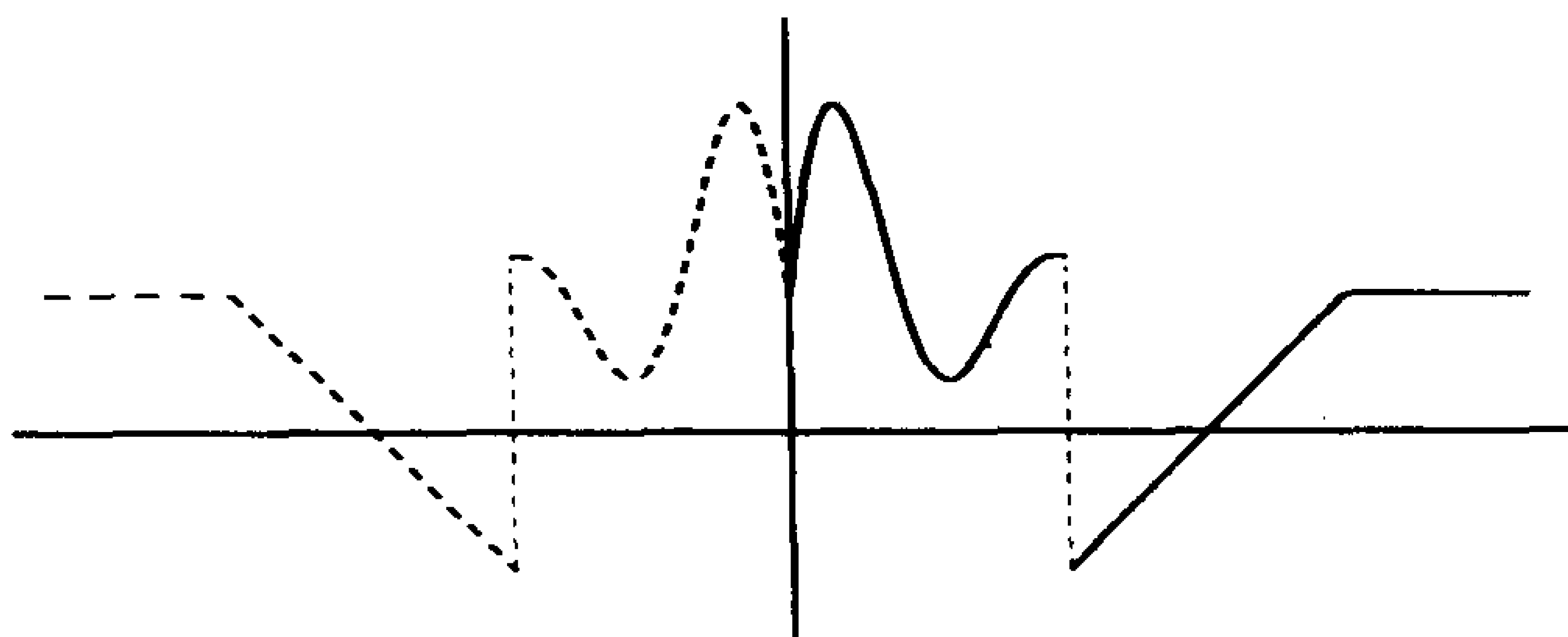


图 3.3.12 $f(x)$的偶延拓

通常，$f(x)$不是以偶函数的形式给出的. 而是试图用$\cos n\pi x/L$的无穷级数来表示一个任意函数$f(x)$，$\cos n\pi x/L$是边界值问题$d^2\phi/dx^2=-\lambda\phi$，满足$d\phi/dx(0)=0$和$d\phi/dx(L)=0$的特征函数，仅在$0<x<L$上成立：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \tag{3.3.17}$$

前面确定的系数A_n与(3.3.15)和(3.3.16)中给出的A_n是一样的，不过这里是由于$\cos n\pi x/L$的正交性. 为了将(3.3.17)与傅里叶级数联系起来，只要引入$f(x)$的偶延拓，图3.3.12给出了一个例子. 如果$f(x)$在$0\leqslant x\leqslant L$上是分段光滑的，则其偶延拓也是分段光滑的，所以，可以把傅里叶定理应用到$f(x)$的偶延拓. 而$f(x)$的偶延拓是一个偶函数，故$f(x)$偶延拓的傅里叶级数只有余弦：

$$f(x)\text{ 的偶延拓} \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad -L \leqslant x \leqslant L,$$

其中a_n由(3.3.15)和(3.3.16)给出. 在所涉及的区域$0\leqslant x\leqslant L$内，$f(x)$等同于其偶延拓. 在该区域内，所得的级数称为$f(x)$的傅里叶余弦级数(在区间$0\leqslant x\leqslant L$上)： [106]

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leqslant x \leqslant L \tag{3.3.18}$$

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x \tag{3.3.19}$$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x. \tag{3.3.20}$$

$f(x)$的傅里叶余弦级数恰为$f(x)$偶延拓的傅里叶级数. 因为可以应用傅里叶定理，故有画$f(x)$的傅里叶余弦级数草图的步骤：

1. 画$f(x)$的草图(对$0<x<L$).
2. 画$f(x)$偶延拓的草图.
3. 延拓为周期函数(周期为$2L$).
4. 在间断点的左右极限均值处，标记×.

例. 考虑$f(x)=x$的傅里叶余弦级数. 在图3.3.13a中，画出了$f(x)$的草图.[注意$f(x)$是奇函数!]只在$x=0$到$x=L$内考虑$f(x)$，并在图3.3.13b中，把它延拓为偶函数. 下一步，通过周期地扩充该偶延拓(见图3.3.14)，画偶延拓的傅里叶级数的草图. 注意，在$x=0$和$x=L$之间，傅里叶余弦级数没有跳跃间断点. $f(x)=x$的傅里叶余弦级数实际上等于x，所以

107

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leqslant x \leqslant L. \tag{3.3.21}$$

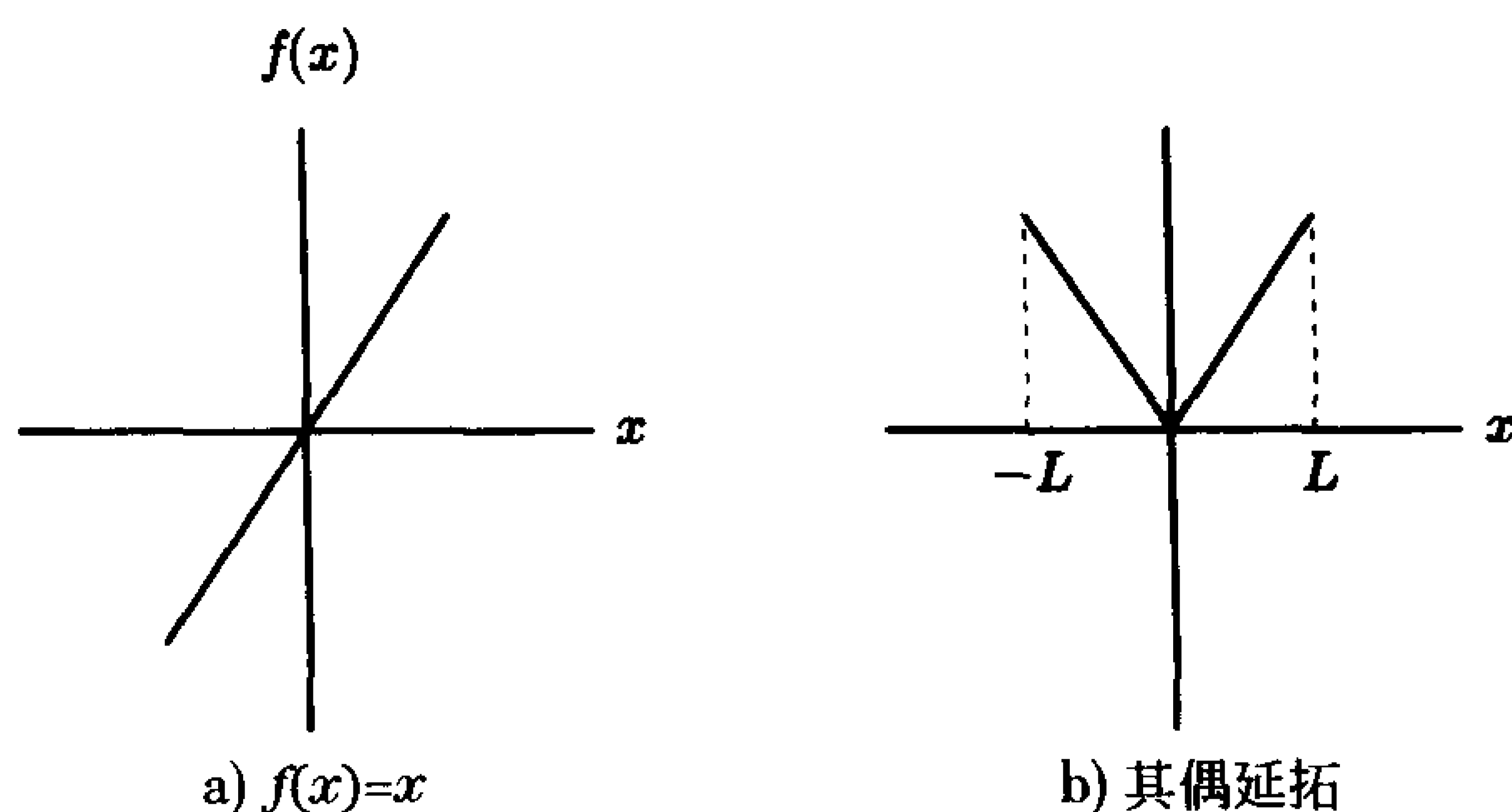


图 3.3.13

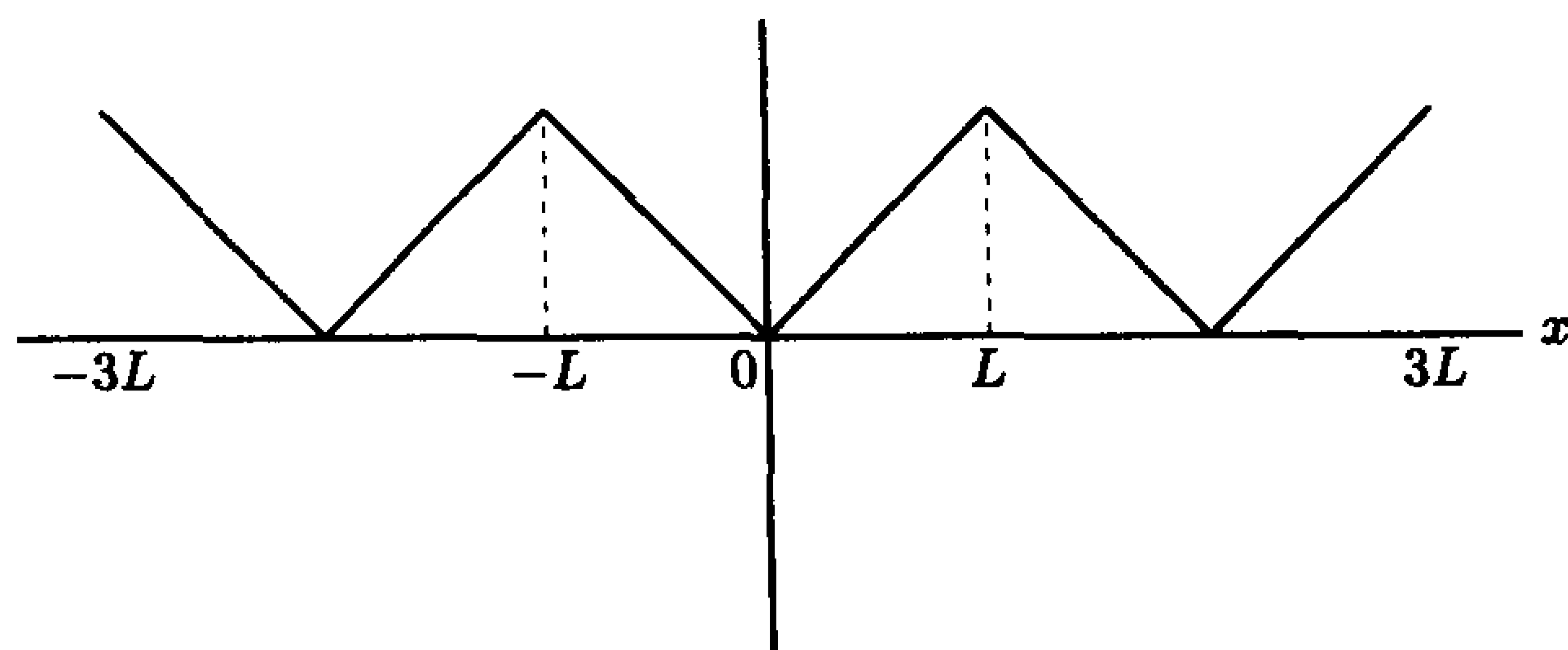


图3.3.14 $f(x)$偶延拓的傅里叶余弦级数

系数由下列积分给出：

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L x\mathrm{d}x = \frac{1}{L}\frac{1}{2}x^2\Big|_0^L = \frac{L}{2} \tag{3.3.22}$$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L x\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x = \frac{2L}{(n\pi)^2}(\cos n\pi - 1). \tag{3.3.23}$$

后一个积分可以通过分部积分法，积分表或一个计算机程序计算出来．此处省略这些细节．

3.3.3 用正弦级数和余弦级数表示 $f(x)$

很显然，任意(分段光滑)函数 $f(x)$ 既可以用傅里叶正弦级数表示，也可以用傅里叶余弦级数来表示．至于要使用哪种级数则由边界条件来决定(如果问题出现在用分离变量法求解偏微分方程的情况下)．也可能使用(既包括正弦，也包括余弦)傅里叶级数．作为例子，考虑画函数 [108]

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{L}{2}\sin\dfrac{\pi x}{L} & x < 0 \\ x & 0 < x < \dfrac{L}{2} \\ L - x & x > \dfrac{L}{2} \end{cases}$$

的傅里叶级数、傅里叶正弦级数和傅里叶余弦级数的草图．在图 3.3.15 中，画的是 $f(x)$ 在 $-L<x<L$ 上的草图．$f(x)$ 的傅里叶级数的草图可以通过按周期 $2L$ 重复该图形画出．另一方面，对于傅里叶正弦(余弦)级数，在重复图形之前，先要画出函数 $f(x)$ 奇(偶)延拓的草图．在图 3.3.16 中，画出了这三个级数的草图．注意，对于 $-L\leqslant x\leqslant L$，只有 $f(x)$ 的傅里叶级数等于 $f(x)$．不过，在区域 $0\leqslant x\leqslant L$ 上，对所有这三种情况，级数都等于 $f(x)$．

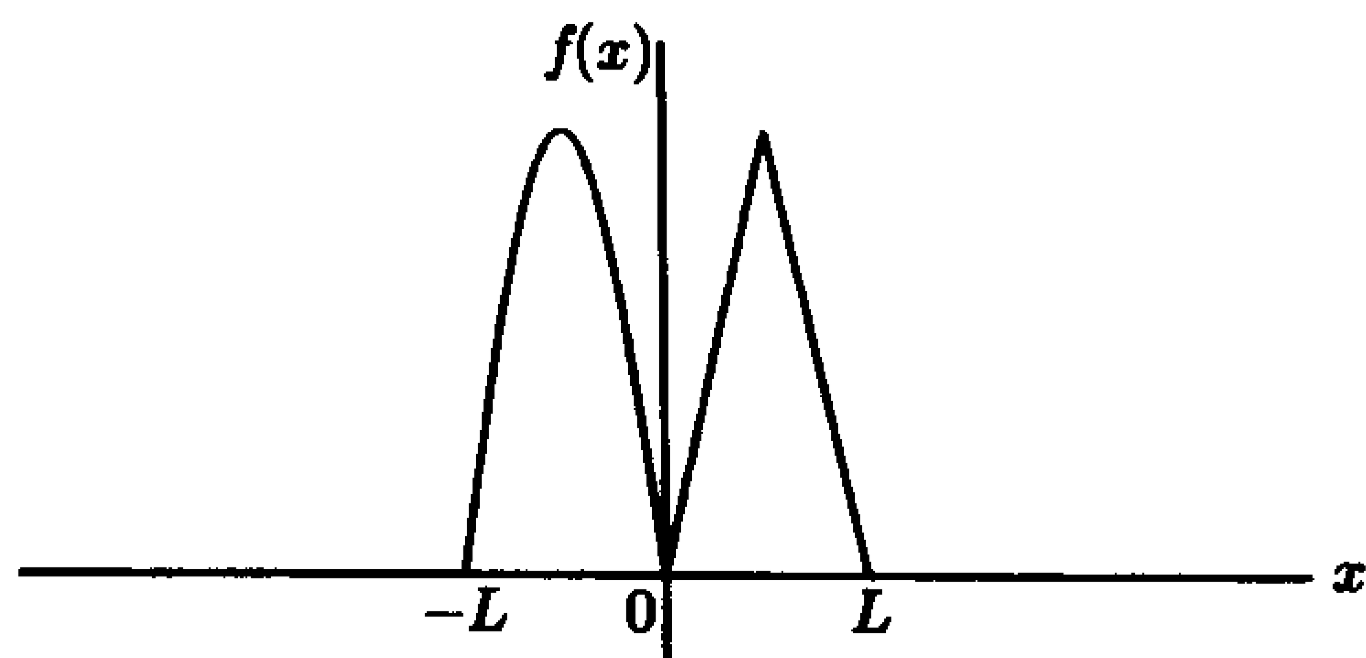
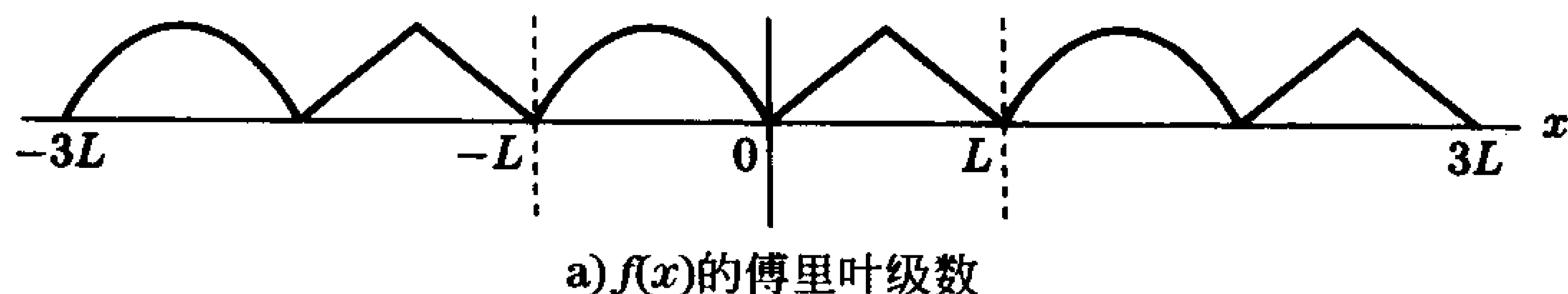
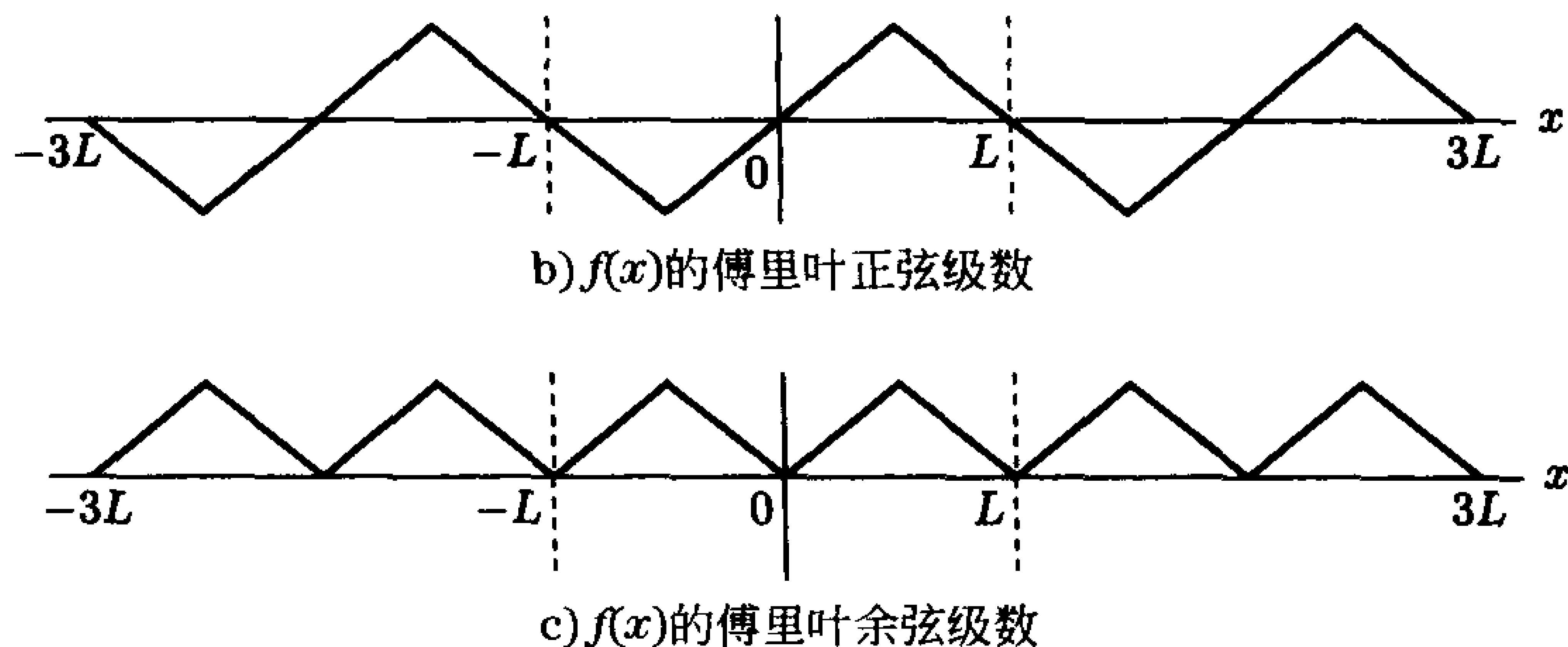


图 3.3.15 对 $-L<x<L$，$f(x)$ 的图形



a) $f(x)$ 的傅里叶级数

图 3.3.16



b) $f(x)$的傅里叶正弦级数

c) $f(x)$的傅里叶余弦级数

图 3.3.16 （续）

3.3.4 偶部和奇部

下面考虑函数$f(x)$的傅里叶级数，这里，$f(x)$不必是偶函数或奇函数：

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{3.3.24}$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$$

109

有意思的是，傅里叶级数是一个余弦级数和一个正弦级数之和. 例如，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x/L$ 一般不是 $f(x)$的傅里叶正弦级数，因为系数 $b_n = 1/L\int_{-L}^{L} f(x)\sin n\pi x/L dx$ 一般与傅里叶正弦级数的系数 $\left[2/L\int_0^L f(x)\sin n\pi x/L dx\right]$不一样. 这个正弦级数本身应该是某个函数的傅里叶正弦级数；下面就来确定这个函数.

方程(3.3.24)表明，$f(x)$被表示为一个偶函数(因为余弦级数一定是偶函数)与一个奇函数(类似地，正弦级数一定是奇函数)之和. 这是函数的一般性质，所以对任意函数，这都是相当显然的：

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]. \tag{3.3.25}$$

注意，第一个括号内的项是偶函数，称为$f(x)$的偶部. 第二个括号内的项是奇函数，称为$f(x)$的奇部：

$$f_e(x) \equiv \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \quad 和 \quad f_o(x) \equiv \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]. \tag{3.3.26}$$

这样，任意函数就写成了偶函数(偶部)和奇函数(奇部)的和. 例如，$f(x) = 1/(1+x)$，

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}\right]=\frac{1}{1-x^2}-\frac{x}{1-x^2}.$$

这是偶函数 $1/(1-x^2)$ 和奇函数 $-x/(1-x^2)$ 之和. 因此，$f(x)$ 的傅里叶级数等于 $f_e(x)$ 的傅里叶级数[一个余弦级数，因为 $f_e(x)$ 是偶函数]加上 $f_o(x)$ 的傅里叶级数(一个正弦级数，因为 $f_o(x)$ 是奇函数). 这说明，(3.3.17)中的正弦(余弦)级数是 $f_o(x)$ ($f_e(x)$) 的傅里叶正弦(余弦)级数. 以上结果总结如下： [110]

> $f(x)$ 的傅里叶级数等于 $f_o(x)$ 的傅里叶正弦级数加上 $f_e(x)$ 的傅里叶余弦级数，其中，$f_e(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，$f_o(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$.

请不要把这个结果与偶延拓和奇延拓混淆. 例如，$f(x)$ 的偶部分 $=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，而

$$f(x)\text{ 的偶延拓 }=\begin{cases}f(x), & x>0\\ f(-x), & x<0.\end{cases}$$

3.3.5 连续傅里叶级数

傅里叶级数的收敛定理表明，$f(x)$ 的傅里叶级数可能是与 $f(x)$ 不同的函数. 尽管如此，在所关注的区间上，除去几个点外，两者还是相同的，这些点是 $f(x)$ 周期延拓的跳跃间断点. 用同样的方法分析正弦(余弦)级数，其中考虑的是奇(偶)周期延拓. 除 $f(x)$ 本身的跳跃间断外，$f(x)$ 的各种延拓也可能引起跳跃间断. 由上一节的例子看出，有时得到的级数根本就没有跳跃间断点. 在这种情况下，$f(x)$ 的傅里叶级数在所关注的区域内实际上等于 $f(x)$. 傅里叶级数本身也将是一个连续函数.

因此总结出傅里叶级数连续的条件：

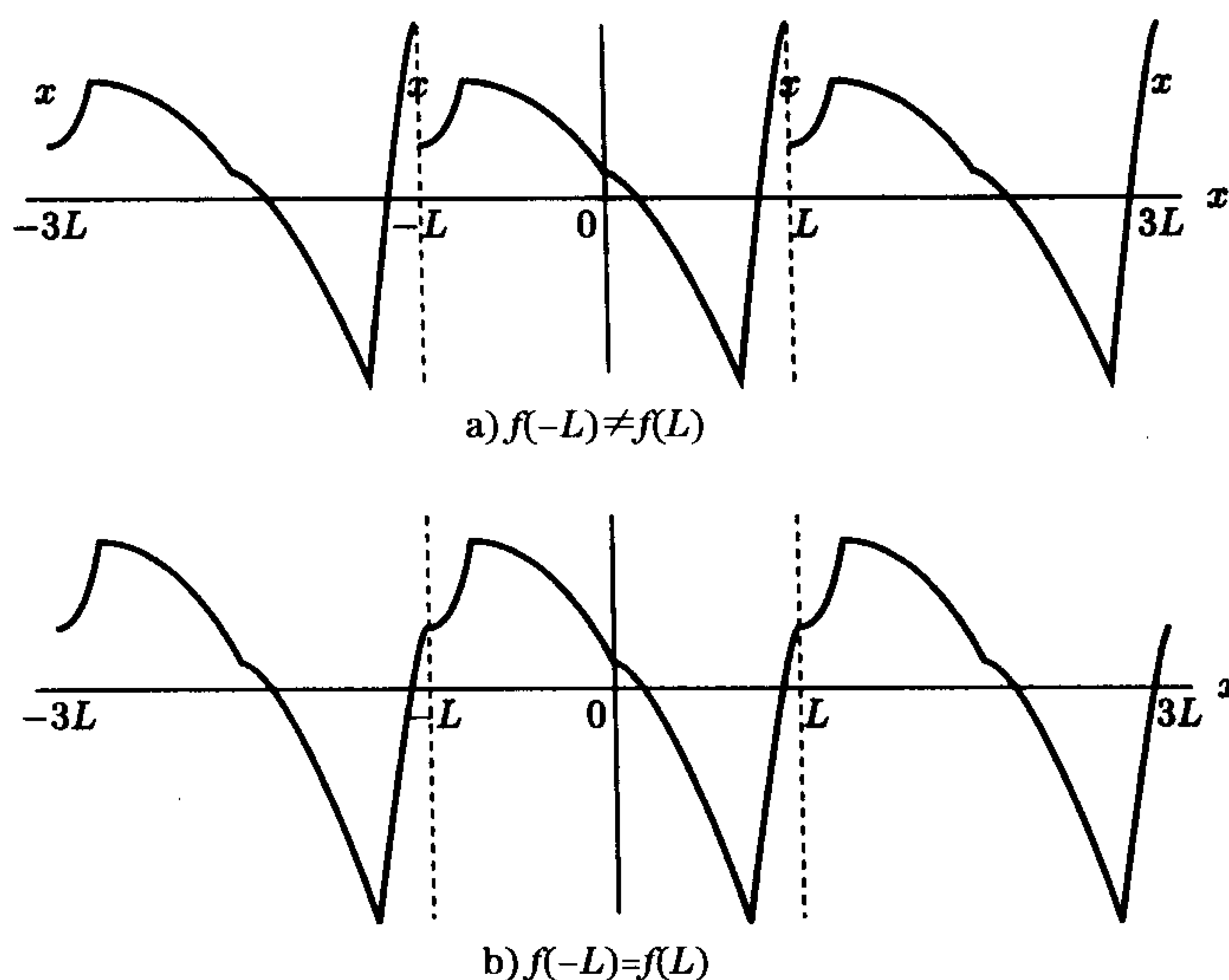
> 对分段光滑的 $f(x)$，$f(x)$ 的傅里叶级数是连续的且在 $-L\leqslant x\leqslant L$ 上收敛于 $f(x)$，当且仅当 $f(x)$ 是连续的且 $f(-L)=f(L)$.

$f(x)$ 连续是必要的；否则，就会有跳跃间断点[$f(x)$ 的傅里叶级数将收敛于平均值]. 图 3.3.17 说明了条件 $f(-L)=f(L)$ 的重要性，其中的两个连续函数，只有一个满足 $f(-L)=f(L)$. 条件 $f(-L)=f(L)$ 保证了重复图形(周期为 $2L$)在端点连续. 上面方框内的文字是所有傅里叶级数的一个基本性质. 它也解释了下面傅里叶正弦级数和余弦级数的类似定理.

考虑 $f(x)$ 的傅里叶余弦级数[$f(x)$ 已被延拓为一个偶函数]. 如果 $f(x)$ 是连续的，傅里叶余弦级数连续吗? 图 3.3.18 是在 $0\leqslant x\leqslant L$ 上的一个连续函数例子. 先将 $f(x)$ 偶延拓，再延拓为周期函数. 即得到 [111]

> 对分段光滑的 $f(x)$，$f(x)$ 的傅里叶余弦级数是连续的且在 $0\leqslant x\leqslant L$ 上收敛于 $f(x)$，当且仅当 $f(x)$ 是连续的.

注意：$f(x)$ 的余弦级数是连续的(除 $f(x)$ 的连续性外)，不必要再对 $f(x)$ 附加任何条件. 原因之一是，如果 $f(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant L$ 上是连续的，则其偶延拓在 $-L\leqslant x\leqslant L$ 上连续. 还可以注意到，在 $\pm L$ 处偶延拓的值是相同的. 所以，周期延拓在端点处就自动是连续的.



a) $f(-L)\neq f(L)$

b) $f(-L)=f(L)$

图 3.3.17 连续函数的傅里叶级数

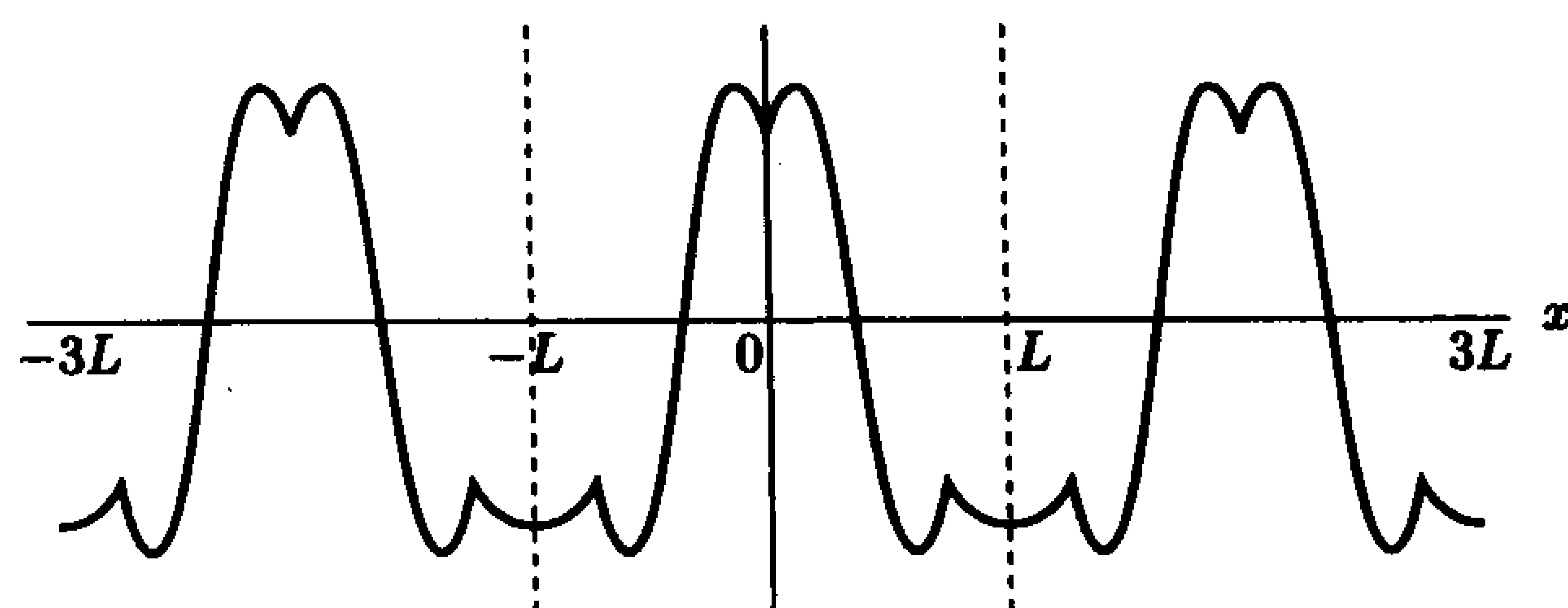
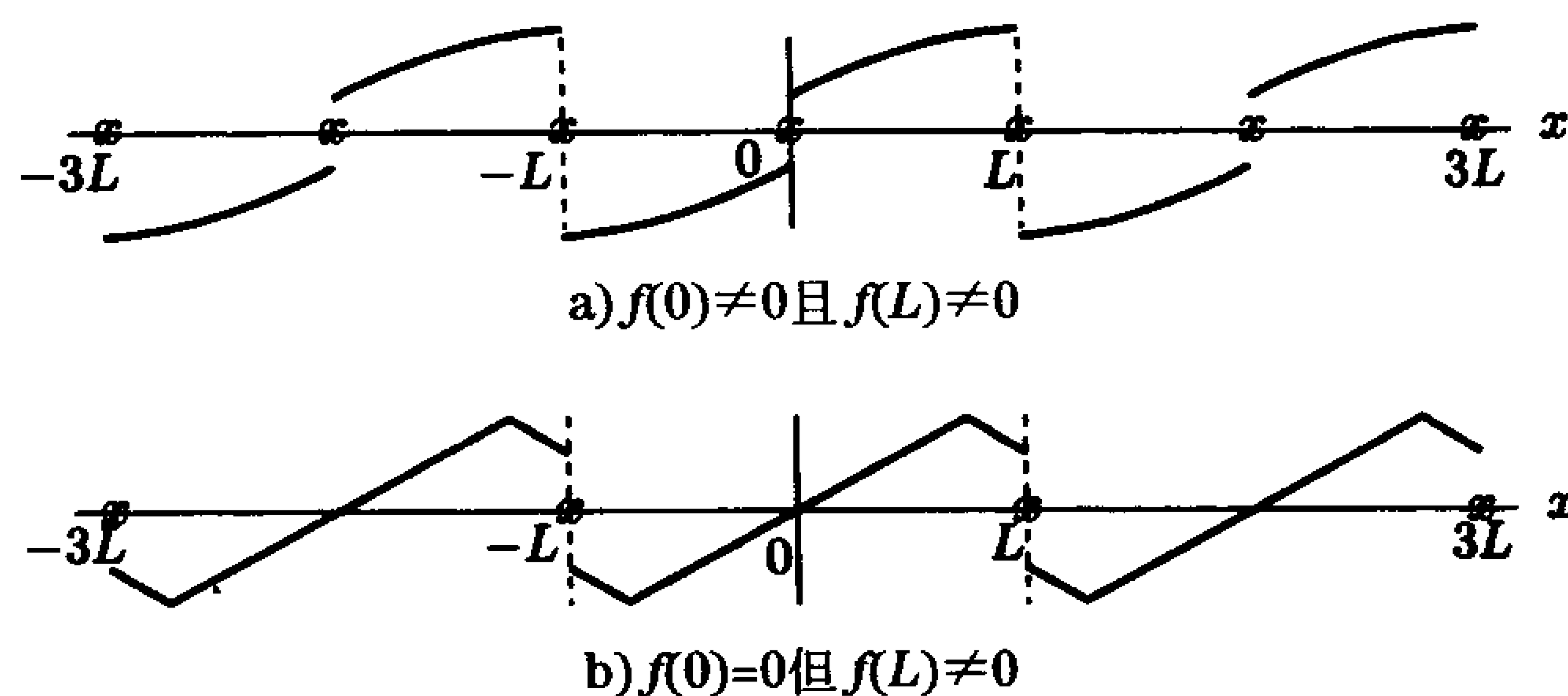


图 3.3.18 连续函数的傅里叶余弦级数

把这个结果与傅里叶正弦级数的结果相比较．在图 3.3.19 中，考虑了四个例子，所有函数在 $0\leqslant x\leqslant L$ 上都是连续的．由前三个图可见，连续函数的傅里叶正弦级数有可能是间断的．因此

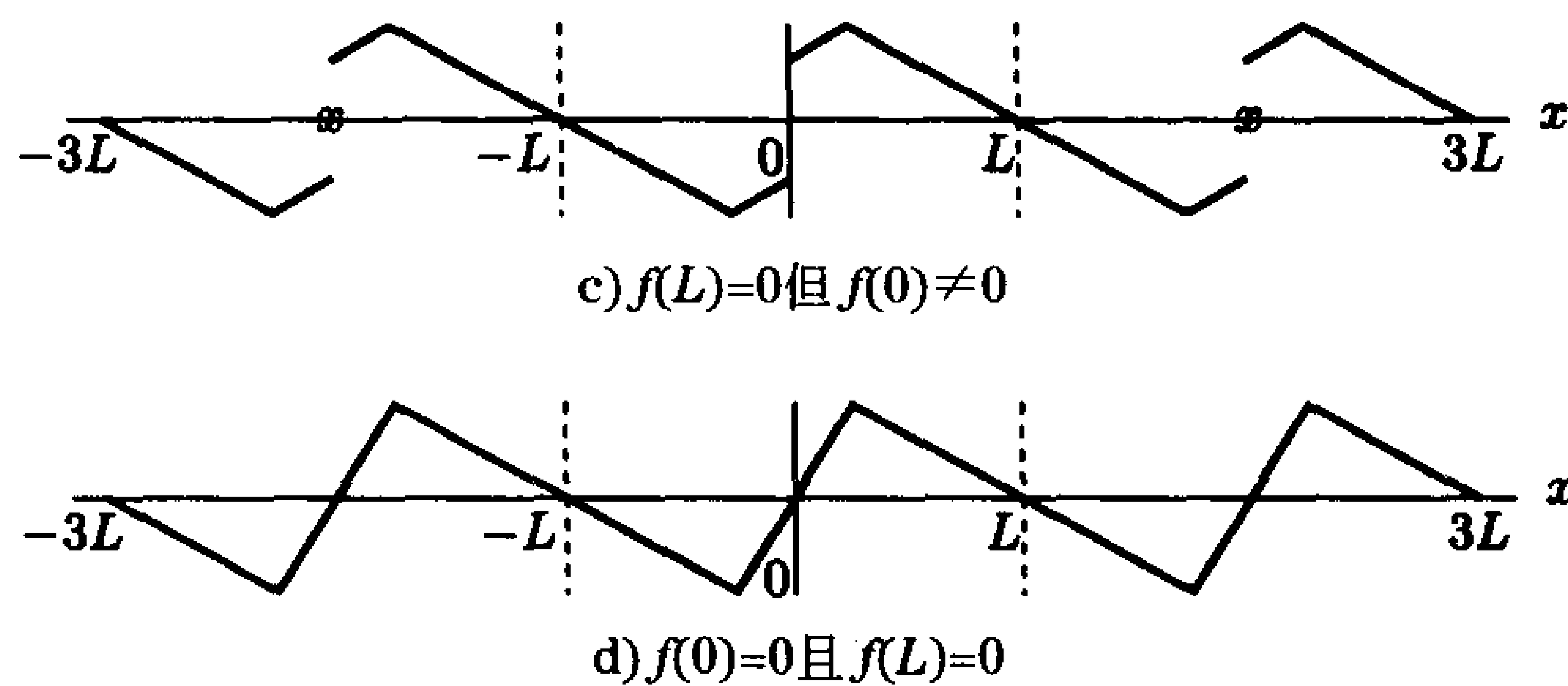
> 对分段光滑的函数 $f(x)$，$f(x)$ 的傅里叶正弦级数是连续的且在 $0\leqslant x\leqslant L$ 上收敛于 $f(x)$，当且仅当 $f(x)$ 是连续的，且既有 $f(0)=0$，又有 $f(L)=0$.



a) $f(0)\neq 0$ 且 $f(L)\neq 0$

b) $f(0)=0$ 但 $f(L)\neq 0$

图 3.3.19 连续函数的傅里叶正弦级数



c) $f(L)=0$但$f(0)\neq 0$

d) $f(0)=0$且$f(L)=0$

图 3.3.19 （续）

如果$f(0)\neq 0$，则$f(x)$的奇延拓在$x=0$处有跳跃间断，如图 3.3.19a 和 3.3.19c 所示．如果$f(L)\neq 0$，则在$x=-L$处的奇延拓与$f(L)$具有相反的符号．所以，如果$f(L)\neq 0$，周期延拓在端点处不连续，如图 3.3.19a 和 3.3.19b 所示．

习题 3.3

112 ~ 113

3.3.1 对下列函数，画出$f(x)$，$f(x)$的傅里叶级数，$f(x)$的傅里叶正弦级数和$f(x)$的傅里叶余弦级数的草图．

(a) $f(x)=1$

(b) $f(x)=1+x$

(c) $f(x)=\begin{cases} x & x<0 \\ 1+x & x>0 \end{cases}$

*(d) $f(x)=e^{x}$

(e) $f(x)=\begin{cases} 2 & x<0 \\ e^{-x} & x>0 \end{cases}$

3.3.2 对下列函数，画$f(x)$的傅里叶正弦级数的草图，并求其傅里叶系数．

(a) $f(x)=\cos \pi x/L$ [验证公式(3.3.13)．]

(b) $f(x)=\begin{cases} 1 & x<L/6 \\ 3 & L/6<x<L/2 \\ 0 & x>L/2 \end{cases}$

(c) $f(x)=\begin{cases} 0 & x<L/2 \\ x & x>L/2 \end{cases}$

*(d) $f(x)=\begin{cases} 1 & x<L/2 \\ 0 & x>L/2 \end{cases}$

3.3.3 对下列函数，画$f(x)$的傅里叶正弦级数的草图．并画出傅里叶正弦级数的有限非零项(至少前两项)和的粗略草图：

(a) $f(x)=\cos \pi x/L$ [使用公式(3.3.13)．]

(b) $f(x)=\begin{cases} 1 & x<L/2 \\ 0 & x>L/2 \end{cases}$

(c) $f(x)=x$ [使用公式(3.3.12)．]

3.3.4 画$f(x)=\sin \pi x/L$的傅里叶余弦级数的草图．并作简要讨论．

3.3.5 对下列函数，画$f(x)$的傅里叶余弦级数的草图，并求其傅里叶系数：

(a) $f(x)=x^{2}$

(b) $f(x)=\begin{cases} 1 & x<L/6 \\ 3 & L/6<x<L/2 \\ 0 & x>L/2 \end{cases}$

(c) $f(x)=\begin{cases} 0 & x<L/2 \\ x & x>L/2 \end{cases}$

3.3.6 对下列函数，画$f(x)$的傅里叶余弦级数的草图．再大致画出傅里叶余弦级数的有限非零项(至少前两项)和的草图：

(a) $f(x)=x$ [使用公式(3.3.22)和(3.3.23).]

(b) $f(x)=\begin{cases}0 & x<L/2\\ 1 & x>L/2\end{cases}$ [小心使用公式(3.2.6)和(3.2.7).]

(c) $f(x)=\begin{cases}0 & x<L/2\\ 1 & x>L/2\end{cases}$ [提示：把(b)和(c)的函数相加.]

114

3.3.7 证明 e^x 是一个偶函数与一个奇函数的和.

3.3.8 (a)求任意 $f(x)$ 的偶延拓公式. 并与 $f(x)$ 偶部的公式相比较.

(b)对 $f(x)$ 的奇延拓和 $f(x)$ 的奇部，做同样的工作.

(c)计算并画(a)和(b)的四个函数，如果

$$f(x)=\begin{cases}x & x>0\\ x^2 & x<0.\end{cases}$$

在图上将 $f(x)$ 的偶部和奇部相加. 有何发现？类似地，将偶延拓和奇延拓相加，又发生了什么？

3.3.9 $f(x)$ 的傅里叶正弦级数与 $f(x)$ 的傅里叶余弦级数之和是什么？[$f(x)$ 的偶延拓与奇延拓之和是什么？]

*3.3.10 如果 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ e^{-x} & x>0\end{cases}$，$f(x)$ 的偶部和奇部是什么？

3.3.11 给定 $f(x)$ 的草图，描述画 $f(x)$ 的偶部和奇部草图的步骤.

3.3.12 (a)作图说明，在 $0\leqslant x\leqslant L$ 上任意函数的傅里叶正弦级数的偶数项(n 为偶数)关于 $x=L/2$ 是奇的(反对称).

(b)考虑关于 $x=L/2$ 的奇函数 $f(x)$. 证明 $f(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant L$ 上的傅里叶正弦级数的奇系数(n 为奇数)是零.

*3.3.13 考虑关于 $x=L/2$ 的偶函数 $f(x)$. 证明 $f(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant L$ 上的傅里叶正弦级数的偶系数(n 为偶数)是零.

3.3.14 (a)考虑关于 $x=L/2$ 的偶函数 $f(x)$. 证明 $f(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant L$ 上的傅里叶余弦级数的奇系数(n 为奇数)是零.

(b)通过考虑 $f(x)$ 在区间 $0\leqslant x\leqslant L/2$ 上的傅里叶余弦级数，解释(a)的结果.

3.3.15 考虑关于 $x=L/2$ 的奇函数 $f(x)$. 证明 $f(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant L$ 上的傅里叶余弦级数的偶系数(n 为偶数)是零.

3.3.16 除了 $-L\leqslant x\leqslant L$ 外，傅里叶级数还可以定义在其他的区间上. 假设 $g(y)$ 定义在 $a\leqslant y\leqslant b$ 上. 利用周期为 $b-a$ 的周期三角函数表示 $g(y)$. 确定系数公式. $\left[\text{提示：利用线性变换 } y=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2L}x.\right]$

115

3.3.17 考虑

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

(a)算出其积分值.

(b)利用 $1/(1+x^2)$ 的泰勒级数(本身为几何级数)得到该积分的一个无穷级数.

(c)由(a)与(b)的结果相等，推导出 π 的一个公式.

3.3.18 考虑连续函数.

(a)在什么条件下，对 $-L\leqslant x\leqslant L$ 上的所有 x，$f(x)$ 等于其傅里叶级数？

(b)在什么条件下，对 $0\leqslant x\leqslant L$ 上的所有 x，$f(x)$ 等于其傅里叶正弦级数？

(c)在什么条件下，对 $0\leqslant x\leqslant L$ 上的所有 x，$f(x)$ 等于其傅里叶余弦级数？

3.4 傅里叶级数的逐项微分

在用分离变量法求解偏微分方程时，齐次边界条件有时会暗示出所求的解是无穷正弦级数，或者是无穷余弦级数. 例如，考虑带有零边界条件的一维热传导方程. 如前所述，想要求

解初边值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.4.1}$$

$$u(0,t) = 0,\quad u(L,t) = 0,\quad u(x,0) = f(x). \tag{3.4.2}$$

通过分离变量法结合叠加原理(取解的有限线性组合)，可知

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{e}^{-(n\pi/L)^2 kt}$$

满足偏微分方程和两个齐次边界条件. 为满足初值条件，一般需要一个无穷级数. 那么无穷级数

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{e}^{-(n\pi/L)^2 kt} \tag{3.4.3}$$

满足初边值问题吗？傅里叶正弦级数理论表明，可以求出傅里叶系数 B_n，以满足任何(分段光滑的)初值条件$\left[\text{即 } B_n = 2/L\int_0^L f(x)\sin n\pi x/L\mathrm{d}x\right]$. 为确定无穷级数是否的确满足偏微分方程， 116 把(3.4.3)代入(3.4.1). 如果无穷傅里叶级数可以被逐项微分，则

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\sum_{n=1}^{\infty} k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{e}^{-(n\pi/L)^2 kt}$$

和

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{e}^{-(n\pi/L)^2 kt}.$$

那么，如果逐项微分对傅里叶级数成立，则由分离变量法得到的无穷傅里叶级数，满足热传导方程($\partial u/\partial t = k\partial^2 u/\partial x^2$).

无穷级数的逐项微分. 不幸的是，无穷级数(即使是收敛的无穷级数)并不总是可以逐项微分的. 如下式并不总是正确的：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}x};$$

交换微分运算和无穷求和运算也并不总是正确的. 然而，在求解偏微分方程时，对无穷傅里叶级数所做的步骤却都是正确的. 下面将陈述并证明一些需要的定理，这些定理恰与在求解偏微分方程时引入的傅里叶级数类型的逐项微分的正确性有关.

反例. 即使对傅里叶级数而言，逐项微分也并不总是正确的. 为说明逐项微分的困难，考虑 x(在区间 $0 \leqslant x \leqslant L$ 上)的傅里叶正弦级数，如图 3.4.1 所示.

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi x}{L},\quad \text{在}\quad 0 \leqslant x \leqslant L \text{ 上},$$

与前面所得到的一样[见(3.3.11)和(3.3.12)]. 如果微分左边的函数，则得到函数 1. 然而，如果形式地对右边函数逐项微分，则得到

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cos\frac{n\pi x}{L}.$$

这是一个余弦级数，但它并不是 $f(x) = 1$ 的余弦级数

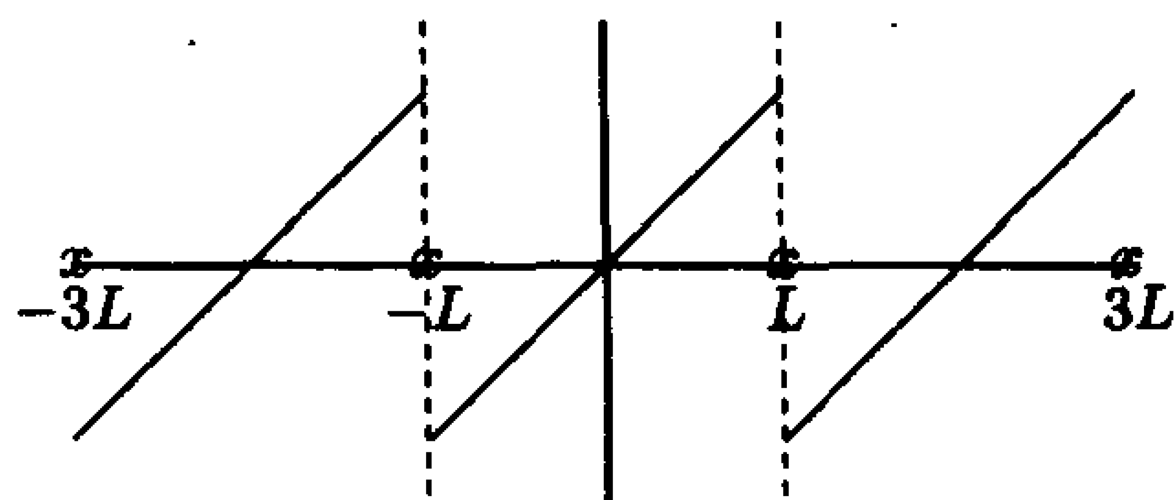


图 3.4.1 $f(x) = x$ 的傅里叶正弦级数

[117] (1 的余弦级数恰为 1). 所以，图 3.4.1 是一个不能逐项微分的例子[⊖].

傅里叶级数. 可以断言：每当$f(x)$的傅里叶级数有跳跃间断时，这个困难就会出现. 在这些情形下，逐项微分就不正确. 但有下面的结果(并在习题中证明)

一个连续的傅里叶级数可以逐项微分，如果$f'(x)$是分段光滑的.

如果记得傅里叶级数连续的条件，这个定理还有另外一种形式：

如果$f(x)$是分段光滑和连续的，且$f(-L)=f(L)$，则函数$f(x)$的傅里叶级数可以逐项微分.

逐项微分的结果是$f'(x)$的傅里叶级数，该级数可能不是连续的. 在求解偏微分方程时，正弦级数和余弦级数的类似结果更值得关注.

傅里叶余弦级数. 对傅里叶余弦级数，

如果$f'(x)$是分段光滑的，则$f(x)$的连续傅里叶余弦级数可以逐项微分.

逐项微分的结果是$f'(x)$的傅里叶正弦级数，该级数可能不是连续的. 回想一下，只要$f(x)$连续，其傅里叶余弦级数就连续. 所以，这个定理可以写成下面的替换形式：

[118]

如果$f'(x)$是分段光滑的，则连续函数$f(x)$的傅里叶余弦级数可以被逐项微分.

这些论述应用到$f(x)$的傅里叶余弦级数：

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi x}{L}}\quad 0\leqslant x\leqslant L,\tag{3.4.4}$$

其中 = 号意味着对所有$x(0\leqslant x\leqslant L)$，无穷级数收敛于$f(x)$，因为$f(x)$是连续的. 从数学上看，这些定理说明逐项微分是成立的，

$$f'(x)\sim-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{L}\right)A_n\sin\frac{n\pi x}{L},\tag{3.4.5}$$

其中 ~ 意味着在$f'(x)$的连续点，傅里叶正弦级数是等式，而在$f'(x)$傅里叶正弦级数的间断点，级数收敛于的平均值.

例. 考虑x的傅里叶余弦级数[见(3.3.21)、(3.3.22)和(3.3.23)]，如图 3.4.2 所示.

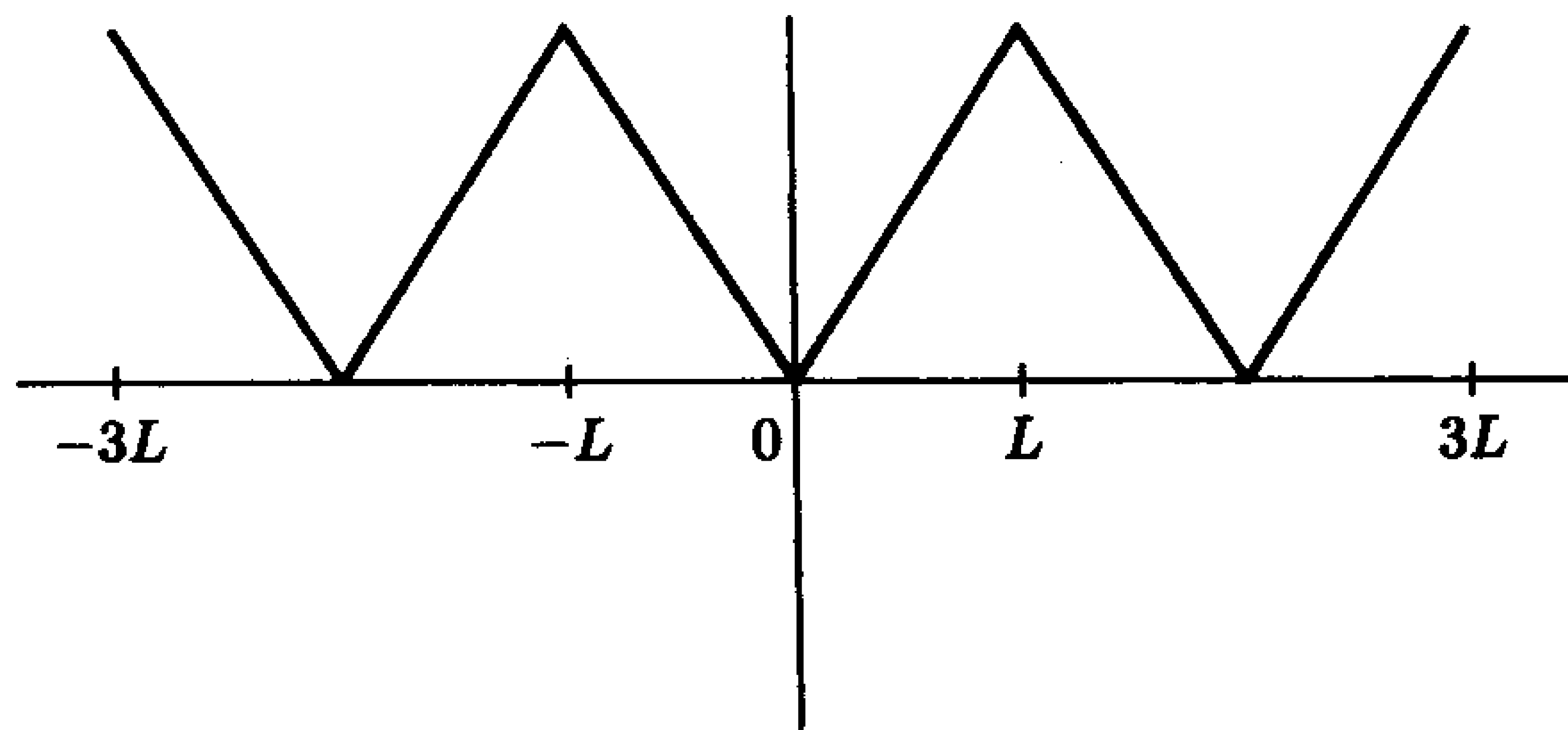


图 3.4.2 $f(x)=x$的傅里叶余弦级数

⊖ 另外，所产生的无穷级数甚至处处不收敛，因为第n项不趋近于零.

$$x = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\sum_{n\text{仅为奇数}} \frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leqslant x \leqslant L, \tag{3.4.6}$$

注意，这个级数在 $0\leqslant x\leqslant L$ 上的连续性导致了(3.4.6)中的 = 号. 此傅里叶余弦级数的导数见图 3.4.3：它是 $f(x)=1$ 的傅里叶正弦级数. 而 $f(x)=1$ 的傅里叶正弦级数，可以由 $f(x)=x$ 的傅里叶余弦级数逐项微分得到. 假设(3.4.6)的逐项微分成立，则

$$1 \sim \frac{4}{\pi}\sum_{n\text{仅为奇数}} \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{3.4.7}$$

119

事实上，它就是正确的[见(3.3.8)].

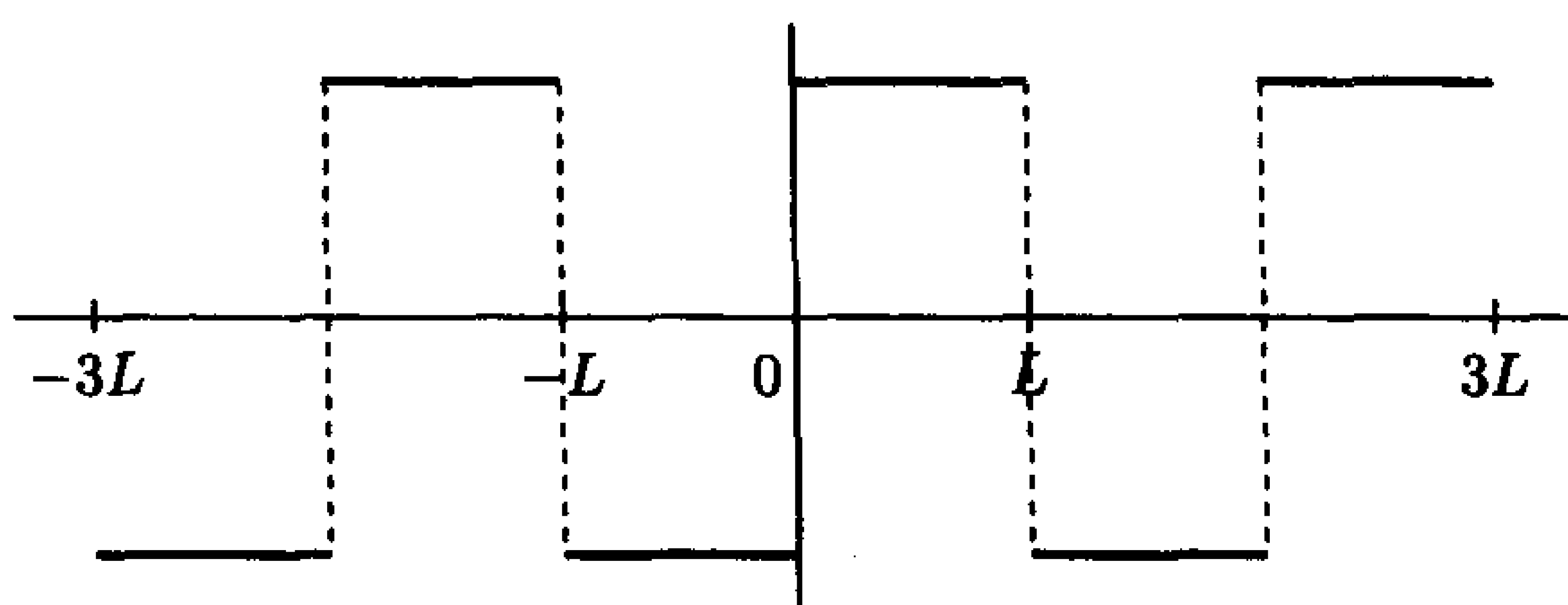


图 3.4.3 df/dx 的傅里叶正弦级数

傅里叶正弦级数. 对于傅里叶正弦级数，类似的结果也成立：

> 如果 $f'(x)$ 是分段光滑的，则 $f(x)$ 的连续傅里叶正弦级数可以被逐项微分.

然而，如果 $f(x)$ 是连续的，只有当 $f(0)=0$ 和 $f(L)=0$ 时，傅里叶正弦级数才是连续的. 所以，在逐项微分傅里叶余正弦级数时一定要小心. 特别地，

> 如果 $f'(x)$ 是分段光滑的，则只有当 $f(0)=0$ 和 $f(L)=0$ 时，连续函数 $f(x)$ 的傅里叶正弦级数才可以被逐项微分.

证明. 这些定理的证明都是相当类似的. 这里只给出一个证明，它对更好地了解傅里叶级数及其可微性是有帮助的. 下面要证明，在 $f'(x)$ 是分段光滑的和 $f(0)=0=f(L)$ 的条件下，对连续函数 $f(x)$ 的傅里叶正弦级数逐项微分的正确性：

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{3.4.8}$$

其中 B_n 在后面给出. 只有当 $f(0)=0=f(L)$ 时，(3.4.8)中的等号成立. 如果 $f'(x)$ 是分段光滑的，则 $f'(x)$ 有傅里叶余弦级数

$$f'(x) \sim A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \tag{3.4.9}$$

其中 A_0 和 A_n 的表达式为(3.4.10)和(3.4.11). 这个级数在 $f'(x)$ 的间断点处不收敛于 $f'(x)$. 我们可以成功地证明傅里叶正弦级数是能被逐项微分的，如果能够验证下式：

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{L}\right) B_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

120

[即 $A_0=0$ 和 $A_n=(n\pi/L)B_n$]. 这个傅里叶余弦级数的系数是由(3.4.9)导出的. 由分部积分得到

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f'(x)\,dx = \frac{1}{L}[f(L) - f(0)] \tag{3.4.10}$$

$$(n \neq 0) \quad A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f'(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\left[f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L + \frac{n\pi}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right]. \tag{3.4.11}$$

而由(3.4.8)，$f(x)$的傅里叶正弦级数系数是B_n，有

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,$$

所以，对于$n \neq 0$

$$A_n = \frac{n\pi}{L}B_n + \frac{2}{L}[(-1)^n f(L) - f(0)]. \tag{3.4.12}$$

所以，通过比较傅里叶余弦系数，就看到只有当$f(L) - f(0) = 0$(故$A_0 = 0$)和$(-1)^n f(L) - f(0) = 0$[故$A_n = (n\pi/L)B_n$]都成立时，傅里叶正弦级数才可以被逐项微分. 而要这些条件都成立必须有

$$f(0) = f(L) = 0,$$

这正好是连续函数的傅里叶正弦级数连续的条件. 这样，证明就完成了. 不过，该证明过程给出了更多的信息. 即，给出了当连续函数的傅里叶正弦级数间断时，这个级数的求导公式. 我们有

如果$f'(x)$是分段光滑的，则连续函数$f(x)$的傅里叶正弦级数

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

一般不可以被逐项微分. 然而

$$f'(x) \sim \frac{1}{L}[f(L) - f(0)] + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n\pi}{L}B_n + \frac{2}{L}((-1)^n f(L) - f(0))\right]\cos\frac{n\pi x}{L}. \tag{3.4.13}$$

在这个证明里，表面上看不需要$f(x)$是连续的. 然而，为了推导出(3.4.9)使用了分部积分法. 在一般微积分中，对分部积分公式的陈述都要求$u(x)$和$v(x)$及其导数是连续的. 这样限制得就太多了. 而如习题中所说明的那样，只要$u(x)$和$v(x)$连续，分部积分就成立. 不必要求它们的导数是连续的. 因此，只要$f(x)$是连续的，分部积分的结果就成立.

121

例. 考虑$f(x) = x$的傅里叶正弦级数，

$$x \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{3.4.14}$$

由前面的反例知道，$(d/dx)x = 1$没有由(3.4.14)的逐项微分产生的傅里叶余弦级数，因为$f(L) \neq 0$. 然而，因为$f(x)$是连续的[且$f'(x)$是分段光滑的]，(3.4.13)是适用的. 注意到$f(0) = 0$，$f(L) = L$和$(n\pi/L)B_n = 2(-1)^{n+1}$，就可得$df/dx$的傅里叶余弦级数是

$$\frac{df}{dx} \sim 1.$$

常数函数1确实是df/dx的傅里叶余弦级数，因为$f = x$蕴涵着$df/dx = 1$. 所以，当已知$f(x)$的

傅里叶正弦级数时，即使$f(0)\neq 0$和/或$f(L)\neq 0$，(3.4.13)的右边也给出了$f'(x)$的傅里叶余弦级数的正确表达式.

特征函数展开法. 现在看一下，如何把有关逐项微分傅里叶级数的条件的结论，应用到偏微分方程的研究中. 考虑在$x=0$和$x=L$处带零边界条件的热传导方程(3.4.1). 要证明，(3.4.3)是该问题解的正确的无穷级数表示. 这里利用求得(3.4.3)的另一种方法来说明这点；该方法称为特征函数展开法，其重要性是，它可以用于有热源或非齐次边界条件的情形(见习题3.4.9~3.4.12和第7章). 先假定解$u(x, t)$是连续的，$\partial u/\partial t$，$\partial u/\partial x$和$\partial^2 u/\partial x^2$也是连续的. 将未知解$u(x, t)$用边值问题(带齐次边界条件)的特征函数展开. 在本例中，特征函数是$\sin n\pi x/L$，这样每次所使用的傅里叶正弦级数是

$$\boxed{u(x,t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}B_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L};}\tag{3.4.15}$$

傅里叶正弦系数B_n将依赖于时间，即$B_n=B_n(t)$.

要满足初值条件[$u(x, 0)=f(x)$]，就要有

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}B_n(0)\sin\frac{n\pi x}{L},\tag{3.4.16}$$

122

初始地确定其傅里叶正弦系数

$$B_n(0)=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x.\tag{3.4.17}$$

下面要研究$u(x, t)$的傅里叶正弦级数(3.4.15)是否满足热传导方程，$\partial u/\partial t=k\partial^2 u/\partial x^2$. 为此就要微分傅里叶正弦级数. 有关逐项微分的结果正是在这里很有用.

首先，需要计算关于x的两个导数. 如果$u(x, t)$是连续的，则$u(x, t)$的傅里叶正弦级数可以被逐项微分，要求$u(0, t)=0$和$u(L, t)=0$，这正好是$u(x, t)$的边界条件，所以，由(3.4.15)得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{L}B_n(t)\cos\frac{n\pi x}{L}.\tag{3.4.18}$$

因为也假定了$\partial u/\partial x$连续，在(3.4.18)中等号成立. 就有$\partial u/\partial x$的傅里叶余弦级数可以逐项微分，这就给出了

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sim-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 B_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}.\tag{3.4.19}$$

注意分离变量解的重要性. 对正弦级数的逐项微分恰好发生在允许正弦级数逐项微分的边界条件出现的阶段. 余弦级数出现在无边界条件的时候，这与傅里叶余弦级数不需要任何附加条件就可以微分的事实相符. 为了能将傅里叶正弦级数代入偏微分方程，只需要计算$\partial u/\partial t$. 如果还可以对t逐项微分，则

$$\frac{\partial u}{\partial t}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}B_n}{\mathrm{d}t}\sin\frac{n\pi x}{L}.\tag{3.4.20}$$

如果证明了这最后的逐项微分，傅里叶正弦级数(3.4.15)要满足偏微分方程，就需要

$$\frac{\mathrm{d}B_n}{\mathrm{d}t}=-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 B_n(t).\tag{3.4.21}$$

傅里叶正弦系数 $B_n(t)$ 满足一阶常系数线性微分方程. (3.4.21)的解是

$$B_n(t) = B_n(0)\mathrm{e}^{-(n\pi/l)^2kt},$$

其中 $B_n(0)$ 由(3.4.17)给出. 于是就又推导出了(3.4.3)是正确的, 验证了分离变量法.

123

那么能证明对参数 t 的逐项微分吗? 下面的定理叙述了该运算成立的条件:

如果连续函数 $u(x,t)$ 的 $\partial u/\partial t$ 是分段光滑的,则其(依赖于一个参数 t 的) 傅里叶级数

$$u(x,t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n(t)\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}\right]$$

对参数 t 可以逐项微分,即

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) \sim a_0'(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n'(t)\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n'(t)\sin\frac{n\pi x}{L}\right].$$

这里省略证明(参见习题3.4.7), 该证明依赖于下列事实: 如果 g 是连续的, 则

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-L}^{L} g(x,t)\mathrm{d}x = \int_{-L}^{L}\frac{\partial g}{\partial t}\mathrm{d}x.$$

总之, 已经验证了傅里叶正弦级数确实是满足边界条件 $u(0, t)=0$ 和 $u(L, t)=0$ 的热传导方程的解. 对该问题我们有两个理由选择傅里叶正弦级数. 第一, 分离变量法蕴涵着, 如果 $u(0, t)=0$ 和 $u(L, t)=0$, 则恰当的特征函数是 $\sin n\pi x/L$. 第二, 证明了所有对无穷正弦级数的微分都是正确的, 当然需要假定 $u(0, t)=0$ 和 $u(L, t)=0$, 而这恰是物理边界条件.

习题 3.4

3.4.1 已知分部积分公式

$$\int_a^b u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

对于连续且具有连续一阶导数的函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是成立的. 下面假定 u, v, $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ 只在 $a\leqslant x\leqslant c$ 和 $c\leqslant x\leqslant b$ 上连续, 这四个函数在 $x=c$ 处可能有跳跃间断.

*(a)推导出 $\int_a^b u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$ 用 $\int_a^b v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$ 表达的公式.

(b)证明: 如果 u 和 v 在 $x=c$ 之外是连续的, 这个公式可简化为分部积分公式. 不必要求 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ 在 $x=c$ 处连续.

3.4.2 假设 $f(x)$ 和 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ 是分段光滑的. 证明: 如果 $f(x)$ 的傅里叶级数连续, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数可以逐项微分.

124

3.4.3 假设 $f(x)$ 连续[仅在 $x=x_0$ 处有跳跃间断: $f(x_0^-)=\alpha$ 和 $f(x_0^+)=\beta$], $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ 分段光滑.

*(a)用 $f(x)$ 的傅里叶余弦级数系数表示 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ 的傅里叶正弦级数.

(b)用 $f(x)$ 的傅里叶正弦级数系数表示 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ 的傅里叶余弦级数.

3.4.4 假设 $f(x)$ 和 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ 分段光滑.

(a)证明仅当 $f(0)=0$ 和 $f(L)=0$ 时, 连续函数 $f(x)$ 的傅里叶正弦级数才可以逐项微分.

(b)证明连续函数 $f(x)$ 的傅里叶余弦级数总能够逐项微分.

3.4.5 利用(3.3.13)求 $\sin\pi x/L$ 的傅里叶余弦级数.

3.4.6 在下面的证明中有些错误. 找出这些错误, 并加以改正.

本题中, 试求 e^x 的傅里叶余弦级数的系数:

$$e^x = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L}. \tag{3.4.22}$$

两边求导得到

$$e^x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} A_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

这是 e^x 的傅里叶正弦级数. 再次求导给出

$$e^x = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 A_n \cos \frac{n\pi x}{L}. \tag{3.4.23}$$

因为(3.4.22)和(3.4.23)两式都给出了 e^x 的傅里叶余弦级数，它们一定相同. 所以，

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= 0 \\ A_n &= 0 \end{aligned}\right\} \text{(显然错误!)}$$

通过改正这里的错误，不使用一般方法，即 $A_n = 2/L\int_0^L e^x \cos n\pi x/L dx$，就应该能够得到 A_0 和 A_n.

3.4.7 证明：如果 $\partial u/\partial t$ 是分段光滑的，则连续函数 $u(x, t)$ 的傅里叶级数关于参数 t 可以逐项微分. 125

3.4.8 考虑

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

满足

$$\partial u/\partial x(0,t) = 0, \quad \partial u/\partial x(L,t) = 0 \quad \text{和} \quad u(x,0) = f(x).$$

按下列方式求解. 寻找傅里叶余弦级数形式的解. 假定 u 和 $\partial u/\partial x$ 是连续的，$\partial^2 u/\partial x^2$ 和 $\partial u/\partial t$ 是分段光滑的. 证明所涉及的无穷级数的(逐项)求导都是可行的.

*3.4.9 考虑带有已知源 $q(x, t)$ 的热传导方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x,t) \quad \text{带有 } u(0,t) = 0 \quad \text{和} \quad u(L,t) = 0.$$

假定 $q(x, t)$(对每个 $t>0$)是 x 的分段光滑函数. 还假定(对 $t>0$)u 和 $\partial u/\partial x$ 是 x 的连续函数，$\partial^2 u/\partial x^2$ 和 $\partial u/\partial t$ 是分段光滑的. 则

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

$b_n(t)$ 满足的常微分方程是什么？不用解出这个微分方程.

3.4.10 如果 $\partial u/\partial x(0, t) = 0$，$\partial u/\partial x(L, t) = 0$，重做习题 3.4.9.

3.4.11 考虑(具有稳定热源的)非齐次热传导方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x).$$

求解这个方程，其中初值条件是

$$u(x,0) = f(x),$$

边界条件是

$$u(0,t) = 0 \quad \text{和} \quad u(L,t) = 0.$$

假定(具有连续导数的)连续解存在. [提示：把解展成为傅里叶正弦级数(即使用特征函数展开方法). 把 $g(x)$ 展成为傅里叶正弦级数. 求出解的傅里叶正弦级数. 并证明所涉及的级数关于 x 的逐项求导是可行的.]

*3.4.12 求解下列非齐次问题： 126

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t} + e^{-2t}\cos\frac{3\pi x}{L} \quad [\text{假定 } 2 \neq k(3\pi/L)^2]$$

满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \quad \text{和} \quad u(x,0) = f(x).$$

使用下面的方法．寻找如傅里叶余弦级数形式的解．证明涉及的级数的逐项求导是可行的(假定有适当的连续性)．

3.4.13 考虑

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

满足

$$u(0,t)=A(t),\quad u(L,t)=0\quad 和\quad u(x,0)=g(x).$$

假定 $u(x,t)$ 有傅里叶正弦级数．确定傅里叶系数的微分方程(假定有适当的连续性)．

3.5 傅里叶级数的逐项积分

在对无穷级数做数学运算时，一定要记住，有限级数的一些性质对无穷级数并不成立．特别地，3.4 节表明，对无穷傅里叶级数的逐项微分一定要特别小心．然而，下列定理表明其实不必担忧对傅里叶级数的积分：

> 分段光滑的 $f(x)$ 的傅里叶级数总是可以被逐项积分的，其结果是一个收敛的无穷级数，该级数在 $-L\leqslant x\leqslant L$ 上总是收敛于 $f(x)$ 的积分(即使原来的傅里叶级数有跳跃间断)．

明显地，逐项积分形成的新级数是连续的．然而，新级数可能不是傅里叶级数．

具体地说，假设 $f(x)$ 分段光滑，在区域 $-L\leqslant x\leqslant L$ 上(不一定是连续的)有傅里叶级数：

$$f(x)\sim a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{3.5.1}$$

下面证明可以逐项积分这个级数：

127

$$\int_{-L}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t\sim a_0(x+L)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-L}^{x}\cos\frac{n\pi t}{L}\mathrm{d}t+b_n\int_{-L}^{x}\sin\frac{n\pi t}{L}\mathrm{d}t\right).$$

完成积分后得到

$$\int_{-L}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t\sim a_0(x+L)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{n\pi/L}\sin\frac{n\pi x}{L}+\frac{b_n}{n\pi/L}\left(\cos n\pi-\cos\frac{n\pi x}{L}\right)\right]. \tag{3.5.2}$$

实际上是要证明，上面的式子对 = 号成立．如果傅里叶级数从 $-L$ 到 x 的逐项积分成立，则对任意定积分也是成立的，因为

$$\int_a^b=\int_{-L}^b-\int_{-L}^a.$$

例．逐项积分有一些有趣的应用．回想 $f(x)=1$ 的傅里叶正弦级数是

$$1\sim\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{L}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{L}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{L}+\cdots\right), \tag{3.5.3}$$

其中使用了 ~，因为(3.5.3)只在 $0<x<L$ 上是等式．从 0 到 x 逐项积分给出

$$x\sim\frac{4L}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)-\frac{4L}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{L}+\frac{\cos 3\pi x/L}{3^2}+\frac{\cos 5\pi x/L}{5^2}+\cdots\right),\quad 0\leqslant x\leqslant L, \tag{3.5.4}$$

此时，由定理，即可取 = 号．显然，(3.5.4)应该是函数 x 的傅里叶余弦级数．它通过对 $f(x)=1$ 的傅里叶正弦级数的积分得到．然而，在(3.5.4)中出现了一个常数项无穷级数；它是 x 的傅里叶余弦级数的常数项．这样，就可以计算该无穷级数，

$$\frac{4L}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)=\frac{1}{L}\int_0^L x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}L.$$

于是，得到了 x 的傅里叶余弦级数的通常形式，

$$x=\frac{L}{2}-\frac{4L}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{L}+\frac{\cos 3\pi x/L}{3^2}+\frac{\cos 5\pi x/L}{5^2}+\cdots\right),\quad 0\leqslant x\leqslant L. \tag{3.5.5}$$

由旧级数推导新级数的过程可以继续做下去. 从 0 到 x 积分(3.5.5)给出

$$\frac{x^2}{2}=\frac{L}{2}x-\frac{4L^2}{\pi^3}\left(\sin\frac{\pi x}{L}+\frac{\sin 3\pi x/L}{3^3}+\frac{\sin 5\pi x/L}{5^3}+\cdots\right). \tag{3.5.6}$$

这个例子说明，逐项积分一个傅里叶级数不一定得到另一个傅里叶级数. 然而，可以看出(3.5.6)提供了下面的两个结果： [128]

1. $x^2/2-(L/2)x$ 的傅里叶正弦级数.

2. $x^2/2$ 的傅里叶正弦级数，其中先要有 x 的傅里叶正弦级数[见(3.3.11)和(3.3.12)].

另一个方法是做不定积分. 在这种情况下，一定要包含和计算一个任意常数. 例如，重新考虑 $f(x)=1$ 的傅里叶正弦级数(3.5.3). 通过逐项不定积分，导出 x 的傅里叶余弦级数，

$$x=c-\frac{4L}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{L}+\frac{\cos 3\pi x/L}{3^2}+\frac{\cos 5\pi x/L}{5^2}+\cdots\right).$$

这里的积分常数不是任意的；一定要求出它. 其中 c 还是 x 的傅里叶余弦级数的常数项，$c=(1/L)\int_0^L x\mathrm{d}x=L/2$.

有关积分傅里叶级数的证明. 考虑

$$F(x)=\int_{-L}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.5.7}$$

由于 $f(x)$ 是分段光滑的，这个积分是 x 的连续函数. 只有当 $F(L)=F(-L)$ 时，$F(x)$ 才有连续的傅里叶级数[否则，傅里叶级数的周期性将使得傅里叶级数在端点 $x=\pm L$ 处不收敛于 $F(x)$]. 然而，由定义(3.5.7)，

$$F(-L)=0\quad 和\quad F(L)=\int_{-L}^{L}f(t)\,\mathrm{d}t=2La_0.$$

所以，$F(x)$ 一般没有连续的傅里叶级数. 图 3.5.1 表明通常 $F(-L)\neq F(L)$. 然而，考虑连接点 $F(-L)$ 到 $F(L)$ 的直线，$y=a_0(x+L)$. 定义 $G(x)$ 为 $F(x)$ 和该直线之间的差

$$G(x)\equiv F(x)-a_0(x+L), \tag{3.5.8}$$

$G(x)$ 在两个端点 $x=\pm L$ 处将为零

$$G(-L)=G(L)=0,$$

如图 3.5.1 所示. $G(x)$ 也是连续的. 于是，$G(x)$ 的傅里叶级数就等于 $G(x)$：

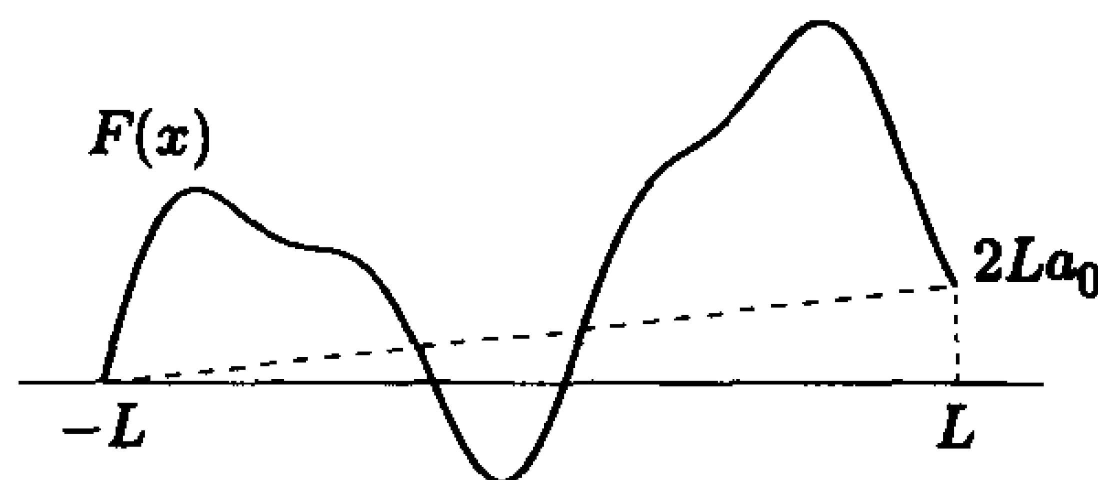


图 3.5.1 $F(-L)\neq F(L)$ 的 $F(x)$

$$G(x)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi x}{L}+B_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{3.5.9}$$

其中 = 号是要强调的. 这些傅里叶系数是

$$A_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}[F(x)-a_0(x+L)]\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x\quad(n\neq 0).$$ [129]

因为 x 是奇的，x 项可以去掉 $\left(即\int_{-L}^{L} x\cos n\pi x/L\mathrm{d}x = 0\right)$. 按下面的取法：

$$u = F(x) - a_0 L \qquad \mathrm{d}v = \cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x \quad v = \frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L},$$

做分部积分给出表达式

$$A_n = \frac{1}{L}\left[(F(x) - a_0 L)\frac{\sin n\pi x/L}{n\pi/L}\bigg|_{-L}^{L} - \frac{L}{n\pi}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x\right] = -\frac{b_n}{n\pi/L}, \tag{3.5.10}$$

其中，可以看出 b_n 是 $f(x)$ 的傅里叶正弦系数. 类似地，可以证明(留作习题)

$$B_n = \frac{a_n}{n\pi/L},$$

其中 a_n 是 $f(x)$ 的傅里叶余弦系数. A_0 可以用不同的方法计算(前面的方法用不上). 因为 $G(L)=0$ 和 $G(x)$ 的傅里叶级数是逐点收敛的，由(3.5.9)得到

$$0 = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos n\pi = A_0 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n\pi/L}\cos n\pi,$$

因为 $A_n = -b_n/(n\pi/L)$. 所以，由(3.5.9)证明了

$$F(x) = a_0(x+L) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{n\pi/L}\sin\frac{n\pi x}{L} + \frac{b_n}{n\pi/L}\left(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi x}{L}\right)\right], \tag{3.5.11}$$

恰好是直接逐项积分的结果. 然而，要注意(3.5.11)不是 $F(x)$ 的傅里叶级数，因为出现了 $a_0 x$. 尽管如此，(3.5.11)还是成立的. 这样就证明了傅里叶级数逐项积分的合理性.

130

习题 3.5

3.5.1 考虑

$$x^2 \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{3.5.12}$$

(a)由(3.3.11)、(3.3.12)和(3.5.6)确定 b_n.

(b) x 取何值时，(3.5.12)是等式?

*(c)从(3.5.12)导出 x^3 的傅里叶余弦级数. x 取什么值时，它是等式?

3.5.2 (a)利用(3.3.11)和(3.3.12)，求 x^2 的傅里叶余弦级数.

(b)由(a)，确定 x^3 的傅里叶正弦级数.

3.5.3 推广习题 3.5.2，导出 x^m 的傅里叶正弦级数，m 为奇数.

*3.5.4 假设 $\cosh x \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin n\pi x/L$.

(a)通过正确地两次微分该级数，确定 b_n.

(b)通过积分该级数两次，确定 b_n.

3.5.5 证明在(3.5.9)中的 B_n 满足 $B_n = a_n/(n\pi/L)$，其中 a_n 由(3.5.1)定义.

3.5.6 通过在 $x=0$ 处计算(3.5.5)，计算

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots.$$

*3.5.7 利用(3.5.6)，计算

$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\cdots.$$

3.6 傅里叶级数的复形式

在周期边界条件下，已经看到傅里叶级数理论相当有用：

$$f(x)\sim a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right),\qquad(3.6.1)$$

131

其中

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)\,dx\qquad(3.6.2)$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\qquad(3.6.3)$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.\qquad(3.6.4)$$

由欧拉公式，

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\quad 和\quad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

引入复指数替代正弦和余弦，得到

$$f(x)\sim a_0+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-ib_n)e^{in\pi x/L}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+ib_n)e^{-in\pi x/L}.\qquad(3.6.5)$$

为了只有 $e^{-in\pi x/L}$，改变第一个求和式中的哑指标，用 $-n$ 替换 n. 所以，

$$f(x)\sim a_0+\frac{1}{2}\sum_{n=-1}^{-\infty}[a_{(-n)}-ib_{(-n)}]e^{-in\pi x/L}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+ib_n)e^{-in\pi x/L}.$$

由 a_n 和 b_n 的定义，(3.6.3)和(3.6.4)，$a_{(-n)}=a_n$ 和 $b_{(-n)}=-b_n$. 所以，如果定义

$$c_0=a_0$$

$$c_n=\frac{a_n+ib_n}{2},$$

则 $f(x)$ 变为

$$\boxed{f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{-in\pi x/L}.}\qquad(3.6.6)$$

(3.6.6)式称为 $f(x)$ 的傅里叶级数的复形式[⊖]. 它等价于通常的形式. 虽然它写起来较为简洁，但用处不多. 在这种形式中，复傅里叶系数是

$$c_n=\frac{1}{2}(a_n+ib_n)=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{L}+i\sin\frac{n\pi x}{L}\right)dx.\quad(n\neq 0)$$

132

由欧拉公式，立刻看出其简化式. 因此，导出了复傅里叶系数的公式

$$\boxed{c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{in\pi x/L}dx.}\quad(对所有\ n)\qquad(3.6.7)$$

⊖ 与前面一样，如果 $f(x)$ 是连续的[且为周期的，$f(-L)=f(L)$]，则等号出现. 且在 $f(x)$ 的内部跳跃间断点，该级数收敛于 $[f(x+)+f(x-)]/2$.

注意，$f(x)$的复傅里叶级数表示包含 $e^{-in\pi x/L}$，并且对整数求和，这对应着对离散特征值的求和. 另一方面，复傅里叶系数含有 $e^{+in\pi x/L}$，并且是在$f(x)$(具有周期边界条件)的定义域，即 $-L\leqslant x\leqslant L$ 上积分，如果$f(x)$是实的，$c_{-n}=\bar{c}_n$(见习题3.6.2).

复正交性. 还有另一个方法推导出复傅里叶系数. 以前总是利用特征函数的正交性确定傅里叶系数. 类似的想法在这里也成立. 然而，此处特征函数 $e^{-in\pi x/L}$是复的. 对复函数，正交性的概念就要略做修改. 一个复函数 ϕ 称为与一个复函数 ψ(在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上)正交，如果 $\int_a^b \bar{\phi}\psi \mathrm{d}x = 0$，其中$\bar{\phi}$是 ϕ 的复共轭. 这保证了用$\int_a^b \bar{f}f\mathrm{d}x$ 定义的复函数f的平方长度是正的$\Big($但对 $\int_a^b ff\mathrm{d}x$ 不成立，因为f是复的$\Big)$.

利用这个正交性记号，可以验证特征函数 $e^{-in\pi x/L}$构成一个正交集，其中 $-\infty<n<\infty$，由简单积分

$$\int_{-L}^{L} \overline{(e^{-im\pi x/L})}e^{-in\pi x/L}\mathrm{d}x = \begin{cases}0 & n\neq m\\ 2L & n=m,\end{cases}$$

注意

$$\overline{(e^{-im\pi x/L})} = e^{im\pi x/L}.$$

为确定复傅里叶系数 c_n，用 $e^{in\pi x/L}$乘以(3.6.6)，然后从 $-L$ 到 $+L$ 积分(假定这些运算的逐项作用是成立的). 这样

$$\int_{-L}^{L} f(x)e^{im\pi x/L}\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\int_{-L}^{L} e^{im\pi x/L}e^{-in\pi x/L}\mathrm{d}x.$$

利用正交性条件，求和简化为只有一项，$n=m$. 所以，

$$\int_{-L}^{L} f(x)e^{im\pi x/L}\mathrm{d}x = 2Lc_m,$$

[133] 这就解释了(3.6.7)内的(1/2)L 和指数中的符号改变.

习题3.6

3.6.1 考虑

$$f(x) = \begin{cases}0 & x<x_0\\ 1/\Delta & x_0<x<x_0+\Delta\\ 0 & x>x_0+\Delta.\end{cases}$$

假定 $x_0>-L$ 和 $x_0+\Delta<L$. 确定复傅里叶系数 c_n.

[134] 3.6.2 如果$f(x)$是实的，证明 $c_{-n}=\bar{c}_n$.

第4章　波动方程：振动弦与振动膜

4.1　引言

在至今对偏微分方程的讨论中，引入的物理问题还只有热传导. 为了拓展讨论的范围，现在开始研究完全弹性的弦和膜的振动. 先由物理原理建立起振动弦的控制方程. 再说明有关边界条件在数学意义上与热传导方程相应边界条件的类似性. 例题将通过分离变量法求解.

4.2　弦振动方程的建立

一条振动的弦是一个复杂的物理系统. 这里希望给出一个简单推导. 弦只有在被拉紧时才振动. 考虑一条按其平衡位置水平拉紧的弦，参见图 4.2.1. 设想弦的两端用某种方法系住(参见4.3节)，且维持其拉紧状态. 可以以弦乐乐器为例. 首先跟踪弦的每个质点的运动. 设 α 是弦上一个质点在弦处于水平平衡位置时的 x 坐标. 弦随时间运动，在时刻 t，弦位于不同于平衡位置的某处，参见图 4.2.1. 质点 α 的运动轨迹用水平分量和垂直分量来表示.

假设弦的斜率较小，这种情形下能够证明水平位移 v 可以忽略不计. 并可大概地认为：运动完全是垂直的，即 $x=\alpha$. 这时垂直位移 u 由 x 和 t 确定： 135

$$y = u(x,t). \tag{4.2.1}$$

包括水平位移的推导是相当复杂的(参见 Weinberger[1995]及 Antman[1980]). 一般情况下($x\neq\alpha$)，最好设 $y=u(\alpha,\ t)$.

牛顿定律. 考虑弦上 x 与 $x+\Delta x$ 之间的细小弧段(参见图 4.2.2). 在未扰动(但仍处于拉伸状态)的水平位置，假设已知质点密度 $\rho_0(x)$. 该小段的总质量约等于 $\rho_0(x)\Delta x$. 现在的目标是推导一个可以描述位移 u 如何随时间变化的偏微分方程. 因为加速度是由力产生的，所以必须使用牛顿定律. 为简单起见，只分析对点质量的牛顿定律：

$$F = ma. \tag{4.2.2}$$

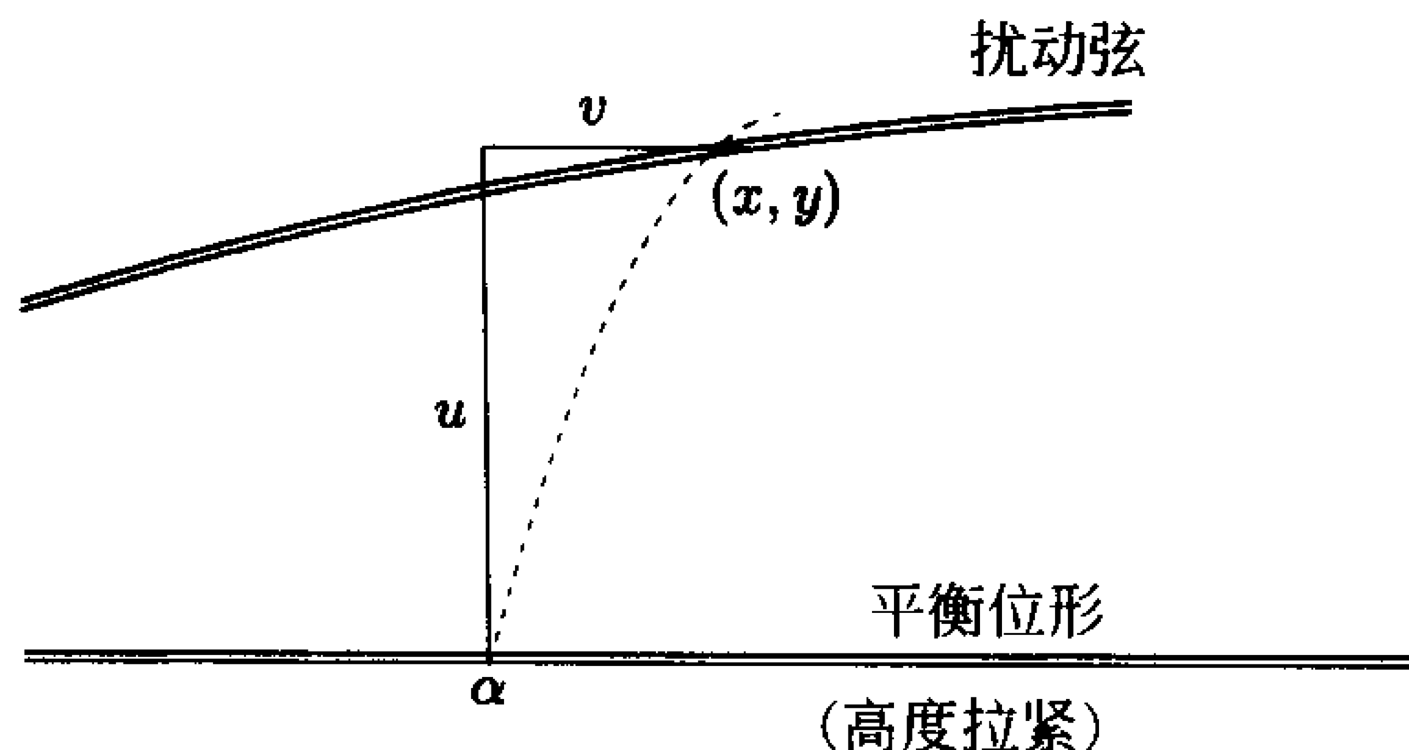


图 4.2.1　拉紧的弦上质点的垂直位移与水平位移

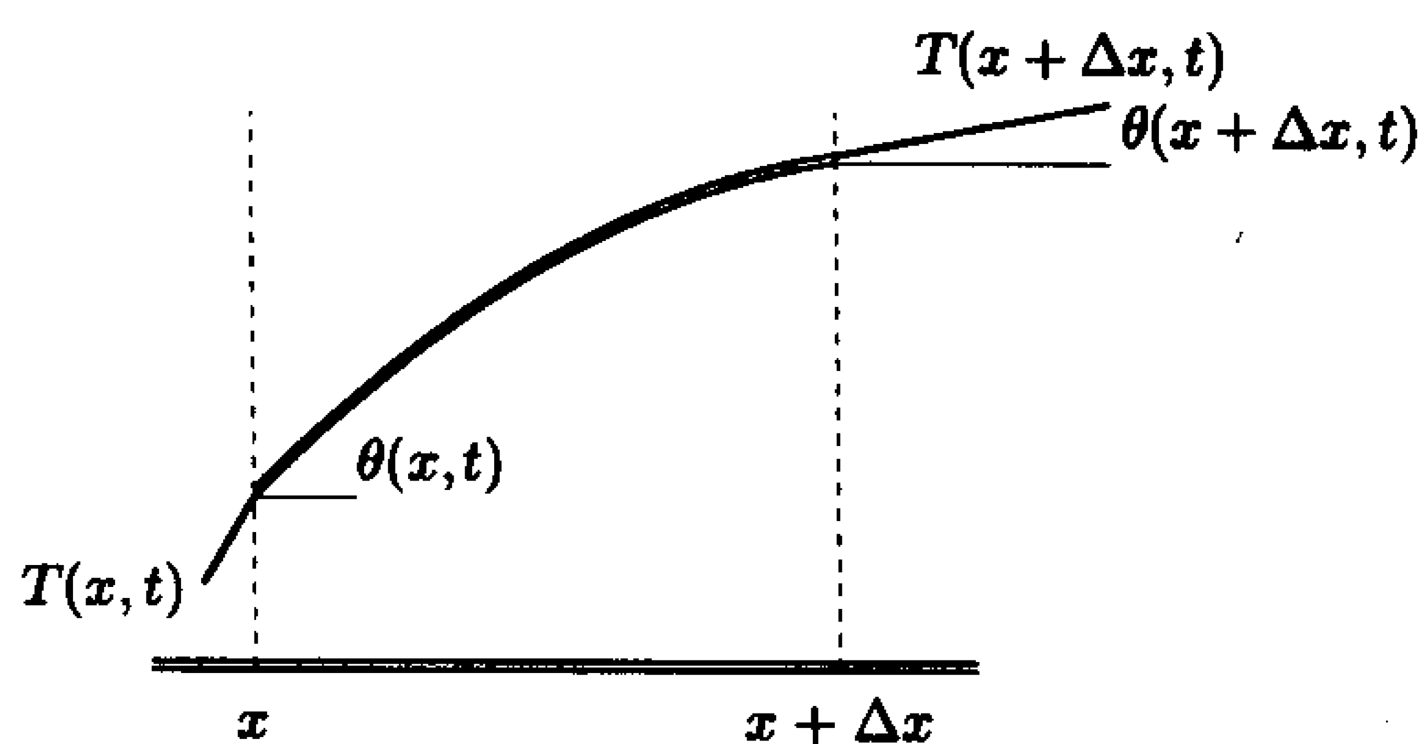


图 4.2.2　一段弦的拉伸，标明张力

必须讨论作用在这一小段弦上的力. 显然存在作用力，假设只作用于垂直方向上(例如：重力)，以及作用于这一小段弦两端的作用力. 假设弦是完全柔性的，这保证弦弯曲时没有阻 136

力. 且意味着：弦的其余部分施加于这一小段弦端点的力沿着弦的切线方向. 此切向力称为弦的张力，它的大小用 $T(x, t)$表示. 图 4.2.2 表明了张力(由弦的其余部分施加的力)在两端切线方向上拉伸这一小段弦. 为研究张力的分量，引入弦与水平方向之间的夹角 θ. 这个角依赖于位置 x 和时间 t. 还有，弦的斜率可由 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 或 $\tan\theta$ 表示：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan\theta(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{4.2.3}$$

牛顿定律的水平分量确定水平位移，但这个量很小，可以忽略不计. 运动的垂直方程说明，质量 $\rho_0(x)\Delta x$ 乘以加速度($\partial^2 u/\partial t^2$，这里使用$\partial/\partial t$ 是因为 x 对该运动来说是个定值)的垂直分量等于张力的垂直分量加上作用力的垂直分量：

$$\rho_0(x)\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T(x+\Delta x,t)\sin\theta(x+\Delta x,t) - T(x,t)\sin\theta(x,t) + \rho_0(x)\Delta x Q(x,t), \tag{4.2.4}$$

其中 $T(x, t)$表示张力的大小，$Q(x, t)$表示每单位质量作用力的垂直分量. 将(4.2.4)式除以 Δx，再令 $\Delta x\to 0$，可得

$$\rho_0(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}[T(x,t)\sin\theta(x,t)] + \rho_0(x)Q(x,t). \tag{4.2.5}$$

对较小的角 θ,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \approx \sin\theta,$$

因此(4.2.5)式化为

$$\rho_0(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \rho_0(x)Q(x,t). \tag{4.2.6}$$

完全弹性弦. 弦的张力是由实验确定的. 真实的弦差不多是完全弹性的，这意味着张力的大小 $T(x, t)$只依赖于弦的局部伸缩. 既然假定 θ 角很小，那么弦的拉伸与其扰动时所拉紧水平弦的拉伸基本相同，后一种情况下张力为常量 T_0(处于平衡状态). 因此，张力 $T(x, t)$可以用常量 T_0 近似. 这样，拉紧弦的小垂直振动就由下面的方程控制：

137

$$\rho_0(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t)\rho_0(x). \tag{4.2.7}$$

一维波动方程. 如果每单位质量所受的作用力仅为重力，那么(4.2.7)式中 $Q(x, t) = -g$. 在多数情况下，这个力小得可以忽略不计(对张力而言 $\rho_0 g \ll |T_0\partial^2 u/\partial x^2|$). 另一种选择是，重力使弦下垂，可以按下垂的平衡位置计算振动. 不过无论哪种情况，通常都需要研究 $Q(x, t)=0$情形下的方程(4.2.7).

$$\rho_0(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.2.8}$$

或

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},} \tag{4.2.9}$$

其中 $c^2 = T_0/\rho_0(x)$. 方程(4.2.9)称为一维波动方程. 引入符号 c^2 是因为 $T_0/\rho_0(x)$具有速度平方的量纲. 后面将会证明 c 是个非常重要的速度. 对于均匀弦而言，c 是常量.

习题 4.2

4.2.1 (a)用方程(4.2.7)计算下垂平衡位置 $u_E(x)$，设 $Q(x, t) = -g$. 边界条件为 $u(O)=0$ 及 $u(L)=0$.
(b)证明 $v(x, t)=u(x, t)-u_E(x)$ 满足方程(4.2.9).

4.2.2 证明 c^2 具有速度平方的量纲.

4.2.3 设质点的 x 坐标(在水平平衡位置)为 α，如果它的垂直与水平位移分别为 u 与 v，确定此质点的位置 x 和 y，并证明

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial u/\partial \alpha}{1 + \partial v/\partial \alpha}.$$

4.2.4 在不忽略 v 的条件下，推导出垂直与水平位移的方程. 假设弦是完全柔软的且它的张力由实验定律确定.

4.2.5 用最简单的可能方式推导出振动弦的偏微分方程. 可以假定弦的质量密度为常量 ρ_0，张力 T_0 为常量，并可以假设位移很小(具有很小的斜率).

138

4.3 边界条件

振动弦的偏微分方程(4.2.7)或(4.2.8)都含有二阶偏导数，按照对一维热传导方程所做的那样，在弦的每一端将引入一个边界条件.

最简单的边界条件是将弦的一端固定，通常固定为零位移. 例如，如果弦在 $x=L$ 处固定(零位移)，则

$$u(L,t) = 0. \tag{4.3.1}$$

另一种方式，可以用规定好的方式变动弦的一端：

$$u(L,t) = f(t). \tag{4.3.2}$$

(4.3.1)和(4.3.2)都是线性边界条件；(4.3.2)是非齐次的，而(4.3.1)是齐次的.

如果弦的一端与一个动态系统相连接，会出现更有意思的边界条件. 假设在弦的左端 $x=0$ 处，连接于一个弹簧质量系统，如图 4.3.1 所示. 保持其运动是完全垂直的. 为此，必须想像质量在垂直轨道上(可能无摩擦). 轨道对质量施加一个水平力，该力可以防止张力的水平分量拉翻弹簧质量系统. 弦与此质量相连接，如果质量的位置为 $y(t)$，弦左端的位置也是

$$u(0,t) = y(t). \tag{4.3.3}$$

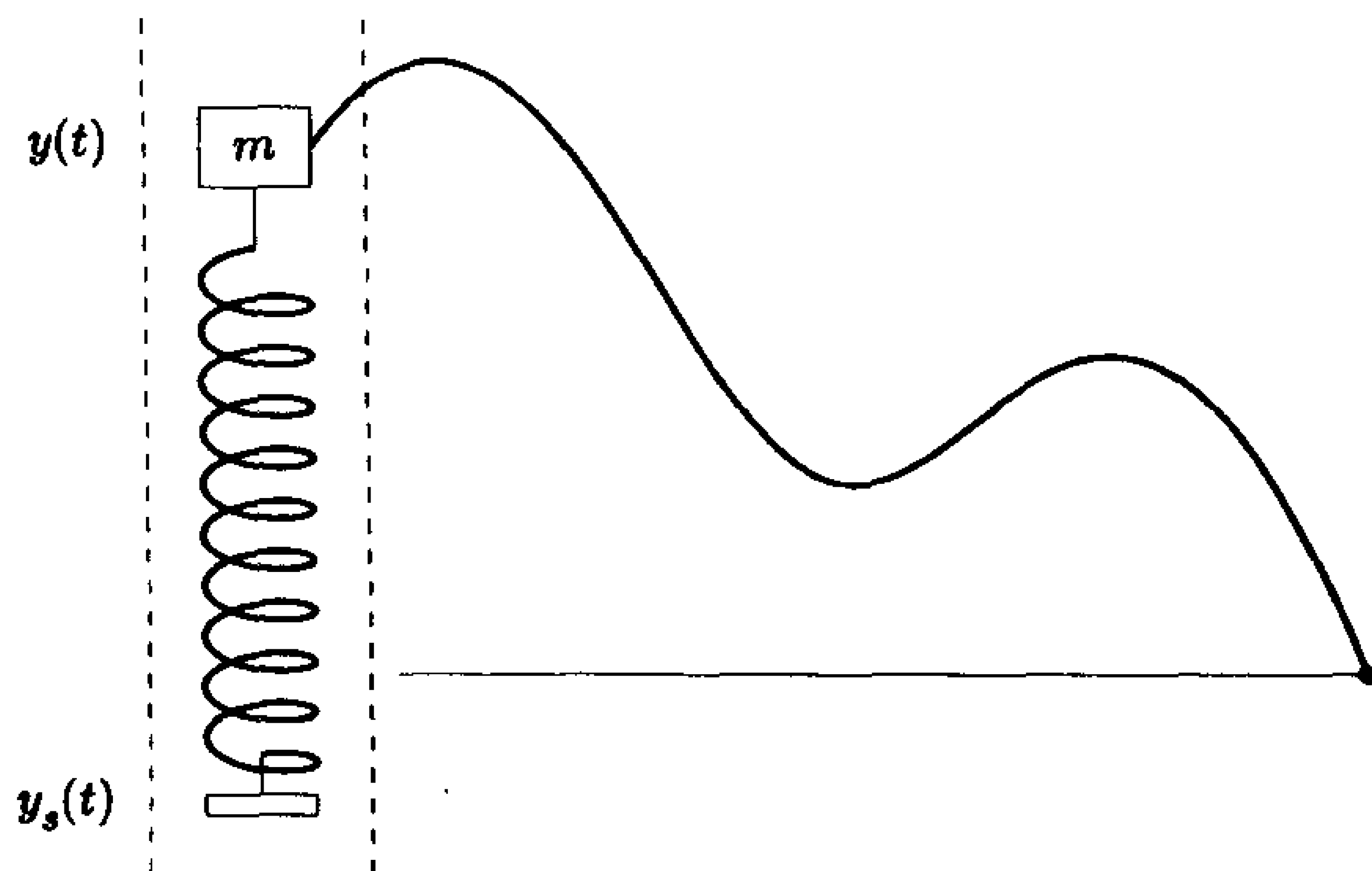


图 4.3.1 连接到一条拉伸弦并带有可变支撑的弹簧质量系统

不过，$y(t)$是未知的，它本身满足一个由牛顿定律确定的常微分方程. 假设弹簧的未拉伸长度为 l 且服从具有弹性系数 k 的虎克定律(Hooke's law). 为增加问题的趣味性，设弦的支撑点按照某种规定的方式 $y_s(t)$移动. 因此，弹簧的长度为 $y(t)-y_s(t)$，弹簧的拉伸长度为 $y(t)-y_s(t)-l$. 根据牛顿定律(应用常弹性系数 k 的虎克定律)，有

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-k(y(t)-y_s(t)-l)+\text{弹簧上的其他力}.$$

而作用于质量上的其他垂直力，一个是由弦施加的拉力 $T(0,t)\sin\theta(0,t)$，另一个是其他外力 $g(t)$. 前面提及，必须限制为小角度，以便张力接近于常量 T_0. 此时，张力的垂直分量近似等于 $T_0\partial u/\partial x$：

$$T(0,t)\sin\theta(0,t)\approx T(0,t)\frac{\sin\theta(0,t)}{\cos\theta(0,t)}=T(0,t)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)\approx T_0\frac{\partial u}{\partial x}(0,t),$$

[139] 因为当 θ 很小时 $\cos\theta\approx 1$. 按这种方式，连接于一个弹簧质量系统(带有可变支撑 $y_s(t)$及外力 $g(t)$)的一条振动的弦在 $x=0$ 处的边界条件是

$$\boxed{m\frac{d^2}{dt^2}u(0,t)=-k(u(0,t)-y_s(t)-l)+T_0\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)+g(t).}\tag{4.3.4}$$

下面考虑几种没有外力作用于质量上，$g(t)=0$ 的特殊情形. 此外，如果质量充分小，使得作用在质量上的力平衡，则有

$$T_0\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=k(u(0,t)-u_E(t)),\tag{4.3.5}$$

其中 $u_E(t)$是质量的平衡位置，$u_E(t)=y_s(t)+l$. 这一形式叫做非齐次弹性边界条件，它与热传导方程的牛顿冷却定律(外部温度为 $u_E(t)$)极为相似. 如果质量的平衡位置与弦的平衡位置重合，即 $u_E(t)=0$，则弹性边界条件的齐次形式为

$$T_0\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=ku(0,t).\tag{4.3.6}$$

$\partial u/\partial x$ 与 u 成正比. 既然在物理上 $T_0>0$ 和 $k>0$，(4.3.6)中的符号是规定好的. 这与出现在牛顿冷却定律中符号的选择是相同的. 图 4.3.2 显示了符号选择的正确与不正确. 此图表明(假设弦和质量的平衡位置都是 $u=0$)：如果在 $x=0$ 处 $u>0$，那么为了得到与零质量弹簧系统垂直力的平衡，必有$\partial u/\partial x>0$. 类似的论证表明，如果在 $x=L$ 处出现弹性边界条件，就会有重要的符号改变：

[140]

$$T_0\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=-k(u(L,t)-u_E(t)),\tag{4.3.7}$$

对牛顿冷却定律有同样的符号变化.

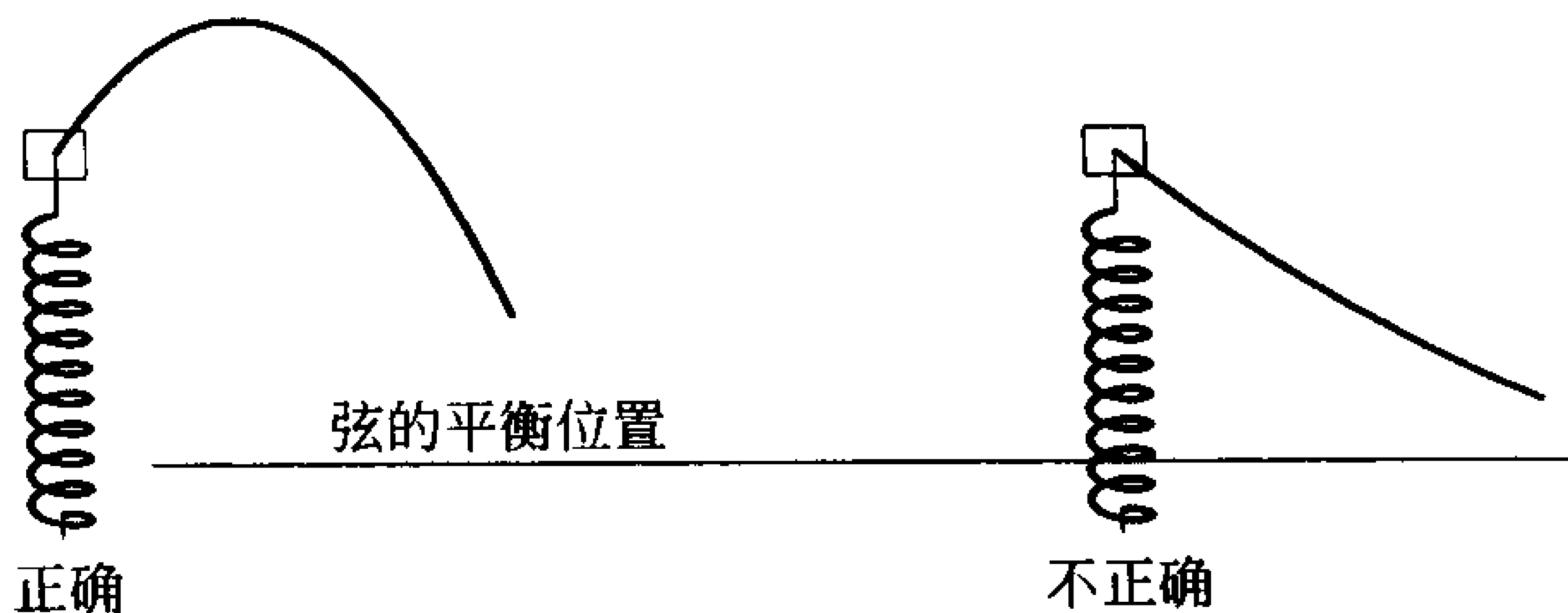


图 4.3.2 零质量弹簧质量系统边界条件

对振动弦而言，另一个要讨论的边界条件是“自由端”. 这不是字面上的“自由”，而是指端点附在前面所描述的无摩擦垂直轨道中，可以上下自由移动. 这里既没有弹簧质量系统，也没有外力. 不过，可以由(4.3.6)或(4.3.7)对 $k\to 0$ 取极限，得到这个边界条件：

$$T_0\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0. \tag{4.3.8}$$

这就是说，由于在端点处无任何其他垂直外力，因此，张力在端点的垂直分量必须为 0. 否则，此端点将会有无限垂直加速度. 边界条件(4.3.8)与一维热传导方程的绝热边界条件是非常类似的.

习题 4.3

4.3.1 如果 $m=0$，图 4.3.3 中哪个图所示的弦的右端可能是正确的？简要说明理由. 假设质量只能作垂直移动.

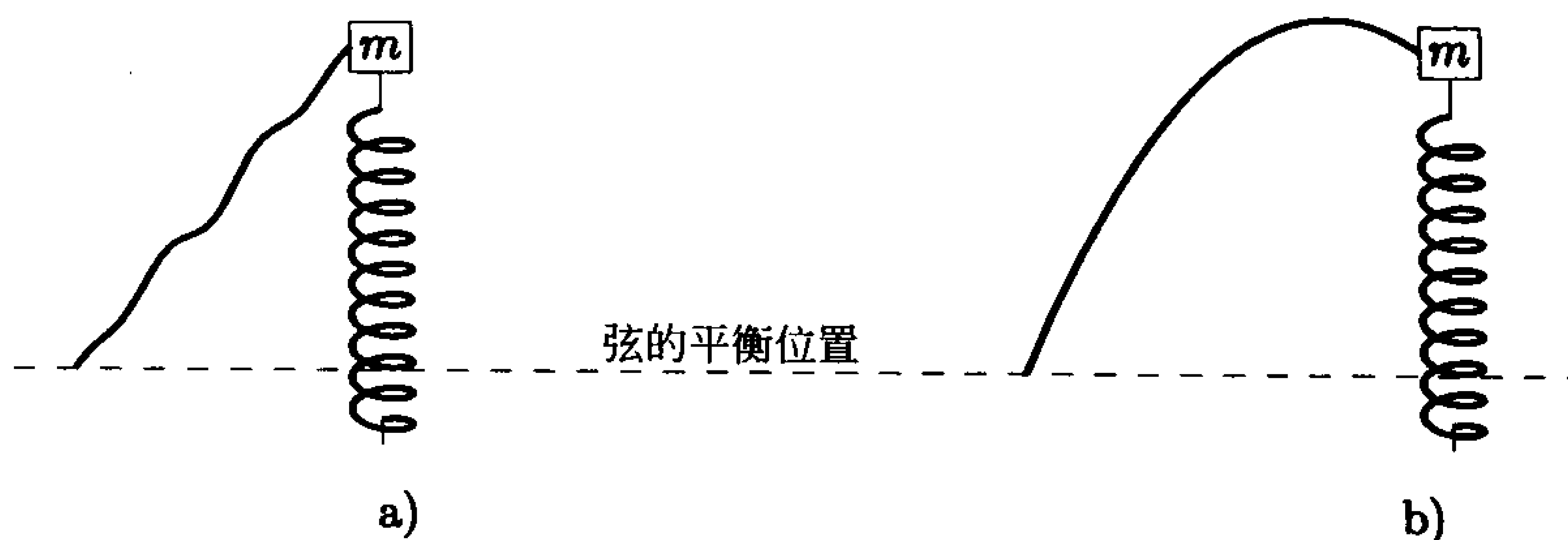


图 4.3.3

4.3.2 如图 4.3.4 所示，两根振动弦在 $x=L$ 处与弹簧质量系统连接，这个弹簧系统置于一个无摩擦的垂直轨道上. 假设弦水平时弹簧不伸缩(弹簧的支撑固定)，另外假设外力 $f(t)$ 作用在质量 m 上. 141

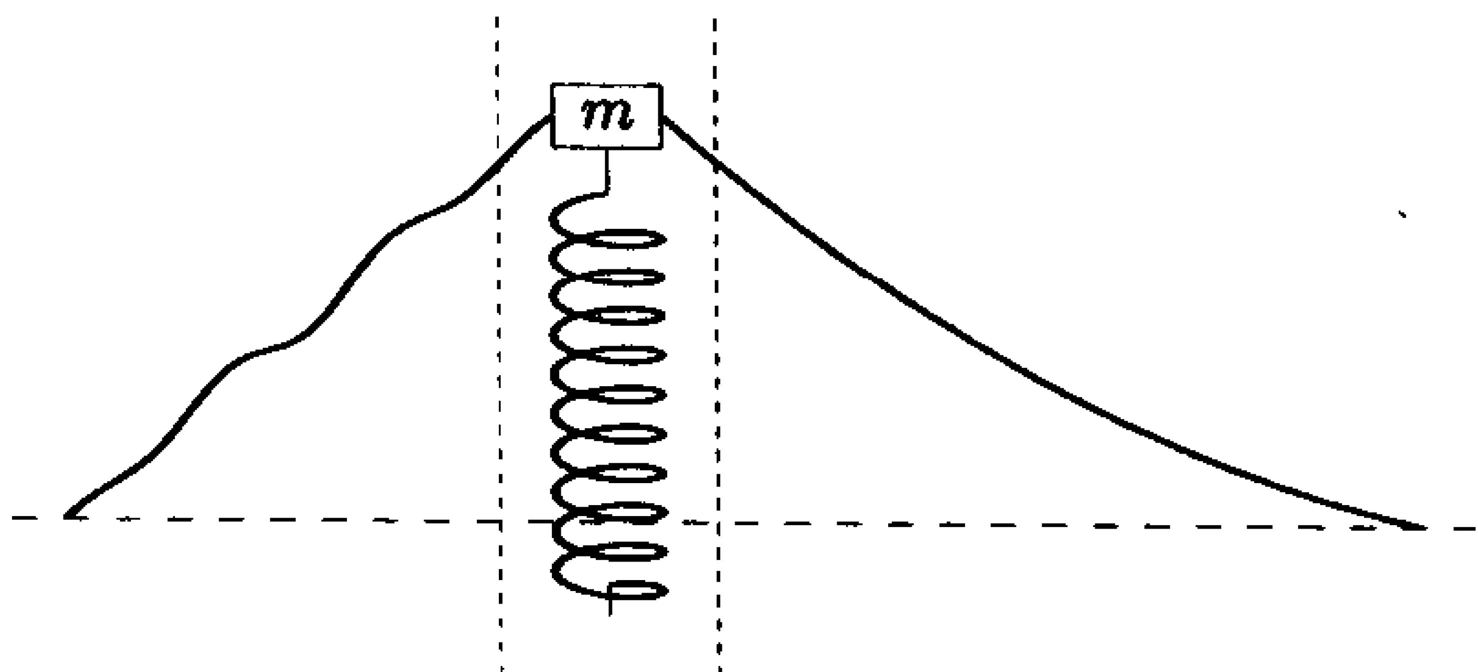


图 4.3.4

(a)在 $x=L$ 处联系左边弦和右边弦的“跳跃”条件是什么？
(b)在数学上，这与完全热接触的哪种情形相类似？

4.4 端点固定的振动弦

在这一节中，要求解一维波动方程，该方程表示弦在无外力作用下的均匀振动.

$$\text{PDE:}\quad \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},} \tag{4.4.1}$$

其中 $c^2 = T_0/\rho_0$，满足最简单的齐次边界条件．

$$\text{BC1}: \boxed{\begin{array}{l} u(0,\ t) = 0 \\ u(L,\ t) = 0, \end{array}} \tag{4.4.2}$$

两个端点均固定为零位移．由于偏微分方程(4.4.1)中有2阶导数，就需要有两个初始条件，指定 $u(x,\ 0)$ 和 $\partial u/\partial t(x,\ 0)$：

142

$$\text{IC}: \boxed{\begin{array}{l} u(x,\ 0) = f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0) = g(x), \end{array}} \tag{4.4.3}$$

分别对应于弦每一段的初始位置和初始速度．这两个初始条件并不奇怪，这是由于波动方程是通过把弦的每一段作为质点来分析而从牛顿定律导出来的．每个质点的常微分方程既需要初始位置又需要初始速度．

由于偏微分方程与边界条件都是线性和齐次的，因此有望利用分离变量法来求解．如同热传导方程，先不考虑非齐次的初始条件．而寻求特殊乘积形式的解

$$u(x,t) = \phi(x)h(t). \tag{4.4.4}$$

将(4.4.4)代入(4.4.1)得

$$\phi(x)\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2} = c^2 h(t)\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}. \tag{4.4.5}$$

用 $\phi(x)h(t)$ 去除方程两边可将变量分离，但若再用常量 c^2 去除则更为简洁，这样就使特征值问题中不包含参数 c^2.

$$\frac{1}{c^2}\frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{\phi}\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} = -\lambda. \tag{4.4.6}$$

由于 $(1/c^2)(1/h)(\mathrm{d}^2h/\mathrm{d}t^2)$ 只依赖 t，$(1/\phi)(\mathrm{d}^2\phi/\mathrm{d}x^2)$ 只依赖 x，引入分离常量．插入负号纯粹是为了方便．有了这个负号，下面解释为什么预期 $\lambda > 0$. 从(4.4.6)得到两个常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2} = -\lambda c^2 h \tag{4.4.7}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} = -\lambda\phi. \tag{4.4.8}$$

两个齐次边界条件(4.4.2)表明

$$\phi(0) = \phi(L) = 0. \tag{4.4.9}$$

因而(4.4.8)与(4.4.9)组成了一个边值问题．先不考虑(4.4.8)与(4.4.9)的解，而是分析依赖时间的常微分方程(4.4.7)．如果 $\lambda > 0$，那么(4.4.7)的通解就是正弦与余弦的线性组合：

$$h(t) = c_1 \cos c\sqrt{\lambda}t + c_2 \sin c\sqrt{\lambda}t. \tag{4.4.10}$$

如果 $\lambda = 0$，$h(t) = c_1 + c_2 t$，如果 $\lambda < 0$，则 $h(t)$ 是随时间依指数级增长解与随时间依指数级衰减解的线性组合．由于求解的是振动弦，则依赖时间的解振荡自然更为合理些．但这并不能证明 $\lambda > 0$，而是作为在(4.4.6)中选择负号的一个直接诱因．通过分析边值问题，可以确定特征值是非负的．

143

边值问题为

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda\phi$$

$$\phi(0) = 0$$

$$\phi(L) = 0.$$

尽管可以分三种情况解出这个边值问题，但应该回想起所有的特征值都是正的. 事实上，

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1,2,3\cdots,$$

相应的特征函数为 $\sin n\pi x/L$. 求解依赖时间的部分已在前面(4.4.10)中得到. 因此，存在两族乘积解，$\sin n\pi x/L \sin n\pi ct/L$ 与 $\sin n\pi x/L \cos n\pi ct/L$. 运用叠加原理，通过考虑所有乘积解的线性组合

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi ct}{L} + B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi ct}{L}\right), \tag{4.4.11}$$

应当能够求解初值问题. 如果

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{4.4.12}$$

初始条件(4.4.3)就满足了. 边界条件说明了正弦级数是重要的. 有两个初始条件就需要确定两族系数. 由前面有关傅里叶正弦级数的讨论可知，$\sin n\pi x/L$ 构成一个正交集. A_n 为 $f(x)$ 的傅里叶正弦级数的系数，$B_n n\pi c/L$ 为 $g(x)$ 的傅里叶正弦级数的系数：

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$B_n\frac{n\pi c}{L} = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx. \tag{4.4.13}$$

现在就(两端固定的)弦乐器而言来解释这些结果的意义. 垂直位移由简单的乘积解

$$\sin\frac{n\pi x}{L}\left(A_n\cos\frac{n\pi ct}{L} + B_n\sin\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

[144]

的线性组合而成. 这些乘积解称作**简正振动模态**. 声强取决于振幅㊀：$\sqrt{A_n^2 + B_n^2}$. 对时间的依赖是简谐波，它的**圆频率**(在 2π 个单位时间内的振动次数)等于 $n\pi c/L$，其中 $c = \sqrt{T_0/\rho_0}$. 所产生的声音由这无穷多个**固有频率**($n = 1, 2, \cdots$)的叠加而成. 简正振动模态 $n = 1$ 称为第一谐音(波)或基音(波). 在振动弦的情形，基音模态的圆频率为 $\pi c/L$. ㊁固有频率越高，产生的音调就越高. 要得到一个希望的基音频率，可以改变 $c = \sqrt{T_0/\rho_0}$ 或 L. 通常，质量密度是固定的. 因此乐器都是通过改变张力 T_0 来调音的，T_0 越大，基音频率越高. 在演奏弦乐器时，乐师也可以通过将弦压下来以改变 L 的有效长度来改变音调. 缩短 L 使得音调提高. 第 n 个简正模态

㊀ $A_n\cos\omega t + B_n\sin\omega t = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}\sin(\omega t + \theta)$，其中 $\theta = \tan^{-1}A_n/B_n$.

㊁ 频率通常用每秒而不是 2π 单位时间的循环次数来度量. 这样基波的频率便为 $c/2L$ 循环/秒.

亦称为第 n 阶谐音. 对于有固定两端的振动弦，高次谐音的频率都是基音频率的整数倍. 而其他类型的乐器却不一定如此，只要听起来悦耳即可.

现在要说明每个简正模态的运动. 图 4.4.1 中画出了基波和高次谐波. 为形象标明这些波，图中画出了不同 t 值的相应图形. 在每个 t，每个模态看似关于 x 的一个简单振荡，振幅随时间做周期变化. 这些模态称为驻波. 由于边界条件的缘故，在所有的情形中，两端点都没有位移. 对于二次谐波($n=2$)，在中点 $x=L/2$ 处，位移在所有时刻也是零. 公式 $x=L/2$ 称为二次谐波的结点. 类似地，三次谐波有 2 个结点. 一般地，n 次谐波有 $n-1$ 个结点[⊖].

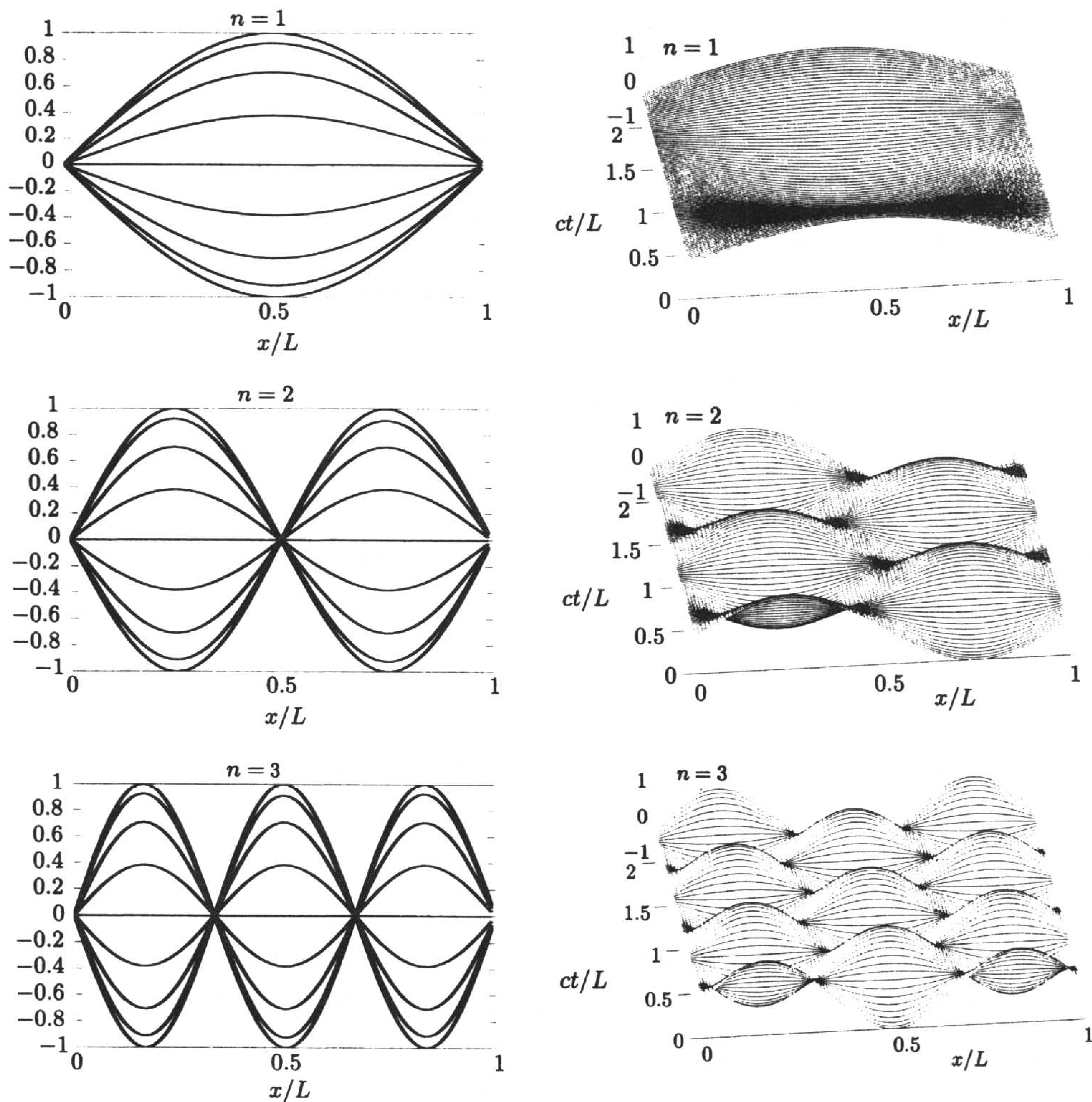


图 4.4.1　弦的简正振动模态

⊖ 通过以下实验可以直观地看到这个结果，将一根长绳子一端固定，另一端以一个适当的频率快速抖动. 可伸长的螺旋电话听筒线更容易出现这种现象.

有趣的是，由于 $x=L/2$ 是一个结点，对应于二次谐波的振动看起来就像两个长度均为 $L/2$ 的一模一样弦的基波模态振动．应当看到振动频率是相同的，也就是说，长度为 $L/2$ 的基波($n=1$)的频率应当等于长度为 L 的二次谐波($n=2$)的频率．频率公式 $\omega=n\pi c/L$ 正是验证了这个观察．

可以证明，每个驻波是由两个行波组成的．例如，对于 $\sin n\pi x/L\sin n\pi ct/L$，由三角恒等式，

$$\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi ct}{L}=\underbrace{\frac{1}{2}\cos\frac{n\pi}{L}(x-ct)}_{\text{右行波(速度为}c)}-\underbrace{\frac{1}{2}\cos\frac{n\pi}{L}(x+ct)}_{\text{左行波(速度为}-c)}.\tag{4.4.14}$$

145～146

事实上，由于波动方程的解(4.4.11)由驻波叠加而成，可以证明这个解仅仅只是两个波的结合(每个波都相当复杂)，一个以固定形状按速度 $-c$ 向左行进，而另一个以不同的固定形状按速度 c 向右行进．一维波动方程的解可以写成

$$u(x,t)=R(x-ct)+S(x+ct),$$

即使在 $x=0$ 和 $x=L$ 处边界条件不固定时，该解也是成立的．这一点将在习题和第 12 章中证明，并作进一步的讨论．

习题 4.4

4.4.1 考虑具有均匀密度 ρ_0 和拉力 T_0 的振动弦．

*(a)固定两端长度为 L 的振动弦的固有频率是什么？

*(b)在 $x=0$ 端固定，在另一端“自由”(即 $\partial u/\partial x(H,t)=0$)长度为 H 的振动弦的固有频率是什么？画出类似于图 4.4.1 的几个振动模态的图像．

(c)证明：(a)中奇次谐波(即 $n=1,3,5,\cdots$)的振动模态，与(b)中 $H=L/2$ 时的振动模态是一模一样的．并验证它们的固有频率也是相同的．运用对称性证法做简要说明．

4.4.2 在 4.2 节中证明了不均匀弦的位移 u 满足

$$\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Q,$$

其中 Q 表示单位长度所受垂直方向的作用力．若 $Q=0$，则偏微分方程是齐次的．如果 $Q=\alpha u$，就有略微不同的齐次方程．

(a)证明：若 $\alpha<0$，作用力是恢复的(趋向 $u=0$)．若 $\alpha>0$，作用力则趋向将弦推离其未受扰动位置 $u=0$.

(b)由于物理原因，若除 T_0 外 $\rho_0(x)$ 与 $\alpha(x)$ 都是常量，要求分离变量并分析与时间相关的常微分方程．

*(c)假设(b)的系数为常数．若 $\alpha<0$，求解初值问题：

$$u(0,t)=0\quad u(x,0)=0$$
$$u(L,t)=0\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=f(x).$$

其振动频率是什么？

147

4.4.3 考虑一根微阻尼的振动弦，它满足

$$\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\beta\frac{\partial u}{\partial t}.$$

(a)简要说明 $\beta>0$ 的原因．

*(b)用分离变量法确定满足边界条件

$$u(0,t)=0\quad 与\quad u(L,t)=0$$

和初始条件

$$u(x,0) = f(x) \quad 与 \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$$

的解．可以假定摩擦系数β相对较小($\beta^2 < 4\pi^2\rho_0 T_0/L^2$).

4.4.4 使用特征函数展开法来重做习题4.4.3(b).

4.4.5 若$4\pi^2\rho_0 T_0/L^2 < \beta^2 < 16\pi^2\rho_0 T_0/L^2$，重做习题4.4.3(b).

4.4.6 对初边值(4.4.1)~(4.4.3)，由(4.4.11)证明

$$u(x,t) = R(x-ct) + S(x+ct),$$

其中R和S是函数.

4.4.7 若一根振动弦满足(4.4.1)~(4.4.3)，初始时为静止，$g(x)=0$，证明

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[F(x-ct) + F(x+ct)],$$

其中$F(x)$是$f(x)$的奇周期延拓．提示：

1. 对于任意x, $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L}$.

2. $\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$.

注释：这个结果表明，对于一维波动方程，计算傅里叶级数无穷项和的实际困难其实是可以避免的.

4.4.8 如果一根振动弦满足(4.4.1)~(4.4.3)的条件，初始时未受扰动，$f(x)=0$，给定初始速度，证明

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(\bar{x})\,\mathrm{d}\bar{x},$$

其中$G(x)$是$g(x)$的奇周期延拓．提示：

[148]

1. 对于任意x, $G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}$.

2. $\sin a\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$.

参看习题4.4.7后的注释.

4.4.9 从(4.4.1)式，推导振动弦的能量守恒

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = c^2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_0^L, \tag{4.4.15}$$

其中总能量E是动能$\int_0^L \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x$与势能$\int_0^L \frac{c^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x$之和.

4.4.10 在下列情况下，振动弦的总能量E会如何变化(见习题4.4.9)?

(a)若$u(0,T)=0$且$u(L,t)=0$.

(b)若$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$且$u(L,t)=0$.

(c)若$u(0,t)=0$且$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = -\gamma u(L,t)$ $(\gamma>0)$.

(d)若(c)中的$\gamma<0$.

4.4.11 证明：对于行波$u=R(x-ct)$，习题4.4.9中所定义的动能与势能是相等的.

4.4.12 利用(4.4.15)证明(4.4.1)~(4.4.3)的解是唯一的.

4.4.13 (a)利用(4.4.15)计算一个简正模态的能量.

(b)证明当$u(x,t)$满足(4.4.11)时，总能量是每个模态的能量之和.

4.5 振动膜

一维空间的热传导方程为$\partial u/\partial t = k\partial^2 u/\partial x^2$．在二维或三维空间，温度满足$\partial u/\partial t = k\nabla^2 u$．类似地，弦振动(一维)可以推广到膜振动(二维).

振动弦的垂直位移满足一维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

有些重要的物理问题需要求解方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u, \tag{4.5.1}$$

称它们为二维或三维波动方程．满足二维波动方程的一个实例是拉紧膜的振动．它可以看作是一个二维的振动弦．这里将给出按 Kaplan[1981]方式的简要推导，省略了讨论振动弦时的一些细节． [149]

这里再次引入位移 $z=u(x, y, t)$，它取决于 x，y 和 t(如图 4.5.1 所示)．如果所有的斜率(即$\partial u/\partial x$ 与$\partial u/\partial y$)都小，则可以假设振动是完全垂直的，张力是近似恒定的．因此，膜在未受扰动位置的质量密度 $\rho_0(x, y)$(单位面积的质量)当其受扰动时改变不大．

(每一单位弧长的)张力 F_T 沿膜的切线方向作用于膜的整个边沿．由边沿的单位切向量$\hat{t}$与膜的单位法向量$\hat{n}$叉积就得到张力的方向(见图 4.5.1)．由于张力的大小是恒定的($|F_T|=T_0$)，所以

$$F_T = T_0\, \hat{t} \times \hat{n},$$

其中垂直分量由 $F_T \cdot \hat{k}$得到．

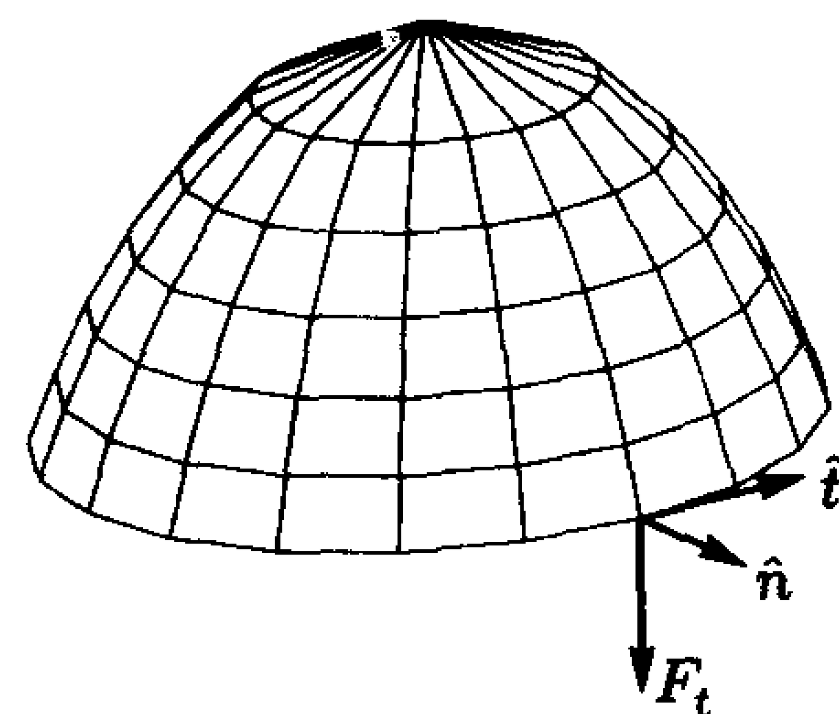


图 4.5.1　被近似恒定的拉力 T_0 扰动绷紧的膜．曲面的法向量为$\hat{n}$，边沿的切向量为$\hat{t}$

对垂直运动，把牛顿定律应用于膜的每个微分部分，然后求和(积分)．质量($\rho_0 \mathrm{d}A$)乘以垂直加速度($\partial^2 u/\partial t^2$)的和(面积分)等于垂直张力(不计作用力)的总和(闭曲线积分)

$$\iint \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \mathrm{d}A = \oint T_0\, \hat{t} \times \hat{n} \cdot \hat{k} \mathrm{d}s = \oint T_0 (\hat{n} \times \hat{k}) \cdot \hat{t} \mathrm{d}s, \tag{4.5.2}$$

其中 ds 是弧长微元，dA 是面积微元，并且利用了向量的三重积关系($A \times B \cdot C = B \times C \cdot A$)．运用斯托克斯(Stokes)定理 $\left(\iint \nabla \times B \cdot \hat{n} \mathrm{d}A = \oint B \cdot \hat{t} \mathrm{d}s\right)$ (在本书中仅一次)

$$\iint \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \mathrm{d}A = \iint T_0 [\nabla \times (\hat{n} \times \hat{k})] \cdot \hat{n} \mathrm{d}A. \tag{4.5.3}$$

由于区域是任意的，可得

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 [\nabla \times (\hat{n} \times \hat{k})] \cdot \hat{n}. \tag{4.5.4}$$

膜上的点可用 $z=u(x, y)$来表示．因此振动膜的单位法向量(使用梯度，参见 1.5 节的附录)可计算如下： [150]

$$\hat{n} = \frac{-\frac{\partial u}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial u}{\partial y}\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 1}} \approx -\frac{\partial u}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial u}{\partial y}\hat{j} + \hat{k},$$

这是由于假设偏导数很小．现在计算(4.5.4)中所需的表达式：

$$\hat{n}\times\hat{k}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -\frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial y} & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=-\frac{\partial u}{\partial y}\hat{i}+\frac{\partial u}{\partial x}\hat{j}.$$

可得

$$\nabla\times(\hat{n}\times\hat{k})=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} & 0\end{vmatrix}=\hat{k}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

这样，便得到振动膜的偏微分方程

$$\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

方程两边同除以 ρ_0 得到二维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\tag{4.5.5}$$

其中仍有 $c^2=T_0/\rho_0$. 振动膜问题的解留在第7章中讨论.

习题 4.5

4.5.1 如果膜满足“弹性”边界条件，证明

$$T_0\,\nabla u\cdot\hat{n}=-ku.\tag{4.5.6}$$

假设单位长度上恢复力与位移成正比.

4.6 电磁波与声波的反射与折射

均匀介质中的扰动时常满足三维波动方程

151

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).\tag{4.6.1}$$

在流体中，对于均匀质量密度 ρ 和压力 p 的小位移 u 满足(4.6.1)，其中系数 c 满足 $c^2=\partial p/\partial\rho$. 在电动力学中，向量场的每个分量均满足(4.6.1)，其中 $c^2=c_{\text{light}}^2/\mu\varepsilon$，与真空中的光速 c_{light}^2，磁导率 μ 及电介质常数 ε 相关.

(4.6.1)存在下述形式的特殊平面行波解：

$$u=Ae^{i(k_1x+k_2y+k_3z-\omega t)}=Ae^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}.\tag{4.6.2}$$

(实部或虚部都有物理意义.)其中 A 是振幅常量，叫做波向量的向量 $\boldsymbol{k}$ 与波的方向(垂直于波前 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-wt=$ 常量)一致. 波向量的大小 $k\equiv|\boldsymbol{k}|$ 就是波数，因为可以证明这个值等于在波的方向(即 $\boldsymbol{k}$ 方向)上 2π 距离内波的个数(参见习题). (波长 $=2\pi/k$.)

波动方程平面波解的时间频率 ω 由(4.6.2)代入(4.6.1)得到的下列公式确定：

$$\omega^2=c^2k^2,\tag{4.6.3}$$

其中 $k^2=k_1^2+k_2^2+k_3^2$. 重要的是 ω 为 $\boldsymbol{k}$ 的满足(4.6.3)的函数. 如同一维的情形，可以证明

$$行波速度或相速度 = \frac{\omega}{k} = \pm c. \tag{4.6.4}$$

如果波动方程定义在一个有限(无限)区域，则平面波解对应于多维傅里叶级数(傅里叶变换参见第 10 章)的一个分量. 下一小节将证明，平面行波时常被看作是在无穷远处生成的.

4.6.1 斯涅耳折射定律

假设有两种不同的物质(对于声波是质量密度不同，对于电磁波是介电常数不同)，延展至无穷处，其间有一个平面边界. 如图 4.6.1 所示，设 $z>0$ 时波速为 c_+，$z<0$ 时为 c_-. 假设有满足(4.6.2)的入射平面波(带有波向量 k_I 和频率 $\omega=\omega_+(k_I)=c_+k_I$)经 $z>0$ 由无限远处传播过来，将其振幅正规化，即 $A=1$. 假设入射波与平面法线的夹角为 θ_I.

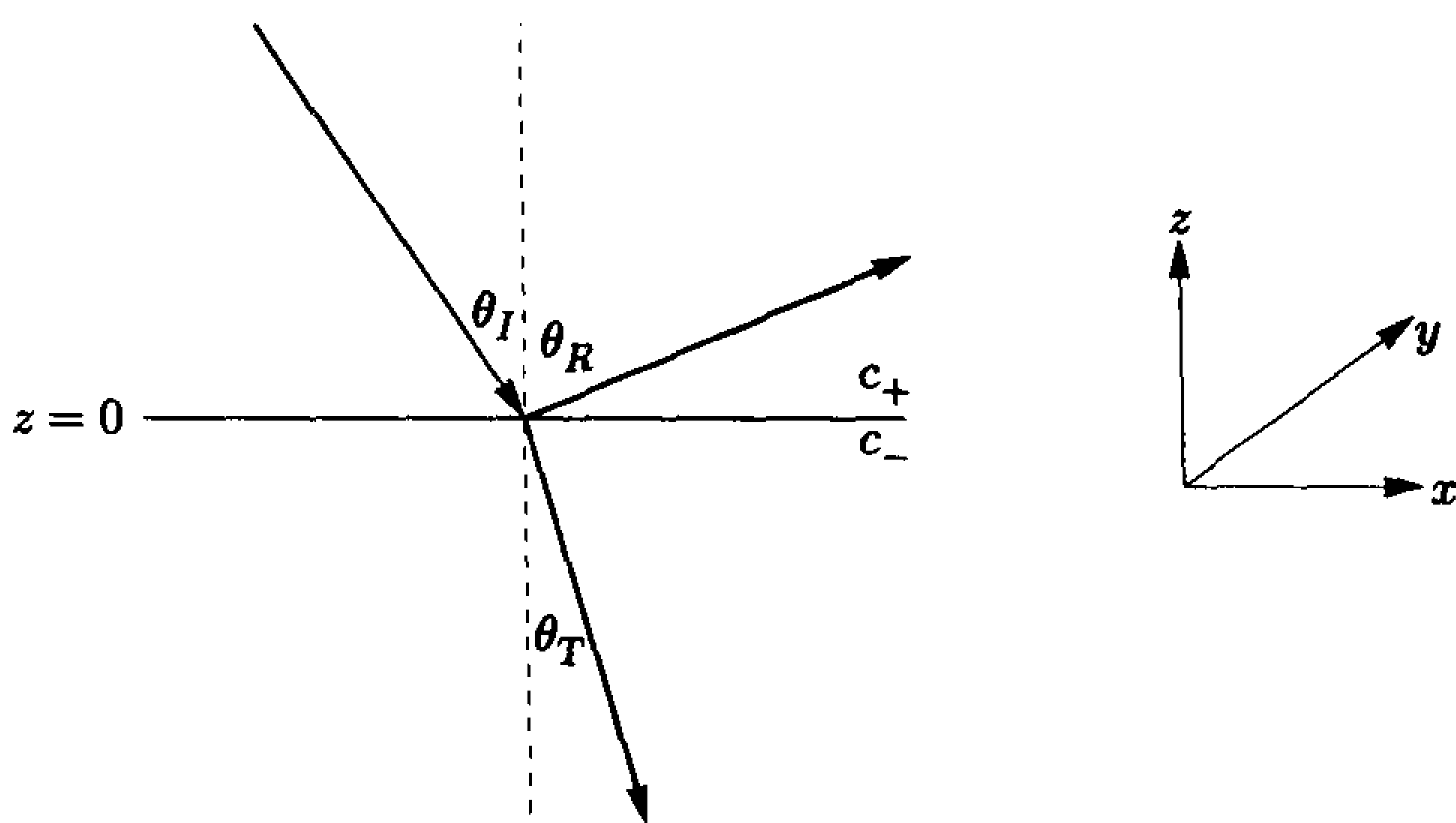


图 4.6.1 入射波与折射(透射)波

假设在上方介质中有满足(4.6.2)的反射波(具有未知波向量 k_R 和频率 $\omega=\omega_+(k_R)=c_+k_R$)，其未知复振幅为 R. 由于波动方程是线性的，在上方介质中的解就是入射波与反射的和：

$$u = e^{i(k_I\cdot x-\omega_+(c_+k_I)t)} + Re^{i(k_R\cdot x-\omega_+(c_+k_R)t)}, \quad 对 \quad z>0. \tag{4.6.5}$$

下面将证明，反射波的波向量由反射角等于入射角这熟悉的关系确定.

152

在下方介质 $z<0$ 中，假设存在折射波，称之为透射波，并引入下标 T. 假设透射波满足(4.6.2)(具有未知波数向量 k_T 和频率 $\omega=\omega_-(K_T)=c_-k_T$)，未知复振幅为 T：

$$u = Te^{i(k_T\cdot x-\omega_-(c_-k_T)t)}, \quad 对 \quad z<0. \tag{4.6.6}$$

另外，还将证明，由斯涅耳折射定律，这个折射波可能存在也可能不存在.

在这两种介质的边界面 $z=0$ 处，必须满足两个边界条件. 其一 u 必须是连续的. 在 $z=0$ 处有

$$e^{i(k_I\cdot x-\omega_+(c_+k_I)t)} + Re^{i(k_R\cdot x-\omega_+(c_+k_R)t)} = Te^{i(k_T\cdot x-\omega_-(c_-k_T)t)}. \tag{4.6.7}$$

由于这个关系式在波传播的整个过程中都必须成立，所以三个波的频率必须是相同的：

$$\omega_+(k_I) = \omega_+(k_R) = \omega_-(k_T). \tag{4.6.8}$$

从频率方程(4.6.3)可以断定，反射波与入射波的波长相等，但折射波有不同的波长：

$$c_+k_I = c_+k_R = c_-k_T. \tag{4.6.9}$$

从(4.6.7)可以得出，对于所有三个波，k_1 和 k_2(k 在 x 与 y 方向上的投影)必须是相同的. 由

$k_I = k_R$，反射波的 z 分量必须是负的入射波的 z 分量．因此，入射角等于反射角，

$$\theta_R = \theta_I, \tag{4.6.10}$$

其中，角度的大小是由法线至平面度量的．注意，对于三个波 $k \cdot x = k|x|\cos\phi$ 是相同的，

153 其中 ϕ 是 $z=0$ 时 k 与 x 的夹角．因此，对于透射波，透射角(折射角)满足

$$k_I \sin\theta_I = k_T \sin\theta_T.$$

利用(4.6.9)，就得到斯涅耳定律

$$\boxed{\frac{\sin\theta_T}{\sin\theta_I} = \frac{k_I}{k_T} = \frac{c_-}{c_+}.} \tag{4.6.11}$$

光学中许多重要和知名的结论都是斯涅耳定律的推论．例如，上方介质(c_+)为空气，下方介质(c_-)为水，则 $c_+ > c_-$．在这种情况下，由斯涅耳定律(4.6.11)知，$\sin\theta_T < \sin\theta_I$，因而透射波向法线方向折射，如图4.6.1所示．

如果 $c_+ < c_-$，则斯涅耳定律(4.6.11)预言：在某些情况下 $\sin\theta_T > 1$，这是不可能的．存在入射角的临界角 $\sin\theta_I = c_+/c_-$，此时全内部反射首次发生．对于更大的入射角，透射解不再是平面波，而是一种按指数级衰减的渐失波，这将在后面的小节中说明．此时并不存在折射平面波．

4.6.2 反射波与折射波的强度(振幅)

假设存在折射平面波．根据反射波与折射波的定律，使 u 连续的边界条件(4.6.7)就变成

$$1 + R = T. \tag{4.6.12}$$

如果没有第二个边界条件，就不能解出振幅 R 或 T．而第二个边界条件在不同的物理应用中，略有不同．因此，本节的结论并不适用于所有物理问题，但使用的方法却可应用于所有情形，所得到的结果可能会略有不同．

假设第二个边界条件为：$z=0$ 时，$\frac{\partial u}{\partial z}=0$．由(4.6.5)与(4.6.6)得到

$$k_{3_I} + k_{3_R} R = k_{3_T} T. \tag{4.6.13}$$

从图4.6.1中，三个波的波数 z 分量满足

$$k_{3_I} = -k_I \cos\theta_I$$

$$k_{3_R} = k_R \cos\theta_R = k_I \cos\theta_I$$

$$k_{3_T} = -k_T \cos\theta_T = -k_I \frac{\sin\theta_I}{\sin\theta_T} \cos\theta_T, \tag{4.6.14}$$

154 其中利用了反射波满足 $k_{3_R} = -k_{3_I}$，也利用了斯涅耳定律来简化透射波波数向量的 z 分量．由(4.6.14)，第二个边界条件(4.6.13)(除以 $-k_I\cos\theta_I$ 之后)化为

$$1 - R = \frac{\sin\theta_I}{\sin\theta_T} \frac{\cos\theta_T}{\cos\theta_I} T. \tag{4.6.15}$$

反射波与透射波的复振幅可由两个线性方程(4.6.12)与(4.6.15)相加确定：

$$T = \frac{2}{1 + \frac{\sin\theta_I}{\sin\theta_T}\frac{\cos\theta_T}{\cos\theta_I}} = \frac{2\sin\theta_T \cos\theta_I}{\sin(\theta_T + \theta_I)}$$

$$R=\frac{2\sin\theta_T\cos\theta_I-\sin(\theta_T+\theta_I)}{\sin(\theta_T+\theta_I)}=\frac{\sin(\theta_T-\theta_I)}{\sin(\theta_T+\theta_I)}.$$

4.6.3 内部全反射

如果 $\sin\theta_I\frac{c_-}{c_+}>1$，则在下方介质中斯涅耳定律不能为平面透射（折射）波 $u=Te^{i(k_T\cdot x-\omega_-(c_-k_T)t)}$ 所满足．由于在 $z=0$ 时的边界条件，解波数向量的 x 分量和 y 分量必须与入射波的相同，因此，透射波数应该满足 $\vec{k_T}=(k_{1I},\ k_{2I},\ k_{3I})$．由于 $k_1^2+k_2^2=k^2\sin^2\theta$，如果应用斯涅耳定律(4.6.11)和解出 k_{3T}，就有

$$k_{3_T}=\pm\sqrt{k_I^2\left(\frac{c_+^2}{c_-^2}-\sin^2\theta_I\right)},\tag{4.6.16}$$

可见 k_{3T} 为虚数，这暗示波动方程(在下方介质中)

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=c_-^2\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)\tag{4.6.17}$$

有解，且这个解对 z 按指数增长或衰减．现在寻找形如

$$u(x,y,z,t)=w(z)e^{i(k_1x+k_2y-\omega t)}\tag{4.6.18}$$

的乘积解，其中 k_1 与 k_2 是与入射波相关的波数，ω 是入射波的频率．若要求(4.6.18)满足(4.6.17)，就有

$$\frac{d^2\omega}{dz^2}=\left(k_1^2+k_2^2-\frac{\omega^2}{c_-^2}\right)\omega=k_I^2\left(\sin^2\theta_I-\frac{c_+^2}{c_-^2}\right)\omega.$$

所以，$\omega(z)$ 是对 z 按指数增长的项和对 z 按指数衰减的项的线性组合．由于希望该解在 $z\to\infty$ 时按指数衰减，所以取波动方程在下方介质中的解为

$$u(x,y,z,t)=Te^{k_I\sqrt{\sin^2\theta_I-\frac{c_+^2}{c_-^2}}z}e^{i(k_1x+k_2y-\omega)t},$$

155

而不是平面波．这是一个水平的二维平面波，其振幅在 $-z$ 方向上按指数衰减，称之为损耗波(在 $-z$ 方向上，按指数衰减)．

如果

$$1+R=T\tag{4.6.19}$$

$$ik_{3_I}(1-R)=Tk_I\sqrt{\sin^2\theta_I-\frac{c_+^2}{c_-^2}},\tag{4.6.20}$$

在 $z=0$ 处，u 与 $\partial u/\partial z$ 是连续的．可以化简这些方程并解出反射系数和 T(损耗波在 $z=0$ 处的振幅)．对应于反射(和损耗)波的相移，R(和 T)是复值的．

习题 4.6

4.6.1 证明：对于(4.6.2)给出的平面波，在波的方向(k 方向)上，2π 距离内的波数是 $k\equiv|k|$．

4.6.2 证明：如果波速为 ω/k，则在波的方向移动时，平面波的相位保持不变．

4.6.3 在光学中，折射系数定义为 $n=c_{\text{light}}/c$．请使用折射系数表示斯涅耳定律．

4.6.4 通过解(4.6.19)与(4.6.20)的联立方程组，求出损耗波的 R 和 T．

4.6.5 设 $k_{3_I}=\pm i\beta$，其中的 β 由(4.6.16)定义，求 R 和 T．若要获得 $z\to-\infty$ 时的指数衰减，取什么符号呢？

156

第5章 施图姆-刘维尔特征值问题

5.1 引言

已经看到，分离变量法在求解一些带有齐次边界条件的齐次偏微分方程方面是相当成功的. 在至今分析过的所有例子中，确定特征值(分离常数)的边值问题就是针对简单的常微分方程

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}+\lambda\phi=0. \tag{5.1.1}$$

根据齐次边界条件，由这个方程的显式解确定特征值 λ. 叠加原理满足了我们分析无穷级数的需求. 已经研究过三种不同情形(依赖于边界条件)：傅里叶正弦级数，傅里叶余弦级数和傅里叶级数(既有正弦，又有余弦). 幸运的是，由简单的积分证明了特征函数是正交的. 这样就可以由其余的非齐次条件求出无穷级数的系数.

这一章进一步解释和推广了这些结果. 将证明，即使不能用初等函数解出所涉及的微分方程[如(5.1.1)]，也可以推出特征函数的正交性，正交性是微分方程的直接结果. 对其他由分离变量产生的边值问题的研究提供了相应的正交函数类. 不过这些傅里叶级数的推广并不总是与正弦或余弦有关，因为(5.1.1)并不一定对每种情形都适合.

157

5.2 例子

5.2.1 非均匀杆内的热流

在1.2节中，证明了非均匀杆内的温度 u 满足下面的偏微分方程：

$$\boxed{c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)+Q,} \tag{5.2.1}$$

其中 Q 表示热源. 为考虑非均匀杆的情形，允许导热系数 c，ρ，K_0 依赖于 x. 只有当(5.2.1)是线性和齐次时，才能应用分离变量法. 通常，为使(5.2.1)是齐次的，只考虑没有热源的情形，$Q=0$. 不过，这里要考虑更一般些的情形. 允许热源 Q 与温度 u 成比例，

$$\boxed{Q=\alpha u,} \tag{5.2.2}$$

此时

$$\boxed{c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\alpha u.} \tag{5.2.3}$$

也允许 α 依赖于 x(但不依赖于 t)，就像特定类型的热源依赖材料一样. 虽然 $Q\neq0$，但(5.2.3)仍是一个线性和齐次的偏微分方程. 为帮助理解这个热源 Q 的影响，此处给出一个似乎可信的物理情形，其中可能出现像 $Q=\alpha u$ 这样的项. 假设一个化学反应产生热(称为放热反

应)，对应于 $Q>0$. 可以想象，在较高的温度处反应会更强烈. 此时，产生的热能可能与温度成比例，所以，$\alpha>0$(假定 $u>0$). 其他类型的化学反应(称为吸热)将从杆中带走热能，也仍可能和温度成比例. 对正的温度($u>0$)，这对应 $\alpha<0$. 在前面的问题中，$\alpha=\alpha(x)$，因此可能在杆的一些部分 $\alpha>0$，而在其他部分 $\alpha<0$. 总之，如果对所有 x，$\alpha(x)<0$，则热能被带出杆，反之亦然. 在后面的数学分析中，将讨论相应的特殊情形 $\alpha(x)<0$.

如果另外假定，在每个端点 $x=0$ 和 $x=L$ 处，有一个(还未指定的)齐次边界条件，则方程(5.2.3)适于用分离变量法. 前面已经分析了 $\alpha=0$ 和 c，ρ，K_0 都是常数的情形. 在分离变量中，把乘积形式

$$u(x,t)=\phi(x)h(t) \tag{5.2.4}$$

158

代入(5.2.3)，得到

$$c\rho\phi(x)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=h(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(K_0\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)+\alpha\phi(x)h(t).$$

用 $\phi(x)h(t)$ 去除，不一定能分离变量，因为 $c\rho$ 可能与 x 有关. 然而，用 $c\rho\phi(x)h(t)$ 去除就可以了：

$$\frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{c\rho\phi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(K_0\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)+\frac{\alpha}{c\rho}=-\lambda. \tag{5.2.5}$$

用负号引入分离常数 $-\lambda$，因为在这种形式中，与时间有关的方程[由(5.2.5)推出]

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-\lambda h \tag{5.2.6}$$

对 $\lambda>0$ 有指数衰减解. 如果 $\lambda<0$，(5.2.6)的解指数增长(如果 $\lambda=0$，解为常数). 在物理问题中，很少遇到解随着时间指数增长. 然而，对于至少在杆的某部分上 $\alpha>0$ 的问题，热能将由放热反应加入杆内，于是，就有可能存在负的特征值($\lambda<0$).

由分离变量所得到的空间微分方程是

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(K_0\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)+\alpha\phi+\lambda c\rho\phi=0,} \tag{5.2.7}$$

为它补充两个齐次边界条件后就成了边值问题. 这个微分方程不是 $\mathrm{d}^2\phi/\mathrm{d}x^2+\lambda\phi=0$. (5.2.7)也没有常系数，因为热系数 K_0，c，ρ，α 都不是常数. **一般地，在物理性质是非均匀的情形会出现变系数微分方程.**

注意，通过快速分析带有齐次边界条件的空间常微分方程(5.2.7)，还是不能确定分离常数取何种符号更方便. 通常地，除了用计算机求数值近似解之外，也还不能解出变系数的(5.2.7). 接下来在5.3节中将描述(5.2.7)解的一些重要的定性性质. 在对(5.2.7)有了更多的理解之后，回过头来重新研究非均匀杆的热流. 现在讨论另外一个例子，它也给出变系数的边值问题.

5.2.2 圆对称热流

159

即使物理参数是常数，也可能出现变系数微分方程. 在1.5节中已经看到，如果在某个平面二维区域内的温度 u 是圆对称的(使得 u 只与时间 t 和到原点的径向距离 r 有关)，则在所有

导热系数是常数的假定下，u 满足线性齐次微分方程

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right).} \tag{5.2.8}$$

应用分离变量法，寻找乘积形式的解：

$$u(r,t)=\phi(r)h(t).$$

则方程(5.2.8)给出

$$\phi(r)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{kh(t)}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\right).$$

用 $\phi(r)h(t)$ 去除就分离了变量，而且用常数 k 去除也很方便，因为它在产生的边值问题中消去了这个常数：

$$\frac{1}{k}\frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{r\phi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\right)=-\lambda. \tag{5.2.9}$$

由(5.2.9)给出了两个常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-\lambda kh, \tag{5.2.10}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\right)+\lambda r\phi=0.} \tag{5.2.11}$$

用 $-\lambda$ 表示分离常数，因为如果 $\lambda>0$，希望解能随时间指数衰减，就像(5.2.10)所蕴涵的. 在(5.2.11)中的变系数是由于引入极坐标的几何因素造成的. 在本书的后面部分(7.7节)将证明(5.2.11)可以用贝塞尔函数求解. 不过本章余下部分中的一般性讨论对理解该问题也相当具有价值.

下面考虑在两个不同的几何区域内圆对称热流的适当的齐次边界条件：圆环内(如图5.2.1a所示)和圆内(如图5.2.1b所示). 在这两种情形中都假定所有边界温度都固定为零. 对圆环，(5.2.11)的边界条件是在共心内环($r=a$)和外环($r=b$)壁处的温度都是零：

160

$$u(a,t)=0 \text{ 和 } u(b,t)=0.$$

这两个边界条件恰好是已经研究过的类型. 然而，对圆来说，同样的二阶微分方程(5.2.11)却只有一个边界条件 $u(b,t)=0$. 因为物理变量 r 从 $r=0$ 到 $r=b$ 变化，由于数学上的原因，需要一个在 $r=0$ 处的齐次边界条件. (这与研究圆柱体内拉普拉斯方程时出现的问题相同. 不过那时在 $r=b$ 处给的是非齐次条件.)而在物理推理的基础上，希望在 $r=0$ 处的条件是温度有界，$|u(0,t)|<\infty$. 这是个奇异点条件的例子. 它是齐次的；也正是在 $r=0$ 处所附加的边界条件. 因而对圆而言，在 $r=0$ 和 $r=b$ 处都有了齐次条件.

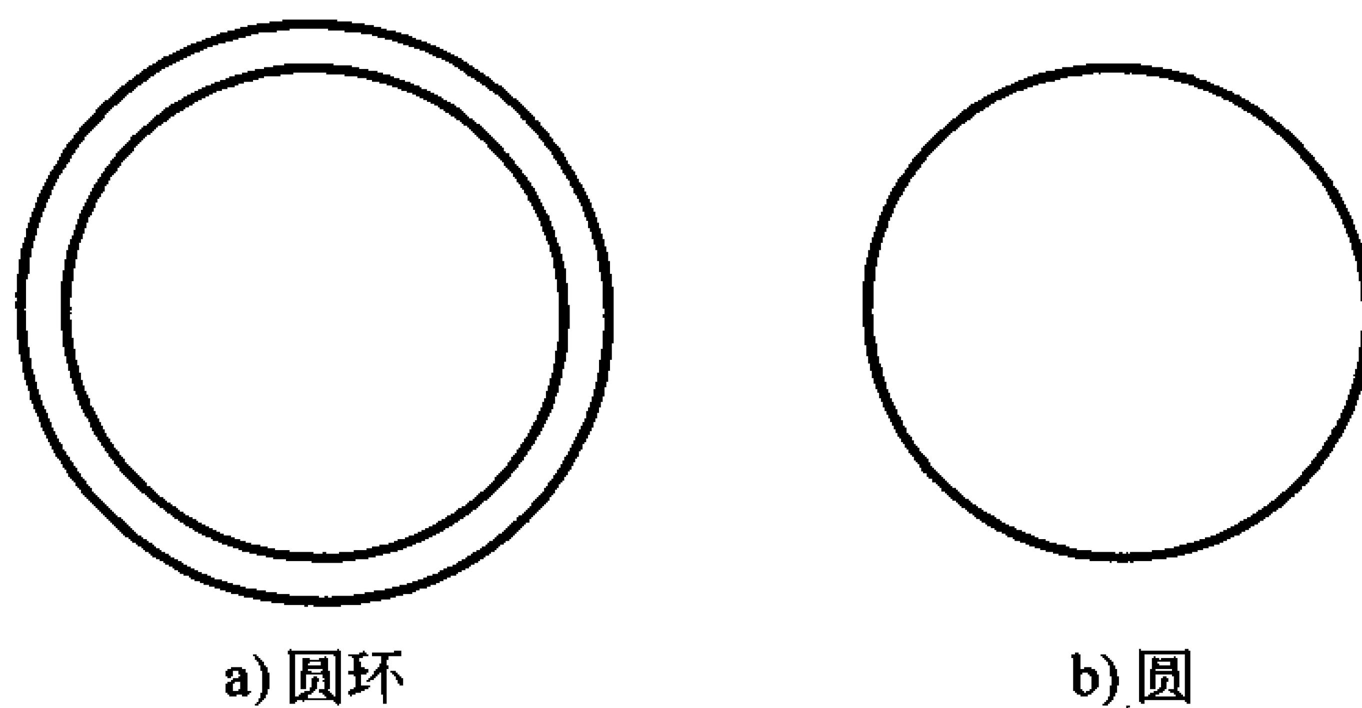


图 5.2.1

5.3 施图姆-刘维尔特征值问题

5.3.1 一般分类

微分方程. 边值问题是由线性齐次微分方程和相应的线性齐次边界条件组成. 本书中讨论的所有边值问题的微分方程都能写成如下形式:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)+q\phi+\lambda\sigma\phi=0,} \tag{5.3.1}$$

其中 λ 是特征值. 变量 x 被定义在有限区间 $a<x<b$ 上. 下面是四个例子:

1. 最简单的情形: $\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}+\lambda\phi=0$; 其中 $p=1$, $q=0$, $\sigma=1$.

2. 非均匀杆的热流: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(K_0\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)+\alpha\phi+\lambda c\rho\phi=0$; 其中, $p=K_0$, $q=\alpha$, $\sigma=c\rho$. [161]

3. 非均匀弦的振动: $T_0\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}+\alpha\phi+\lambda\rho_0\phi=0$; 其中, $p=T_0$(常数), $q=\alpha$, $\sigma=\rho_0$(见习题 5.3.1).

4. 圆对称热流: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\right)+\lambda r\phi=0$; 这里, 自变量 $x=r$ 和 $p(x)=x$, $q(x)=0$, $\sigma(x)=x$. 对(5.3.1)形式的方程, 已经知道了很多有意思的结果. 方程(5.3.1)称为施图姆-刘维尔微分方程, 它是以 19 世纪中期研究它的两个著名数学家的名字命名的.

边界条件. 已经研究过的线性齐次边界条件具有以下形式, 同时也引入了一些数学术语.

	热　流	振 动 弦	数学术语
$\phi=0$	固定温度(零)	固定位移(零)	第一类或狄利克雷条件
$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}=0$	绝热	自由	第二类或诺伊曼条件
$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}=\pm h\phi$ (+: 左边 －: 右边)	(齐次的) 牛顿冷却定律(外部温度 0°) $h=H/K_0$, $h>0$(物理)	(齐次的) 弹性边界条件 $h=k/T_0$, $h>0$(物理)	第三类或罗宾条件
$\phi(-L)=\phi(L)$ $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(-L)=\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(L)$	完全热接触点	—	周期条件(混合类型的例子)
$\lvert\phi(0)\rvert<\infty$	有界温度	—	奇异条件

5.3.2 正则施图姆-刘维尔特征值问题

正则施图姆-刘维尔特征值问题由下面两部分组成: 一是施图姆-刘维尔微分方程

162

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)+q(x)\phi+\lambda\sigma(x)\phi=0}\quad a<x<b, \tag{5.3.2}$$

二是包括了已经讨论过的所有情形的边界条件(除了周期性和奇异情形外)

$$\boxed{\begin{aligned}\beta_1\phi(a)+\beta_2\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(a)&=0\\ \beta_3\phi(b)+\beta_4\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(b)&=0,\end{aligned}} \tag{5.3.3}$$

其中β_i是实的. 另外，正则性要求：系数p，q和σ都必须是实的，处处(包括端点)是连续的，且处处(也包括端点)都有$p>0$和$\sigma>0$. 对正则施图姆-刘维尔特征值问题，有很多重要的一般性定理. 这些结果将在5.5节中证明，在5.7节和5.8节中，要研究一些更有趣的例子，这些例子说明了这些一般定理的意义.

定理内容. 首先(同时)叙述一下后面会仔细讨论(有些要证明)的全部定理. 对任何正则施图姆-刘维尔问题，下面的所有定理都成立：

1. 所有特征值λ是实的.
2. 存在无穷多个特征值：
$$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\lambda_{n+1}<\cdots.$$
   a. 存在最小特征值，通常记为λ_1.
   b. 不存在最大特征值，并且当$n\to\infty$时，$\lambda_n\to\infty$.
3. 对应每个特征值λ_n，存在一个特征函数，用$\phi_n(x)$表示(在不计常数倍的意义下它是唯一的). $\phi_n(x)$在$a<x<b$上正好有$n-1$个零点.
4. 特征函数$\phi_n(x)$构成一个“完全”集，即任意分段光滑函数$f(x)$，可以用特征函数的广义傅里叶级数表示：
$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\phi_n(x).$$
   此外，这个无穷级数在$a<x<b$上收敛于$[f(x+)+f(x-)]/2$(如果适当选择系数a_n).
5. 属于不同特征值的特征函数相对于权函数$\sigma(x)$都是正交的. 换句话说，
$$\int_a^b\phi_n(x)\phi_m(x)\sigma(x)\,\mathrm{d}x=0\quad 如果\ \lambda_n\neq\lambda_m.$$
6. 每个特征值与其特征函数的联系可以由瑞利商表示：
$$\lambda=\frac{-p\phi\,\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x\big|_a^b+\int_a^b[p(\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x)^2-q\phi^2]\,\mathrm{d}x}{\int_a^b\phi^2\sigma\,\mathrm{d}x},$$
   其中的边界条件可能会简化这个表达式.

163

应该提及的是，如果施图姆-刘维尔特征值问题不是“正则的”，这些定理也可能成立. 在

7.7 节和 7.8 节中，就给出一个这样的例子.

5.3.3 定理的举例和说明

在 5.5 节证明这些定理中的部分定理之前，通过参照下面正则施图姆–刘维尔问题中最简单的例子，先分别说明一下各个定理的含义：

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d^2\phi}{dx^2}+\lambda\phi&=0\\ \phi(0)&=0\\ \phi(L)&=0.\end{aligned}} \tag{5.3.4}$$

这个常系数微分方程在两个端点处具有零边界条件. 其特征值和对应的特征函数是

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad 满足 \quad \phi_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{L},\quad n=1,2,3,\cdots,$$

它给出了傅里叶正弦级数.

1. **实特征值**. 定理断言正则施图姆–刘维尔问题的所有特征值 λ 都是实的. 所以，(5.3.4)的特征值应该都是实的. 其特征值是$(n\pi/L)^2$，$n=1$，2，…. 不过，在确定该结果时(见 2.3.4 节)，只分析了三种情形：$\lambda>0$，$\lambda=0$ 和 $\lambda<0$. 而没有花精力去寻找复特征值，因为这很麻烦，并且也不会得到除了$(n\pi/L)^2$ 之外的特征值. 所以，此定理(证明见 5.5 节)是很有用的. 它保证了不必考虑复值的 λ.

2. **特征值的排序**. (5.3.4)有无穷多个特征值，即 $\lambda=(n\pi/L)^2$，$n=1$，2，…. 有时，使用记号 $\lambda_n=(n\pi/L)^2$. 注意，只有最小特征值 $\lambda_1=(\pi/L)^2$，但没有最大特征值，因为当 $n\to\infty$ 时，$\lambda_n\to\infty$. 定理表明，这对任何正则施图姆–刘维尔问题都成立.

3. **特征函数的零点**. 对(5.3.4)的特征值 $\lambda_n=(n\pi/L)^2$，特征函数是 $\sin n\pi x/L$. 使用记号 $\phi_n(x)=\sin n\pi x/L$. 这个特征函数(在不计常数倍的意义下)是唯一的.

该定理的一个重要和有趣的方面是断言：对所有正则施图姆–刘维尔问题，第 n 个特征函数不计端点恰好有$(n-1)$个零点. 对应最小特征值(λ_1，$n=1$)的特征函数 ϕ_1 在内部应当没有零点. 对应次小特征值(λ_2，$n=2$)的特征函数 ϕ_2 在内部应当恰有一个零点；如此等等. 下面用特征值问题(5.3.4)说明这些性质. 对 $n=1$，2，3，图 5.3.1 中有特征函数 $\phi_n(x)=\sin n\pi x/L$ 的草图. 显然可见定理是正确的(只要数数内部的零点数)；$\sin\pi x/L$ 在 $x=0$ 和 $x=L$ 之间没有零点，$\sin 2\pi x/L$ 在 $x=0$ 和 $x=L$ 之间有一个零点，$\sin 3\pi x/L$ 在 $x=0$ 和 $x=L$ 之间有两个零点. 164

4. **特征函数的级数**. 根据定理，任何分段光滑的函数 $f(x)$ 总可以用特征函数表示，

$$\boxed{f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\phi_n(x).} \tag{5.3.5}$$

所以，对例(5.3.4)有

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

这就是傅里叶正弦级数. 可知，任何分段光滑函数都可以表示成傅里叶正弦级数，且对 $0<x<L$该无穷级数收敛于$[f(x+)+f(x-)]/2$. 如果对于 $0<x<L$，$f(x)$是连续的，则级数收敛

于$f(x)$. 定理断言：任何正则施图姆-刘维尔特征值问题的特征函数级数都具有傅里叶正弦级数的收敛性质. (5.3.5)式称为$f(x)$按特征函数$\phi_n(x)$的展开式，或简单地说，特征函数展开. 也称为$f(x)$的广义傅里叶级数. 系数a_n称为特征函数展开的系数，或广义傅里叶系数. 相当任意的函数都可以用特征函数的无穷级数来表示这一点，使得分离变量法能够用于求解偏微分方程.

165

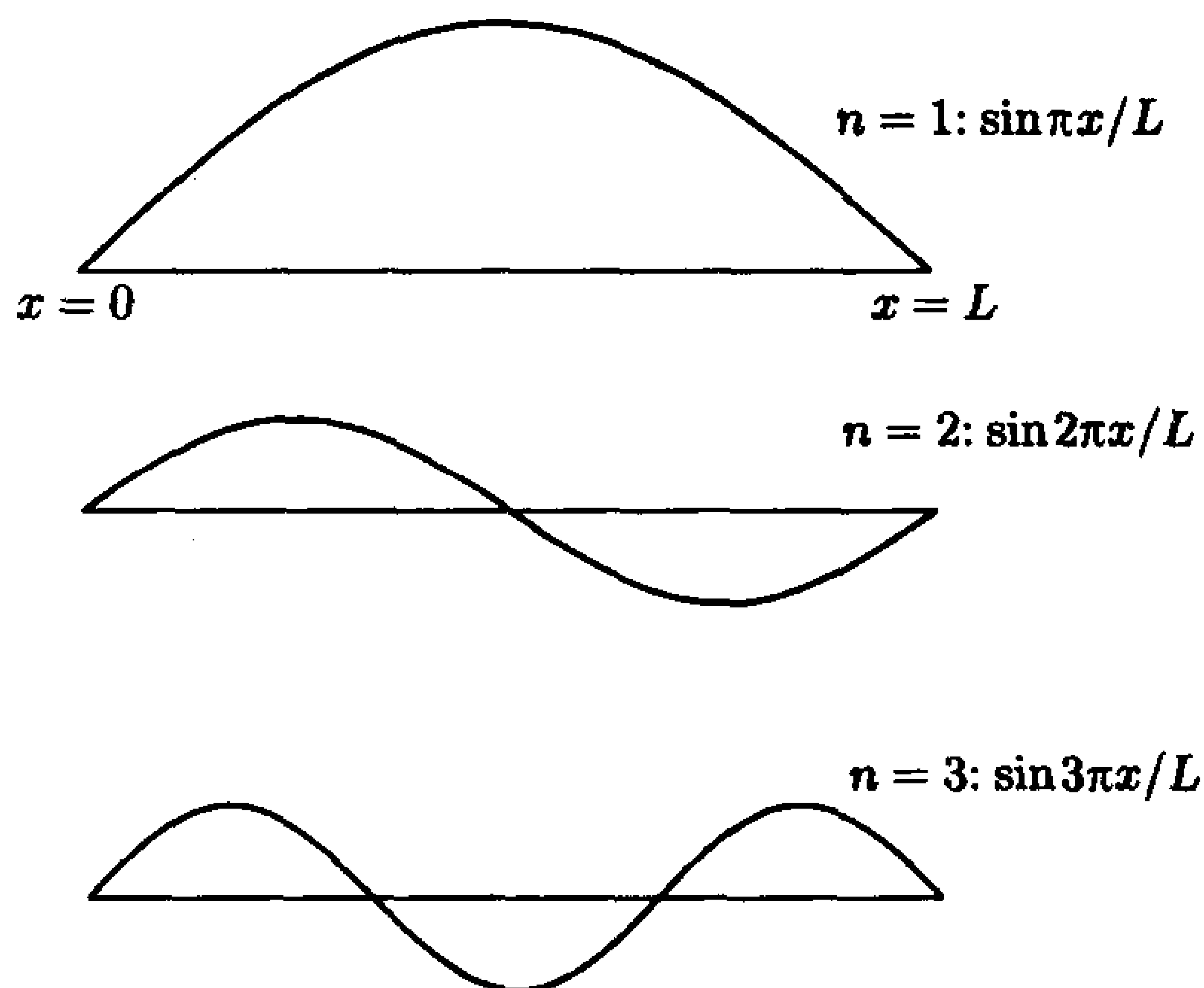


图 5.3.1 特征函数 $\sin n\pi x/L$ 的零点

5. **特征函数的正交性**. 前面的定理表明函数都能够表示成特征函数的级数(5.3.5). 这里要说明如何确定广义傅里叶系数a_n. 现在要叙述的重要定理是：任何正则施图姆-刘维尔特征值问题的特征函数总是正交的，为此一定要在正交关系中引入权函数$\sigma(x)$：

$$\boxed{\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)\sigma(x)\,\mathrm{d}x = 0,} \qquad \text{如果} \quad \lambda_n \neq \lambda_m. \tag{5.3.6}$$

其中的$\sigma(x)$是微分方程中与特征值λ相乘的系数，它可能是变系数. 由于每个特征值只对应一个特征函数，(5.3.6)中的“如果$\lambda_n \neq \lambda_m$”就可以用“如果$n \neq m$”替换. 对于傅里叶正弦级数的例子，其微分方程是$\mathrm{d}^2\phi/\mathrm{d}x^2 + \lambda\phi = 0$，与一般的施图姆-刘维尔问题相比较就有$\sigma(x) = 1$. 此时的权函数是1，并且如果$n \neq m$，已知的正交条件$\int_0^L \sin n\pi x/L \sin m\pi x/L\,\mathrm{d}x = 0$成立.

与傅里叶正弦级数一样，用正交性来确定广义傅里叶系数. 为了利用正交性条件(5.3.6)，一定要用$\phi_m(x)$和$\sigma(x)$乘以(5.3.5)，

$$f(x)\phi_m(x)\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x)\phi_m(x)\sigma(x),$$

此处假定这些运算对无穷级数是有效的，并且引入等号. 从$x = a$到$x = b$积分得到

$$\int_a^b f(x)\phi_m(x)\sigma(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)\sigma(x)\,\mathrm{d}x.$$

因为特征函数[关于权函数$\sigma(x)$]是正交的，故除n等于m的积分外，右端的所有积分都为零：

$$\int_a^b f(x)\phi_m(x)\sigma(x)\mathrm{d}x = a_m\int_a^b \phi_m^2(x)\sigma(x)\mathrm{d}x.$$

(由正则施图姆-刘维尔问题的定义)权函数 $\sigma(x)$ 一定是正的，所以右边的积分不为零，因此，可以用它去除等式两端，就确定了广义傅里叶系数 a_m：

$$\boxed{a_m = \frac{\int_a^b f(x)\phi_m(x)\sigma(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b \phi_m^2(x)\sigma(x)\mathrm{d}x}.} \tag{5.3.7}$$

166

对于傅里叶正弦级数的例子，$a=0$，$b=L$，$\phi_n=\sin n\pi x/L$ 和 $\sigma(x)=1$. 相应的积分 $\int_0^L \sin^2 n\pi x/L\mathrm{d}x = L/2$，则(5.3.7)可简化为已知的傅里叶正弦级数的系数公式. 不过，想简单地求出(5.3.7)分母上的积分似乎不太可能.

6. **瑞利商**. 在5.6节要证明特征值可以按下面的方式与其特征函数相联系：

$$\lambda = \frac{-p\phi\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x\,\big|_a^b + \int_a^b [p(\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x)^2 - q\phi^2]\mathrm{d}x}{\int_a^b \phi^2\sigma\mathrm{d}x}, \tag{5.3.8}$$

这称为瑞利商. 分子包含积分项和在边界求值的项. 因为不知道特征值就不能确定特征函数，所以这个表达式不能直接用于确定特征值. 然而，不解微分方程也能从瑞利商那里获得有趣和重要的结果. 考虑傅里叶正弦级数的例子(5.3.4)：$a=0$，$b=L$，$p(x)=1$，$q(x)=0$ 和 $\sigma(x)=1$. 因为 $\phi(0)=0$ 和 $\phi(L)=0$，则瑞利商给出

$$\lambda = \frac{\int_0^L (\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x)^2\mathrm{d}x}{\int_0^L \phi^2\mathrm{d}x}. \tag{5.3.9}$$

虽然由于不知道 ϕ 而无法确定 λ，但它也给出了有用的信息. 分子和分母都 $\geqslant 0$. 因为 ϕ 是特征函数而不能恒为零，故分母不可能为零. 所以，由(5.3.9)得到 $\lambda\geqslant 0$. 因此在不解微分方程的条件下，立刻就推出没有负的特征值. 而在第一次求这个问题的特征值时，却花了很大功夫证明其没有负特征值(见2.3节). 现在，简单地应用一下瑞利商，就排除了这个问题有负特征值的可能性. 以后还会要在更难的问题中证明 $\lambda\geqslant 0$.

此外，有时甚至可以用瑞利商分析 $\lambda=0$ 的可能性. 那么对满足零边界条件 $\phi(0)=0$ 和 $\phi(L)=0$ 的简单问题(5.3.4)，是否可能直接从(5.3.9)看出 $\lambda=0$ 的可能性. 因为只有当对所有 x，$\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x=0$ 时，$\lambda=0$. 所以，由积分，对所有 x，ϕ 一定是个常数. 然而，由边界条件[或者 $\phi(0)=0$ 或者 $\phi(L)=0$]，该常数必为零. 所以，只有当 ϕ 处处为0时，$\lambda=0$. 但如果 ϕ 处处等于0，就不能称 ϕ 为特征函数了. 故而，此时 $\lambda=0$ 不是一个特征值，进一步推出 $\lambda>0$；所有的特征值一定都是正的. 这是在不使用微分方程解的条件下得出的结论. 这个例子的特征值 $\lambda_n=(n\pi/L)^2(n=1, 2, \cdots)$ 与瑞利商的结论相一致. 瑞利商的其他应用还将出现在后面的章节中.

167

习题 5.3

*5.3.1 做习题4.4.2(b). 证明其偏微分方程可以写成施图姆–刘维尔形式.

5.3.2 考虑

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial t}.$$

(a)给出其简要的物理解释. 物理上，α 和 β 应该取什么符号?

(b)允许 ρ，α，β 为 x 的函数. 证明只有当 $\beta = c\rho$ 时，分离变量才有效，其中 c 为常数.

(c)如果 $\beta = c\rho$，证明空间方程是施图姆–刘维尔微分方程. 并求解时间方程.

*5.3.3 考虑非施图姆–刘维尔微分方程

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \alpha(x)\frac{d\phi}{dx} + [\lambda\beta(x) + \gamma(x)]\phi = 0.$$

用 $H(x)$ 乘这个方程. 求 $H(x)$，使得该方程可以简化为标准的施图姆–刘维尔形式:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\phi}{dx}\right] + [\lambda\sigma(x) + q(x)]\phi = 0.$$

给定了 $\alpha(x)$，$\beta(x)$ 和 $\gamma(x)$，何为 $p(x)$，$\sigma(x)$ 和 $q(x)$?

5.3.4 考虑带有对流的热流(见习题1.5.2):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - V_0\frac{\partial u}{\partial x}.$$

(a)证明由分离变量得到的空间常微分方程不具有施图姆–刘维尔形式.

*(b)求解初值问题

$$u(0,t) = 0$$
$$u(L,t) = 0$$
$$u(x,0) = f(x).$$

(c)求解初值问题

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

$$u(x,0) = f(x).$$

168

5.3.5 对施图姆–刘维尔特征值问题，

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda\phi = 0 \quad 满足 \quad \frac{d\phi}{dx}(0) = 0 \quad 和 \quad \frac{d\phi}{dx}(L) = 0,$$

验证下列一般性质:

(a)存在无穷多个特征值，有最小特征值，但没有最大特征值.

(b)第 n 个特征函数有 $n-1$ 个零点.

(c)特征函数是完全正交的.

(d)对于负的和零特征值，瑞利商给出了什么?

5.3.6 对下面的施图姆–刘维尔特征值问题，重做习题5.3.5.

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda\phi = 0 \quad 满足 \quad \frac{d\phi}{dx}(0) = 0 \quad 和 \quad \phi(L) = 0.$$

5.3.7 对下列特征值问题，本节定理中的1~5，哪些还是有效的?

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda\phi = 0 \quad 满足 \quad \phi(-L) = \phi(L)$$

$$\frac{d\phi}{dx}(-L) = \frac{d\phi}{dx}(L).$$

5.3.8 对下列特征值问题，证明 $\lambda \geqslant 0$，

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + (\lambda - x^2)\phi = 0 \quad 满足 \quad \frac{d\phi}{dx}(0) = 0, \quad \frac{d\phi}{dx}(1) = 0.$$

试问 $\lambda = 0$ 是特征值吗？

5.3.9 考虑特征值问题

$$x^2 \frac{d^2\phi}{dx^2} + x\frac{d\phi}{dx} + \lambda\phi = 0 \quad 满足 \quad \phi(1) = 0 \quad 和 \quad \phi(b) = 0 \tag{5.3.10}$$

(a)证明乘以 $1/x$(这个乘积因子由习题 5.3.3 得到)之后，该方程变成施图姆-刘维尔形式.

(b)证明 $\lambda \geqslant 0$.

*(c)因为(5.3.10)是一个等量纲方程，请确定所有正的特征值. $\lambda = 0$ 是特征值吗？证明存在无穷多个特征值，有最小特征值，但没有最大特征值.

(d)由施图姆-刘维尔理论，特征函数关于什么样的权函数正交？用积分性质验证正交性.

(e)证明第 n 个特征函数有 $n-1$ 个零点.

5.3.10 在下列边界条件下，重新考虑习题 5.3.9.

$$\frac{d\phi}{dx}(1) = 0 \quad 和 \quad \frac{d\phi}{dx}(b) = 0.$$

169

5.4 例子：非均匀杆中的无热源热流

本节将解释正则施图姆-刘维尔特征值问题的一般定理对偏微分方程的应用. 考虑非均匀杆(可能有非常数导热系数 c, ρ, K_0)中的无热源热流；参看 1.2 节或 5.2.1 节. 左端 $x=0$ 处温度指定为 $0°$，右端绝热. 给定初始温度分布. 这个问题的数学形式是

$$\text{PDE:} \quad \boxed{c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)} \tag{5.4.1}$$

$$\text{BC:} \quad \boxed{\begin{aligned} u(0,t) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) &= 0 \end{aligned}} \tag{5.4.2}$$

$$\text{IC:} \quad \boxed{u(x,0) = f(x).} \tag{5.4.3}$$

因为偏微分方程和边界条件都是齐次线性的，求乘积形式的特解(不计初值条件)：

$$u(x,t) = \phi(x)h(t). \tag{5.4.4}$$

在分离变量后(细节见 5.2.1 节)得到：时间部分满足常微分方程

$$\frac{dh}{dt} = -\lambda h, \tag{5.4.5}$$

而空间部分满足下列正则施图姆-刘维尔特征值问题：

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(K_0\frac{d\phi}{dx}\right) + \lambda c\rho\phi = 0} \tag{5.4.6}$$

$$\boxed{\phi(0) = 0} \tag{5.4.7}$$

$$\boxed{\frac{d\phi}{dx}(L) = 0.} \tag{5.4.8}$$

170

根据有关施图姆-刘维尔特征值问题的定理，存在特征值 λ_n 和相应特征函数 $\phi_n(x)$ 的无穷序列. 假定 $\phi_n(x)$ 是已知的(利用数值法近似地确定前面几个可能有些困难，尽管如此，这还是能做到的). 容易解出有关时间部分的微分方程

$$h(t) = ce^{-\lambda_n t}. \tag{5.4.9}$$

如此，得到了偏微分方程乘积解的一个无穷序列

$$u(x,t) = \phi_n(x)e^{-\lambda_n t}. \tag{5.4.10}$$

根据叠加原理，试图用这些乘积解的一个无穷线性组合来满足初值条件：

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(x)e^{-\lambda_n t}.} \tag{5.4.11}$$

这个无穷级数满足偏微分方程和齐次边界条件. 要证明由初值条件可以确定未知常数的 a_n：

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(x). \tag{5.4.12}$$

定理给出：任何分段光滑的 $f(x)$ 都可以用这种特征函数级数表示. 系数 a_n 是初值条件下的广义傅里叶系数. 还有，特征函数与关于杆的物理性质所确定的权函数 $\sigma(x)=c(x)\rho(x)$ 正交：

$$\int_0^L \phi_n(x)\phi_m(x)c(x)\rho(x)\,dx = 0 \quad 对 \quad n \neq m.$$

利用这些正交性公式，广义傅里叶系数是

$$\boxed{a_n = \frac{\int_0^L f(x)\phi_n(x)c(x)\rho(x)\,dx}{\int_0^L \phi_n^2(x)c(x)\rho(x)\,dx}.} \tag{5.4.13}$$

(5.4.11)就是所求的解，其系数由(5.4.13)给出.

为了给出这个解的最低限度解释，应当要问对于大 t，会出现什么情形. 因为特征值构成一个递增的序列，对大 t，(5.4.11)内每个后一项都指数阶地小于前一项. 所以，对于大时间，这个解大约为

171

$$u(x,t) \approx a_1\phi_1(x)e^{-\lambda_1 t}. \tag{5.4.14}$$

如果 $a_1=0$，这个近似结果不是很好，此时，(5.4.14)应该是第一个非零项. 不过，初始温度 $f(x)$ 经常是非负的(且不恒为零). 因此，由(5.4.13)可以证明 $a_1\neq 0$：

$$a_1 = \frac{\int_0^L f(x)\phi_1(x)c(x)\rho(x)\,dx}{\int_0^L \phi_1^2(x)c(x)\rho(x)\,dx}. \tag{5.4.15}$$

因为 $\phi_1(x)$ 是对应最小特征值的特征函数且没有零点；$\phi_1(x)$ 具有同一符号，所以 $a_1\neq 0$. 因此，若 $f(x)>0$ 就推出 $a_1\neq 0$，因为 $c(x)$ 和 $\rho(x)$ 都是正的物理函数. 为画出解对固定大 t 的草图，(5.4.14)表明所要求的就是第一个特征函数. 至少，第一个特征函数的数值计算要比前一百个的计算容易得多.

对于大时间，温度的空间分布"形状"随时间近似地保持不变. 它的振幅随时间增长还是衰减，取决于 $\lambda_1>0$ 还是 $\lambda_1<0$(如果 $\lambda_1=0$，随时间是不变的). 因为这是一个无热源和在 $x=0$ 处温度为零的热流问题，当然期望温度依指数衰减到0°(即期望 $\lambda_1>0$). 虽然右端是绝

热的，但左端为零，热能应当从左端流出. 现在从数学上证明所有的 $\lambda>0$. 由 $p(x)=K_0(x)$，$q(x)=0$ 和 $\sigma(x)=c(x)\rho(x)$，所以从瑞利商得到

$$\lambda=\frac{\int_0^L K_0(x)(\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x)^2\mathrm{d}x}{\int_0^L \phi^2 c(x)\rho(x)\mathrm{d}x},\tag{5.4.16}$$

其中由于齐次边界条件(5.4.7)和(5.4.8)，边界对(5.4.16)的贡献为零. 因为导热系数是正的，立刻可从(5.4.16)得到所有 $\lambda\geqslant 0$. 更进一步，$\lambda>0$，$\phi=$ 常数不可能是特征函数[而 $\phi(0)=0$]. 所以，对这个例子证明了 $\lim\limits_{t\to\infty}u(x,t)=0$.

习题 5.4

5.4.1 考虑

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\alpha u,$$

其中 c，ρ，K_0，α 都是 x 的函数，满足

$$u(0,t)=0$$
$$u(L,t)=0$$
$$u(x,0)=f(x).$$

假定其特征函数是已知的.

(a) 证明如果 $\alpha<0$，特征值是正的(见 5.2.1 节).

(b) 求解初值问题.

(c) 简要讨论 $\lim\limits_{t\to\infty}u(x,t)$.

172

*5.4.2 考虑

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K_0\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

其中 c，ρ，K_0 都是 x 的函数，满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0$$
$$u(x,0)=f(x).$$

假定其特征函数是已知的. 求解初值问题，简要讨论 $\lim\limits_{t\to\infty}u(x,t)$.

*5.4.3 求解

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right),$$

满足 $u(r,0)=f(r)$，$u(0,t)$ 有界和 $u(a,t)=0$. 可以假定其对应特征函数(用 $\phi_n(r)$ 表示)是已知的和完全的. (提示：见 5.2.2 节.)

5.4.4 考虑下列边值问题：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad 满足\quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0\quad 和\quad u(L,t)=0.$$

求满足 $u(x,0)=\sin\pi x/L$(初值条件)的解. (提示：如果需要，可使用积分表.)

5.4.5 考虑

$$\rho\frac{\partial u^2}{\partial t^2}=T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha u,$$

其中 $\rho(x)>0$，$\alpha(x)<0$，T_0 是常数，满足

$$u(0,t)=0 \quad u(x,0)=f(x)$$

$$u(L,t)=0 \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x).$$

假定特征函数是已知的．求解初值问题．

*5.4.6 考虑质量密度为 $\rho_0(x)$ 的非均匀弦的振动．假设左端在 $x=0$ 处是固定的，右端在 $x=L$ 处服从弹性边界条件：$\partial u/\partial x=-(k/T_0)u$．并假设初始静止弦的起始位置为 $f(x)$．求解这个初值问题．（提示：假定特征值和对应的特征函数是已知的．那么它们满足带有何种边界条件的何种微分方程？且特征函数关于什么样的权函数正交？）

173

5.5 自伴算子和施图姆–刘维尔特征值问题

引言．本节证明正则施图姆–刘维尔特征值问题的一些性质：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)\phi+\lambda\sigma(x)\phi=0} \tag{5.5.1}$$

$$\boxed{\beta_1\phi(a)+\beta_2\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(a)=0} \tag{5.5.2}$$

$$\boxed{\beta_3\phi(b)+\beta_4\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(b)=0,} \tag{5.5.3}$$

其中 β_i 是实的，且在有限区间 $(a\leqslant x\leqslant b)$ 上，p，q，σ 是实连续函数，p，σ 是正的 $[p(x)>0$ 和 $\sigma(x)>0]$．有时，当其中的一些限制去掉时，会对结果的有效性做一些注释．

对上面三个陈述的证明是有些困难的．这里不证明存在无穷多个特征值．对其理解要依赖已经给出的例子和后面章节给出的其他例子．非正则的施图姆–刘维尔特征值问题可能根本就没有特征值．不过，对大多数（在有限区间上）有物理意义的情形，仍然有无穷多个离散特征值．这里不证明分段光滑函数可以用正则施图姆–刘维尔问题的特征函数展开（称为完全性性质），也不证明随后的每个特征函数多一个零点（多振动一次）．

线性算子．引入算子记号，会使要做的证明变得容易些．L 表示线性微分算子 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x[p(x)\,\mathrm{d}/\mathrm{d}x]+q(x)$．算子作用于函数产生另一个函数．这个记号意味着 L 作用于函数 $y(x)$，

$$L(y)\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)y. \tag{5.5.4}$$

所以，$L(y)$ 就是个简略记号．例如，$L\equiv\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2+6$，则 $L(y)=\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2+6y$ 或 $L(\mathrm{e}^{2x})=4\mathrm{e}^{2x}+6\mathrm{e}^{2x}=10\mathrm{e}^{2x}$．

174

一再重复地写施图姆–刘维尔微分方程是相当累赘的．使用线性算子记号会省些事．使用算子记号

$$L(\phi)+\lambda\sigma(x)\phi=0, \tag{5.5.5}$$

其中 λ 是特征值，ϕ 为对应的特征函数．L 可以作用于任何函数，而不只是特征函数．

拉格朗日恒等式．大多数有关施图姆–刘维尔特征值问题的证明都是一个有趣和基本公式的直接推论，该公式称为拉格朗日恒等式．为方便起见，这里使用算子记号．对于任意两个函数 u 和 v（不一定是特征函数），要计算 $uL(v)-vL(u)$．回想一下

$$L(u) = \frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu \text{ 和 } L(v) = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dv}{dx}\right) + qv,$$

所以

$$uL(v) - vL(u) = u\frac{d}{dx}\left(p\frac{dv}{dx}\right) + uqv - v\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) - vqu, \tag{5.5.6}$$

其中应该注意到 $uqv - vqu$ 被消去了. (5.5.6)的右边被处理为一个恰当微分：

$$\boxed{uL(v) - vL(u) = \frac{d}{dx}\left[p\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\right],} \tag{5.5.7}$$

称为拉格朗日恒等式的微分形式. 要推导(5.5.7)，注意由乘积法则得到

$$u\frac{d}{dx}\left(p\frac{dv}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[u\left(p\frac{dv}{dx}\right)\right] - \left(p\frac{dv}{dx}\right)\frac{du}{dx},$$

类似地

$$v\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[v\left(p\frac{du}{dx}\right)\right] - \left(p\frac{du}{dx}\right)\frac{dv}{dx}.$$

将这两式相减就得到方程(5.5.7). 后面[见(5.5.21)]，要用到微分形式(5.5.7).

格林公式. 拉格朗日恒等式的积分形式还被称为格林公式. 对任意函数[⊖] u 和 v 积分(5.5.7)得到

$$\boxed{\int_a^b [uL(v) - vL(u)]dx = p\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\Big|_a^b,} \tag{5.5.8}$$

这是一个很有用的公式.

175

例. 如果 $p = 1$ 和 $q = 0$(此时 $L = d^2/dx^2$)，(5.5.7)就是

$$u\frac{d^2v}{dx^2} - v\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right),$$

这很容易独立验证. 对这个例子，格林公式是

$$\int_a^b \left(u\frac{d^2v}{dx^2} - v\frac{d^2u}{dx^2}\right)dx = \left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\Big|_a^b.$$

自伴性. 作为格林公式的一个重要实例，假设 u 和 v 是任意两个函数，但附加上边界项恰巧为零的限制，

$$p\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\Big|_a^b = 0.$$

则由(5.5.8)，$\int_a^b [uL(v) - vL(u)]dx = 0.$

现在说明边界项怎样可能为零. 不讨论任意函数，而是要求 u 和 v 都满足相同的齐次边界条件. 例如，假设 u 和 v 为任意两个满足下列边界条件的函数：

$$\phi(a) = 0$$

$$\frac{d\phi}{dx}(b) + h\phi(b) = 0.$$

因为 u 和 v 都满足这些条件，就得到

⊖ 积分要求 du/dx 和 dv/dx 是连续的.

$$u(a)=0 \qquad\qquad v(a)=0$$
$$\frac{du}{dx}(b)+hu(b)=0 \quad \text{和} \quad \frac{dv}{dx}(b)+hv(b)=0;$$

否则，对 u 和 v 没有任何其他要求. 此时，格林公式的边界项为零：

$$p\left(u\frac{dv}{dx}-v\frac{du}{dx}\right)\bigg|_a^b = p(b)\left[u(b)\frac{dv}{dx}(b)-v(b)\frac{du}{dx}(b)\right]$$
$$=p(b)[-u(b)hv(b)+v(b)hu(b)]=0.$$

所以，对满足这些齐次边界条件的任意函数 u 和 v，可知

$$\int_a^b[uL(v)-vL(u)]dx=0.$$

事实上(见习题5.5.1)，对满足相同正则施图姆-刘维尔特征值问题(5.5.2)和(5.5.3)的边界条件的任意函数 u 和 v，边界项也都为零. 所以，讨论正则施图姆-刘维尔特征值问题时，有下列定理：

176

如果 u 和 v 是满足相同(正则施图姆-刘维尔型)齐次边界条件的任意两个函数，则 $\int_a^b[uL(v)-vL(u)]dx=0$.	(5.5.9)

当(5.5.9)成立时，称(带有对应边界条件的)算子 L 是自伴的[⊖].

除了正则施图姆-刘维尔型的边界条件，边界项在其他情形中也会为零. 这里简单地讨论另外两个重要例子. 周期边界条件(对非常数系数算子)一般可以化为

$$\phi(a)=\phi(b) \quad \text{和} \quad p(a)\frac{d\phi}{dx}(a)=p(b)\frac{d\phi}{dx}(b).$$

在这种情形，可以证明(5.5.9)(见习题5.5.1)也是有效的. 格林公式中边界项为零的另一个例子是“奇异”情形. 如果微分算子的二阶导数系数在一个端点处是零，则出现奇异情形；例如，如果在 $x=0$ 处，$p(x)=0$[即 $p(0)=0$]. 在奇异端点处，就加上奇异条件. 在 $x=0$ 的奇异条件通常是 $\phi(0)$ 有界. 同样可以证明，如果 u 和 v 在 $x=0$ 处满足奇异条件，并在 $x=b$ 满足正则施图姆-刘维尔型边界条件，则(5.5.9)成立(见习题5.5.1).

正交的特征函数. 现在要表明格林公式的有效性. 首先证明施图姆-刘维尔特征值问题的重要正交关系. 对很多类型的边界问题，对应不同特征值的特征函数关于权函数 $\sigma(x)$ 是正交的. 为此，设 λ_n 和 λ_m 是具有对应特征函数 $\phi_n(x)$ 和 $\phi_m(x)$ 的特征值. 使用算子记号，这些特征函数所满足的微分方程是

$$L(\phi_n)+\lambda_n\sigma(x)\phi_n=0 \tag{5.5.10}$$
$$L(\phi_m)+\lambda_m\sigma(x)\phi_m=0. \tag{5.5.11}$$

此外，ϕ_n 和 ϕ_m 都满足相同的齐次边界条件. 因为 u 和 v 是任意函数，在格林公式中，取 $u=\phi_m$ 和 $v=\phi_n$：

177

$$\int_a^b[\phi_m L(\phi_n)-\phi_n L(\phi_m)]dx=p(x)\left(\phi_m\frac{d\phi_n}{dx}-\phi_n\frac{d\phi_m}{dx}\right)\bigg|_a^b.$$

⊖ 在本书中，通常避免对伴随算子的解释. 这里 L 等于其伴随算子，故称为自伴的.

由(5.5.10)和(5.5.11)可以消去 $L(\phi_n)$ 和 $L(\phi_m)$. 所以，

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b \phi_n\phi_m\sigma \mathrm{d}x = p(x)\left(\phi_m \frac{\mathrm{d}\phi_n}{\mathrm{d}x} - \phi_n \frac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}x}\right)\Bigg|_a^b, \tag{5.5.12}$$

对应于用 ϕ_m 乘(5.5.10)，用 ϕ_n 乘(5.5.11)，两式相减，再积分. 应用格林公式，就避免了这些(特别是积分)步骤. 对很多不同类型的边界条件(即正则施图姆-刘维尔型，周期情形和奇异情形)，如果 u 和 v 都满足相同的齐次边界条件，则边界项为零. 因为 u 和 v 是特征函数，它们肯定满足这个条件，所以，(5.5.12)给出

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b \phi_n\phi_m\sigma \mathrm{d}x = 0. \tag{5.5.13}$$

如果 $\lambda_m \neq \lambda_n$，则直接得到

$$\boxed{\int_a^b \phi_n\phi_m\sigma \mathrm{d}x = 0.} \tag{5.5.14}$$

换句话说，对应不同特征值($\lambda_n \neq \lambda_m$)的特征函数(ϕ_n 和 ϕ_m)关于权函数 $\sigma(x)$ 正交.

实特征值. 可以利用特征函数的正交性，证明特征值是实的. 假设 λ 是复特征值，$\phi(x)$ 是对应的特征函数(也允许它是复的，因为定义特征函数的微分方程是复的)：

$$L(\phi) + \lambda\sigma\phi = 0. \tag{5.5.15}$$

对复共轭引入符号$^-$(例如，如果 $z = x + \mathrm{i}y$，则$\bar{z} = x - \mathrm{i}y$). 注意，如果 $z = 0$，则$\bar{z} = 0$. 所以，(5.5.15)的复共轭也成立：

$$\overline{L(\phi)} + \bar{\lambda}\sigma\bar{\phi} = 0, \tag{5.5.16}$$

假定系数 σ 是实的，所以，$\bar{\sigma} = \sigma$. 因为线性微分算子的系数也是实的(见习题5.5.7)，$L(\phi)$ 的复共轭恰好是 L 作用于 ϕ 的复共轭，$\overline{L(\phi)} = L(\bar{\phi})$. 所以，

$$L(\bar{\phi}) + \bar{\lambda}\sigma\bar{\phi} = 0. \tag{5.5.17}$$

如果 ϕ 满足具有实系数的边界条件，则$\bar{\phi}$满足相同的边界条件. 例如，如果在 $x = a$ 处，$\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x + h\phi = 0$，则通过取复共轭，在 $x = a$ 处，$\mathrm{d}\bar{\phi}/\mathrm{d}x + h\bar{\phi} = 0$. 方程(5.5.17)和边界条件表明，$\bar{\phi}$满足施图姆-刘维尔特征值问题，但其特征值为$\bar{\lambda}$. 这样就证明了以下定理[⊖]：*如果 λ 是对应特征函数 ϕ 的复特征值，则 $\bar{\lambda}$ 是对应特征函数$\bar{\phi}$的特征值.* [178]

然而，要证明的是 λ 不能是复的. 已经证明了，λ 是一个特征值，则$\bar{\lambda}$也是. 根据基本正交性定理，对应的特征函数(ϕ 和$\bar{\phi}$)一定是(关于权函数 σ)正交的. 所以，由(5.5.13)，

$$(\lambda - \bar{\lambda})\int_a^b \phi\bar{\phi}\sigma \mathrm{d}x = 0. \tag{5.5.18}$$

$\bar{\phi}\phi = |\phi|^2 \geqslant 0\ (\sigma > 0)$ 给出(5.5.18)内的积分$\geqslant 0$. 积分等于零就要求 $\phi \equiv 0$，因为 ϕ 是一个特征函数，这又是不可能的. 于是，(5.5.18)蕴涵着 $\lambda = \bar{\lambda}$，所以，λ 是实的；*所有特征值都是实的*. 而相应的特征函数总可以选择是实的.

⊖ 由二次公式可以得到"类似"型定理：对实系数二次方程，如果 λ 是一个复根，则 $\bar{\lambda}$ 也是. 这对任何实系数代数方程都成立.

特征函数的唯一性(正则和奇异情形). 下面证明，对应一个特征值只能有一个特征函数(周期边界条件除外). 假设有两个不同的特征函数 ϕ_1 和 ϕ_2，对应相同的特征值 λ. 称 λ 是一个重数为 2 的“重”特征值. 此时，

$$
\begin{aligned}
L(\phi_1) + \lambda\sigma\phi_1 &= 0 \\
L(\phi_2) + \lambda\sigma\phi_2 &= 0.
\end{aligned}
\tag{5.5.19}
$$

因为 λ 在两个表达式中是相同的，

$$
\phi_2 L(\phi_1) - \phi_1 L(\phi_2) = 0. \tag{5.5.20}
$$

对它可以做一些简单的积分运算. 但现在不做，而是引用拉格朗日恒等式的微分形式：

$$
\phi_2 L(\phi_1) - \phi_1 L(\phi_2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p\left(\phi_2\frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}x} - \phi_1\frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}x}\right)\right]. \tag{5.5.21}
$$

由(5.5.20)，得到

$$
p\left(\phi_1\frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}x} - \phi_2\frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}x}\right) = \text{constant}. \tag{5.5.22}
$$

常常可以从一个边界条件算出这个常数. 例如，如果在 $x=a$ 处，$\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x + h\phi = 0$，简单的计算表明，该常数 $=0$. 可以证明(习题 5.5.10)，如果至少有一个正则施图姆–刘维尔型(或是奇异型)边界条件，则这个常数还等于零. 由这样的边界条件就得到

179

$$
\phi_1\frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}x} - \phi_2\frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}x} = 0. \tag{5.5.23}
$$

这等价于 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x(\phi_2/\phi_1) = 0$，所以，对这些边界条件

$$
\phi_2 = c\phi_1. \tag{5.5.24}
$$

这表明，对上述的边界条件，任意两个对应相同特征值的特征函数 ϕ_1 和 ϕ_2，一定是彼此互为倍数. 这两个特征函数是相关的；只有一个线性无关的特征函数；特征函数是唯一的.

非唯一特征函数(周期情形). 对周期边界条件，推不出来(5.5.22)中的常数一定为零. 所以，$\phi_2 \neq c\phi_1$ 是有可能的，还可能存在两个不同的特征函数对应相同的特征值.

例如，考虑满足周期边界条件的简单特征值问题，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} + \lambda\phi = 0 \\
&\phi(-L) = \phi(L) \\
&\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(-L) = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(L).
\end{aligned}
\tag{5.5.25}
$$

已经知道，特征值 0 有任意常数可作为它唯一的特征函数. 其他特征值 $(n\pi/L)^2$，$n=1, 2, \cdots$，每个都有两个线性无关的特征函数 $\sin n\pi x/L$ 和 $\cos n\pi x/L$. 这就给出了傅里叶级数. 然而，(5.5.25)不是一个正则施图姆–刘维尔特征值问题，因为其边界条件不具有所设定的形式. 所以关于唯一特征函数的定理就不适用之；对应相同的特征值可能会有两个[⊖]特征函数. 当然，仍然可能只有一个特征函数，如 $\lambda = 0$.

非唯一特征函数(格拉姆–施密特正交化). 由于特征函数的正交性，就能够求出广义的傅

⊖ 不可能有多于两个无关的特征函数，因为微分方程是二阶的.

里叶系数(相应地，也可以求解一些偏微分方程). 不过，定理说，对应不同特征值的特征函数是自然相互正交[关于权函数 $\sigma(x)$]的. 但在周期(或混合型)边界条件的情形，对应相同的特征值可能存在不止一个无关的特征函数. 对这些重特征值，特征函数不会自动相互正交. 在7.5节的附录里，将说明总可以通过一个称为格拉姆-施密特正交化的过程，构造出正交的特征函数.

180

习题5.5

5.5.1 一个施图姆-刘维尔特征值问题称为自伴的，如果

$$p\left(u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}-v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_a^b=0.$$

这是因为，这样对任意两个满足边界条件的函数 u 和 v，$\int_a^b[uL(v)-vL(u)]\mathrm{d}x=0$. 证明下列条件给出自伴问题.

(a) $\phi(0)=0$ 和 $\phi(L)=0$.

(b) $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(0)=0$ 和 $\phi(L)=0$.

(c) $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(0)-h\phi(0)=0$ 和 $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(L)=0$.

(d) $\phi(a)=\phi(b)$ 和 $p(a)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(a)=p(b)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(b)$.

(e) $\phi(a)=\phi(b)$ 和 $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(a)=\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(b)$. [只有当 $p(a)=p(b)$ 时，是自伴的.]

(f) $\phi(L)=0$ 和[$p(0)=0$ 时] $\phi(0)$ 有界，且 $\lim\limits_{x\to0}p(x)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}=0$.

*(g) 在什么条件下，下列问题是自伴的(设 p 是常数)？

$$\phi(L)+\alpha\phi(0)+\beta\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(0)=0$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(L)+\gamma\phi(0)+\delta\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(0)=0$$

5.5.2 证明(下列特征值问题)对应不同特征值的特征函数是正交的：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)\phi+\lambda\sigma(x)\phi=0,$$

具有边界条件

$$\phi(1)=0$$

$$\phi(2)-2\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(2)=0.$$

权函数是什么？

5.5.3 考虑特征值问题 $L(\phi)=-\lambda\sigma(x)\phi$，满足给定的齐次边界条件. 假设对于所有满足相同边界条件的函数 u 和 v，

$$\int_a^b[uL(v)-vL(u)]\mathrm{d}x=0,$$

证明对应不同特征值的特征函数是正交的. (关于什么权函数？)

181

5.5.4 给出对应一个特征值有多于一个特征函数的特征值问题的例子.

5.5.5 考虑

$$L=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+6\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+9.$$

(a)证明：$L(e^{rx})=(r+3)^2e^{rx}$.

(b)利用(a)求得 $L(y)=0$ 的解(二阶常系数微分方程).

(c)如果 z 依赖于 x 和一个参数 r，证明

$$\frac{\partial}{\partial r}L(z)=L\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right).$$

(d)利用(c)，如果 $z=e^{rx}$，计算 $L(\partial z/\partial r)$.

(e)利用(d)，求出 $L(y)=0$ 的第二个解.

5.5.6 证明：如果 x 是实系数六次多项式的根，则 $\bar{x}$ 也是一个根.

5.5.7 对于

$$L=\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right)+q,$$

其中 p 和 q 是实的，证明

$$\overline{L(\phi)}=L(\bar{\phi}).$$

5.5.8 考虑四阶线性微分算子，

$$L=\frac{d^4}{dx^4}.$$

(a)证明 $uL(v)-vL(u)$ 是一个恰当微分.

(b)对任意函数 u 和 v，用边界值计算出 $\int_0^1[uL(v)-vL(u)]dx$.

(c) 证明 $\int_0^1[uL(v)-vL(u)]dx=0$，其中 u 和 v 是任意两个满足下列边界条件的函数：

$$\phi(0)=0,\quad \phi(1)=0$$

$$\frac{d\phi}{dx}(0)=0,\quad \frac{d^2\phi}{dx^2}(1)=0.$$

182

(d)给出另一个边界条件的例子，使得

$$\int_0^1[uL(v)-vL(u)]dx=0.$$

(e)对特征值问题[满足(c)中的边界条件]

$$\frac{d^4\phi}{dx^4}+\lambda e^x\phi=0,$$

证明对应不同特征值的特征函数是正交的. 权函数是什么？

*5.5.9 对特征值问题

$$\frac{d^4\phi}{dx^4}+\lambda e^x\phi=0,$$

其边界条件为

$$\phi(0)=0,\qquad \phi(1)=0$$

$$\frac{d\phi}{dx}(0)=0,\quad \frac{d^2\phi}{dx^2}(1)=0,$$

证明特征值小于或等于零($\lambda\leq 0$). (不必担心；这确实是在物理情形下所期望的.) $\lambda=0$ 是特征值吗？

5.5.10 (a)证明：如果至少有一个边界条件是正则施图姆-刘维尔型的，则由(5.5.22)可推出(5.5.23).

(b)如果有一个边界条件是奇异型的，证明(a).

5.5.11 *(a)假设

$$L=p(x)\frac{d^2}{dx^2}+r(x)\frac{d}{dx}+q(x).$$

考虑

$$\int_a^b vL(u)\,dx.$$

通过重复做分部积分确定伴随算子 L^*，使得

$$\int_a^b [uL^*(v) - vL(u)]\mathrm{d}x = H(x)\Big|_a^b.$$

$H(x)$是什么？在什么条件下，出现自伴情形 $L=L*$？[提示：证明

$$L^* = p\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \left(2\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - r\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \left(\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} + q\right).]$$

(b)如果

$$u(0) = 0 \quad 和 \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(L) + u(L) = 0,$$

为使 $H(x)\big|_0^L = 0$，$v(x)$应满足什么边界条件？此时的边界条件称为自伴边界条件. 183

5.5.12 考虑如习题 5.5.11 内的非自伴算子. 特征值 λ 和所对应的特征函数 ϕ 可能都为复的.

(a)证明：如果 λ 是对应特征函数 ϕ 的复特征值，则复共轭 $\bar{\lambda}$ 是具有特征函数 $\bar{\phi}$ 的特征值.

(b)伴随 L^* 的特征值可能与 L 的特征值不同. 利用习题 5.5.11 的结果，证明如果特征值不同，则 $L(\phi)+\lambda\sigma\phi=0$ 的特征函数关于权函数 σ 与 $L^*(\psi)+v\sigma\psi=0$ 的特征函数是(在复的意义下)正交的. 假定 ψ 满足伴随边界条件，也要用到(a).

5.5.13 利用习题 5.5.11 的结果，证明下列弗雷德霍姆择一性部分(算子没必要是自伴的)：只有当 $f(x)$ 与齐次伴随问题的所有解正交时，满足齐次边界条件的 $L(u)=f(x)$ 的解才可能存在.

5.5.14 如果 L 是一阶线性微分算子

$$L = p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},$$

确定伴随算子 L^*，使得

$$\int_a^b [uL^*(v) - vL(u)]\mathrm{d}x = B(x)\Big|_a^b.$$

$B(x)$是什么？[提示：考虑 $\int_a^b vL(u)\mathrm{d}x$ 并作分部积分.]

5.5 节附录：矩阵特征值问题和特征向量的正交性

设 A 是 $n\times n$ 矩阵(具有项 a_{ij})，x 是 n 维列向量(具有分量 x_i). 矩阵特征值问题

$$Ax = \lambda x \tag{5.5.26}$$

具有许多类似于施图姆-刘维尔特征值问题的性质.

特征值和特征向量. 对 λ 的任何值，$x=0$ 都是齐次线性方程组(5.5.26)的一个"平凡解". 问题是，对 λ 的什么值，有非平凡解？一般地，(5.5.26)可以重新写为

$$(A - \lambda I)x = 0, \tag{5.5.27}$$

其中 I 是单位矩阵. 根据(初等线性代数)线性方程理论，要有非平凡解，就要

$$\det[A - \lambda I] = 0. \tag{5.5.28}$$

184

这样的 λ 值称为特征值，相应的非零向量 x 称为特征向量.

通常，(5.5.28)给出确定特征值的 n 次多项式(称为特征多项式)；将有 n 个特征值(但可能有相同的). 对每个不同的特征值，都有一个特征向量.

例. 如果 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 6 & 1\end{bmatrix}$，则特征值满足特征多项式

$$0 = \det\begin{bmatrix}2-\lambda & 1\\ 6 & 1-\lambda\end{bmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda-4)(\lambda+1),$$

特征值是 $\lambda=4$ 和 $\lambda=-1$. 对于 $\lambda=4$, (5.5.26)变为

$$2x_1+x_2=4x_1 \text{ 和 } 6x_1+x_2=4x_2,$$

或等价地, $x_2=2x_1$. 对 $\lambda=4$, 特征向量$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$是$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$的一个任意倍数. 对 $\lambda=-1$,

$$2x_1+x_2=-x_1 \quad \text{和} \quad 6x_1+x_2=-x_2.$$

所以, 特征向量$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}$是$\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}$的一个任意倍数.

格林公式. 可以把矩阵 A 看成一个线性算子, 如同

$$L=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)+q$$

是一个线性微分算子. A 作用于 n 维向量产生一个 n 维向量, 而 L 作用于函数并产生一个函数. 在分析施图姆–刘维尔特征值问题时, 格林公式是很重要的:

$$\int_a^b[uL(v)-vL(u)]\mathrm{d}x=p\left(u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}-v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_a^b,$$

其中 u 和 v 是任意函数. 经常地, 边界项为零. 对向量而言, 点积类似于积分, $a\cdot b=\sum_i a_ib_i$, 其中 a_i 和 b_i 分别为 a 和 b 的第 i 个分量(见 2.3 节附录). 由格林公式的直接类推, 就要研究任意向量 u 和 v 的 $u\cdot Av$ 和 $v\cdot Au$. 而这里分析 $u\cdot Av$ 和 $v\cdot Bu$, 其中 B 是任意一个 $n\times n$ 矩阵:

$$u\cdot Av=\sum_i\left(u_i\sum_j a_{ij}v_j\right)=\sum_i\sum_j a_{ij}u_iv_j$$

185

$$v\cdot Bu=\sum_i\left(v_i\sum_j b_{ij}u_j\right)=\sum_i\sum_j b_{ij}u_jv_i=\sum_i\sum_j b_{ji}u_iv_j,$$

其中, 通过交换 i 和 j 就导出 $v\cdot Bu$ 的表达式. 所以,

$$u\cdot Av-v\cdot Bu=\sum_i\sum_j(a_{ij}-b_{ji})u_iv_j.$$

如果令 B 等于 A 的转置(即 $b_{ji}=a_{ij}$), 其符号是 $B=A^t$, 则有下列定理:

$$\boxed{u\cdot Av-v\cdot A^tu=0,} \tag{5.5.29}$$

与格林公式相类似.

自伴性. 在(5.5.29)中, A 与其转置 A^t 的不同产生了难以克服的困难. 所以, 主要考虑对称矩阵, 即 $A=A^t$. 对对称矩阵

$$\boxed{u\cdot Av-v\cdot Au=0,} \tag{5.5.30}$$

利用这个结果可以证明有关矩阵的特征值和特征向量定理, 这些定理与施图姆–刘维尔特征值问题的定理相同.

对称矩阵对应不同特征值的特征向量是正交的. 要证明这一点, 假设 u 和 v 分别为对应 λ_1 和 λ_2 的特征向量:

$$Au=\lambda_1u \quad \text{和} \quad Av=\lambda_2v.$$

直接应用(5.5.30)就有

$$(\lambda_2-\lambda_1)u\cdot v=0.$$

所以, 如果 $\lambda_1\neq\lambda_2$(不同的特征值), 则对应的特征向量在下面的意义下是正交的:

$$u \cdot v = 0. \tag{5.5.31}$$

把对称实矩阵的特征值是实的证明留作习题.

例. 对称实矩阵$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$的特征值由$(6-\lambda)(3-\lambda)-4=\lambda^2-9\lambda+14=(\lambda-7)(\lambda-2)=0$确定. 对$\lambda=2$，特征向量满足

$$6x_1+2x_2=2x_1 \quad 和 \quad 2x_1+3x_2=2x_2,$$

186

所以，$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. 对$\lambda=7$，得到

$$6x_1+2x_2=7x_1 \quad 和 \quad 2x_1+3x_2=7x_2,$$

特征向量是$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. 像刚才所证明的那样对任意实对称矩阵，特征向量是正交的，$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}=2-2=0.$

特征向量展开式. 可以证明，如果实对称矩阵的一个特征值重复R次，则有R个无关的特征向量对应这个特征值. 这些特征向量自动地与对应不同特征值的特征向量正交. 应用格拉姆–施密特过程(见6.5节附录)能够构造出对应同一特征值的R个相互正交的特征向量. 这样，对实对称$n\times n$矩阵，总能够得到n个正交的特征向量. 因为这些向量是正交的，它们生成n维向量空间，可以选择其为基向量. 任意向量v可以表示成一个特征向量的级数：

$$v=\sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i, \tag{5.5.32}$$

其中ϕ_i是第i个特征向量. 对正则施图姆–刘维尔特征值问题，特征向量是完全的，意味着任意(分段光滑)函数可以用特征函数的展开式表示：

$$f(x)\sim\sum_{i=1}^{\infty} c_i\phi_i(x). \tag{5.5.33}$$

这与(5.5.32)类似. 在(5.5.33)中，傅里叶系数c_i可以由特征函数的正交性确定. 同样地，(5.5.32)中的c_i由特征向量的正交性确定. 将方程(5.5.32)与ϕ_m做点积：

$$v\cdot\phi_m=\sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i\cdot\phi_m=c_m\phi_m\cdot\phi_m,$$

因为$\phi_i\cdot\phi_m=0$，$i\neq m$，就确定了c_m.

线性方程组. 施图姆–刘维尔特征值问题产生于偏微分方程的分离变量. 矩阵特征值问题出现的一种方式是“分离”一个常系数齐次线性常微分方程组. 很简单地说，一阶齐次线性微分方程组可表示为

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=Av,} \tag{5.5.34}$$

187

其中A是一个$n\times n$矩阵，v是所求的n维向量解. v通常满足给定的初值条件$v(0)=v_0$. 寻找简单指数形式的特解：

$$\boxed{v(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}\phi,} \tag{5.5.35}$$

其中 ϕ 是一个常向量. 这与用分离向量法寻找乘积解类似. 因为 $dv/dt = \lambda e^{\lambda t}\phi$，就推出

$$A\phi = \lambda\phi. \tag{5.5.36}$$

所以，如果 λ 是 A 的一个特征值，就存在形式为(5.3.35)的(5.5.34)的解，ϕ 是对应的特征向量. 现在考虑实对称矩阵 A. 总会存在 n 个相互正交的特征向量 ϕ_i. 这就得到了线性齐次方程组(5.5.34)的 n 个特解. 叠加原理成立，所以，这些解的线性组合也满足(5.5.34)：

$$\boxed{v = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}\phi_i.} \tag{5.5.37}$$

要确定 c_i，使得(5.5.37)满足初值条件 $v(0) = v_0$：

$$v_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i.$$

如前所述，由特征向量的正交性得到

$$c_i = \frac{v_0 \cdot \phi_i}{\phi_i \cdot \phi_i}.$$

5.5 节附录习题

5.5A.1 证明实对称矩阵的特征值是实的.

5.5A.2 (a)证明矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

只有一个无关特征向量.

(b)证明矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

188

有两个无关的特征向量.

5.5A.3 考虑下列矩阵的特征向量

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a)证明这些特征向量不是正交的.

(b)如果两个向量的“点积”定义为

$$a \cdot b = \frac{1}{4}a_1b_1 + a_2b_2,$$

证明特征向量关于这个点积是正交的.

5.5A.4 用矩阵方法，求解 $dv/dt = Av$，其中

*(a) $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $v(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

5.5A.5 证明下列矩阵的特征值是实的，特征向量是正交的：

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ *(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}$(见习题 5.5A.6)

5.5A.6 元素为复数的矩阵 A，其转置的复共轭表示为 A^H. 对于满足 $A^H = A$ 的矩阵(称为埃尔米特矩阵)：

(a)证明其特征值是实的.

(b)证明对应不同特征值的特征向量是正交的(在 $\phi_i \cdot \bar{\phi}_m = 0$ 的意义下，其中 $\bar{\ }$ 表示复共轭).

5.6 瑞利商

瑞利商可以由施图姆-刘维尔微分方程按下列方式推导出：先用 ϕ 乘以方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)\phi+\lambda\sigma(x)\phi=0, \tag{5.6.1}$$

然后积分：

189

$$\int_a^b\left[\phi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)+q\phi^2\right]\mathrm{d}x+\lambda\int_a^b\phi^2\sigma\mathrm{d}x=0.$$

因为$\int_a^b\phi^2\sigma\mathrm{d}x>0$,可以解出 λ:

$$\lambda=\frac{-\int_a^b\left[\phi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)+q\phi^2\right]\mathrm{d}x}{\int_a^b\phi^2\sigma\mathrm{d}x}. \tag{5.6.2}$$

分部积分$\left[\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u\right.$，其中，$u=\phi$，$\mathrm{d}v=\mathrm{d}/\mathrm{d}x(p\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x)\mathrm{d}x$，所以，$\mathrm{d}u=\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x\mathrm{d}x$，$v=$ $\left.p\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x\right]$给出一个含有函数 ϕ 在边界计值的表达式：

$$\boxed{\lambda=\frac{-p\phi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\Big|_a^b+\int_a^b\left[p\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)^2-q\phi^2\right]\mathrm{d}x}{\int_a^b\phi^2\sigma\mathrm{d}x},} \tag{5.6.3}$$

称为瑞利商. 在 5.3 节和 5.4 节中，已经给出了这个结果的一些应用. 在 5.7 节将给出进一步的讨论.

非负特征值. 在物理问题中，λ 的符号经常是相当重要的. 如在 5.2.1 节中看到的，在热流问题中的 $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t+\lambda h=0$. 这样，正的 λ 对应随时间指数衰减，而负的 λ 对应指数增长. 另一方面，在某些振动问题中(见 5.7 节)，$\mathrm{d}^2h/\mathrm{d}t^2=-\lambda h$. 此时，只有正的 λ 才对应"通常"所期望的振动. 所以，在这两类问题中，经常希望 $\lambda\geqslant0$:

瑞利商(5.6.3)直接证明 $\lambda\geqslant0$，如果
(a) $-p\phi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\Big\|_a^b\geqslant0$,
(b) $q\leqslant0$.

(5.6.4)

要说明对非负的 λ，(a)和(b)都是物理上合理的条件. 考虑边界限制 $-p\phi\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x\,|_a^b\geqslant0$. 最简单类型的齐次边界条件 $\phi=0$ 和 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x=0$，对这个边界项没有贡献，因此满足(a). 条件 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x=h\phi$(牛顿冷却定律的物理情形或弹性边界条件)在左端 $x=a$ 处，有 $h>0$. 所以，它在 $x=a$ 处是正值. 由于这类边界条件在右端改变符号，也是正值. 周期边界条件[例如，$\phi(a)=\phi(b)$和$p(a)\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x(a)=p(b)\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x(b)$]，以及奇异条件[若 $p(a)=0$，$\phi(a)$有界]也都没有贡献. 因此，在所有这些情形，$-p\phi\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x\,|_a^b\geqslant0$.

热源限制 $q\leqslant0$ 在物理问题中也有意义. 对热流问题，$q\leqslant0$ 对应($q=\alpha$，$Q=\alpha u$)热能吸收

190 (吸热)反应，而对振动问题，$q\leqslant 0$ 对应($q=\alpha$，$Q=\alpha u$)恢复力.

最小化原理. 瑞利商不能用于直截了当地确定特征值(因为 ϕ 是未知的). 尽管如此，在估计特征值时，它还是相当有用的. 这是由于下列定理：*瑞利商对所有满足边界条件(不必满足微分方程)的连续函数的最小值是最小特征值*：

$$\boxed{\lambda_1=\min\frac{-pu\mathrm{d}u/\mathrm{d}x\,\big|_a^b+\int_a^b[p(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)^2-qu^2]\mathrm{d}x}{\int_a^b u^2\sigma\mathrm{d}x}},\tag{5.6.5}$$

其中 λ_1 表示最小的特征值. 最小化是对所有满足边界条件的连续函数进行的. 最小值仅在最小特征函数 $u=\phi_1(x)$ 处获得. 例如，在热流问题(见5.4节)中，最小特征值是相当重要的.

测试函数. 在证明(5.6.5)之前，先说明如何应用(5.6.5)得到最小特征值的界. 直接应用(5.6.5)式是困难的，因为不知道如何对所有函数做最小化. 不过，设 u_T 为满足边界条件的任意连续函数；u_T 称为*测试函数*. 计算这个测试函数的瑞利商 $RQ[u_T]$：

$$\lambda_1\leqslant RQ[u_T]=\frac{-pu_T\mathrm{d}u_T/\mathrm{d}x\,\big|_a^b+\int_a^b[p(\mathrm{d}u_T/\mathrm{d}x)^2-qu_T^2]\mathrm{d}x}{\int_a^b u_T^2\sigma\mathrm{d}x}.\tag{5.6.6}$$

注意，λ_1 一定小于或等于这个商，因为 λ_1 是所有函数的最小比值. (5.6.6)式给出了最小特征值的一个上界.

例. 考虑众所周知的特征值问题.

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}+\lambda\phi=0$$

$$\phi(0)=0$$

$$\phi(1)=0.$$

已经知道 $\lambda=n^2\pi^2\ (L=1)$，所以，最小特征值是 $\lambda_1=\pi^2$. 对这个问题，瑞利商简化了，(5.6.6)变为

$$\lambda_1\leqslant\frac{\int_0^1(\mathrm{d}u_T/\mathrm{d}x)^2\mathrm{d}x}{\int_0^1 u_T^2\mathrm{d}x}.\tag{5.6.7}$$

191 测试函数一定要是连续的，并满足齐次边界条件，现在是，$u_T(0)=0$ 和 $u_T(1)=0$. 另外，测试函数越接近真实的特征函数，最小特征值的界就越精确. 因为从理论上知道，最小的特征函数不含有零点，所以也就选择内部没有零点的测试函数. 对图5.6.1中的三种测试函数，计算瑞利商. 对

$$u_T=\begin{cases}x, & x<\dfrac{1}{2}\\[2mm] 1-x, & x>\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

(5.6.7)式为

$$\lambda_1 \leqslant \frac{\int_0^{1/2} dx + \int_{1/2}^1 dx}{\int_0^{1/2} x^2 dx + \int_{1/2}^1 (1-x)^2 dx} = \frac{1}{\frac{1}{24}+\frac{1}{24}} = 12,$$

它是精确解 $\pi^2(\pi^2 \approx 9.8696\cdots)$ 的一个合理上界. 对 $u_T = x - x^2$, (5.6.7)式为

$$\lambda_1 \leqslant \frac{\int_0^1 (1-2x)^2 dx}{\int_0^1 (x-x^2)^2 dx} = \frac{\int_0^1 (1-4x+4x^2) dx}{\int_0^1 (x^2-2x^3+x^4) dx} = \frac{1-2+\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}} = 10,$$

这是一个更准确的界. 因为 $u_T = \sin\pi x$ 是真实的最小特征函数, 这个测试函数的瑞利商恰好就等于最小的特征值. 在后面的章节中将说明瑞利商的其他应用.

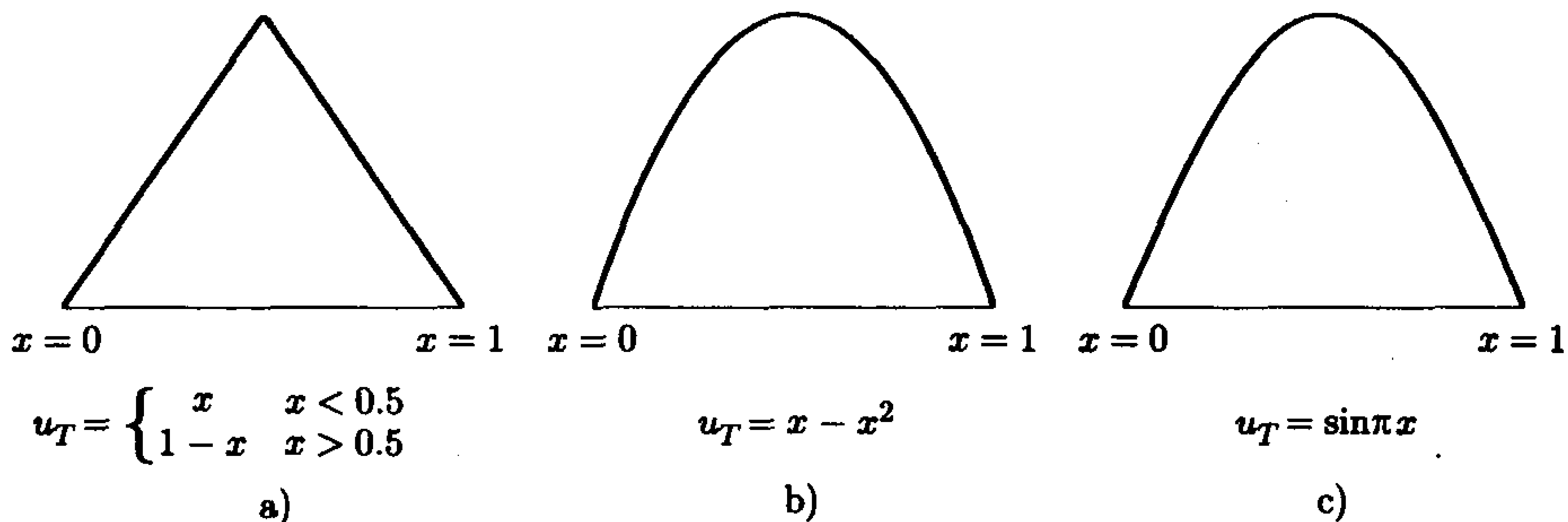


图 5.6.1 测试函数: 连续的, 满足边界条件, 并具有一个符号

证明. 通常是利用应用数学中更高深的分支——变分法——来证明瑞利商的最小化性质. 此处没有适当地篇幅展开这些内容. 代替变分法, 这里的证明是基于特征函数的展开. 对任意满足齐次边界条件的连续函数 u, 再次计算瑞利商(5.6.3). 在这个推导中, 瑞利商的等价形式(5.6.2)更为有用: 192

$$RQ[u] = \frac{-\int_a^b uL(u) dx}{\int_a^b u^2 \sigma dx}, \tag{5.6.8}$$

其中的算子记号相当有帮助. 用(通常是未知的)特征函数 $\phi_n(x)$ 展开相当任意的函数 u:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x). \tag{5.6.9}$$

L 是一个线性微分算子. 期望

$$L(u) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n L(\phi_n(x)), \tag{5.6.10}$$

因为这对有限级数是成立的. 在第 7 章将证明, 如果 u 连续且满足与特征函数 $\phi_n(x)$ 有相同的齐次边界条件, 则(5.6.10)成立. 其中 $\phi_n(x)$ 是特征函数, $L(\phi_n) = -\lambda_n \sigma \phi_n$. 因此, (5.6.10)变为

$$L(u) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n \sigma \phi_n, \tag{5.6.11}$$

这可以看成是 $L(u)$ 的特征函数展开. 将(5.6.11)和(5.6.9)代入(5.6.8), 在两个无穷级数的

乘积中用不同的求和指标，就得到

$$RQ[u]=\frac{\int_a^b\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_m a_n\lambda_n\phi_n\phi_m\sigma\right)\mathrm{d}x}{\int_a^b\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_m a_n\phi_n\phi_m\sigma\right)\mathrm{d}x}.\tag{5.6.12}$$

求和前，在(5.6.12)内作积分运算. 注意特征函数是正交的$\left(\text{若 } n\neq m,\int_a^b\phi_n\phi_m\sigma\mathrm{d}x=0\right)$，(5.6.12)变为

$$RQ[u]=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\lambda_n\int_a^b\phi_n^2\sigma\mathrm{d}x}{\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\int_a^b\phi_n^2\sigma\mathrm{d}x}.\tag{5.6.13}$$

这是用 u 的广义傅里叶系数 a_n，瑞利商的精确表达式. 用 λ_1 表示最小特征值(对 $n>1$，$\lambda_1<\lambda_n$). 所以，

$$RQ[u]\geqslant\frac{\lambda_1\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\int_a^b\phi_n^2\sigma\mathrm{d}x}{\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\int_a^b\phi_n^2\sigma\mathrm{d}x}=\lambda_1.\tag{5.6.14}$$

进而，只有当对 $n>1$，$a_n=0$(即只有当 $u=a_1\phi_1$)时，(5.6.14)中的等号才成立. 已经证明了瑞利商的最小值是最小特征值 λ_1. 此外，只有当 $u=a_1\phi_1$(即当 u 是最小特征函数)时，瑞利商才被最小化.

[193]

因此，对最小特征值 λ_1 有了最小化定理. 可能会问，是否有更大特征值的相应定理. 有趣的推广直接就由(5.6.13)得到. 如果让 $a_1=0$，则

$$RQ[u]=\frac{\sum_{n=2}^{\infty}a_n^2\lambda_n\int_a^b\phi_n^2\sigma\mathrm{d}x}{\sum_{n=2}^{\infty}a_n^2\int_a^b\phi_n^2\sigma\mathrm{d}x}.\tag{5.6.15}$$

这意味着，如果再限制函数 u 与 ϕ_1 正交，因为 $a_1=\int_a^b u\phi_1\sigma\mathrm{d}x\Big/\int_a^b\phi_1^2\sigma\mathrm{d}x$. 用同样的方法继续做下去. 因为对 $n>2$，$\lambda_2<\lambda_n$，就得到

$$RQ[u]\geqslant\lambda_2,$$

而且只有当对 $n>2$，$a_n=0[\text{即 } u=a_2\phi_2(x)]$时，等号才成立，因为已有 $a_1=0$. 这就证明了下列定理：对所有与最小特征函数正交的且满足边界条件的连续函数 $u(x)$ 所得的最小值是次小特征值. 进一步的推广也可由(5.6.13)直接得到.

习题 5.6

5.6.1 利用瑞利商，求得最小特征值的一个(适度准确的)上界.

(a) $\dfrac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}+(\lambda-x^2)\phi=0$ 满足 $\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(0)=0$ 和 $\phi(1)=0$.

(b) $\frac{d^2\phi}{dx^2}+(\lambda-x)\phi=0$ 满足 $\frac{d\phi}{dx}(0)=0$ 和 $\frac{d\phi}{dx}(1)+2\phi(1)=0.$

* (c) $\frac{d^2\phi}{dx^2}+\lambda\phi=0$ 满足 $\phi(0)=0$ 和 $\frac{d\phi}{dx}(1)+\phi(1)=0.$ （见习题5.8.10.）

5.6.2 考虑特征值问题

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}+(\lambda-x^2)\phi=0,$$

满足 $\frac{d\phi}{dx}(0)=0$ 和 $\frac{d\phi}{dx}(1)=0$. 证明 $\lambda>0$(一定要证明 $\lambda\neq 0$).

5.6.3 证明(5.6.10)按如下意义成立. 假设 $L(u)/\sigma$ 是分段光滑的且满足

$$\frac{L(u)}{\sigma}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\phi_n(x).$$

确定 b_n. [提示：利用格林公式(5.5.5)证明：如果 u 和 du/dx 是连续的，并且 u 满足与特征函数 $\phi_n(x)$ 相同的齐次边界条件，则 $b_n=-a_n\lambda_n$.]

194

5.7 例子：非均匀弦的振动

瑞利商其他的一些应用可以在一个物理问题中得到最好的说明. 考虑无外力($Q=0$)非均匀弦[不变的张力 T_0，但可变的质量密度 $\rho(x)$]的振动：参见4.2节. 假定两端固定无位移. 初值问题的数学方程是

$$\text{PDE:}\quad \boxed{\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=T_0\frac{\partial^2u}{\partial x^2}} \tag{5.7.1}$$

$$\text{BC:}\quad \boxed{\begin{aligned}u(0,t)&=0\\ u(L,t)&=0\end{aligned}} \tag{5.7.2}$$

$$\text{IC:}\quad \boxed{\begin{aligned}u(x,0)&=f(x).\\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)&=g(x).\end{aligned}} \tag{5.7.3}$$

同样还是由于偏微分方程和边界条件是线性齐次的，可以应用分离变量法. 寻找乘积解：

$$u(x,t)=\phi(x)h(t), \tag{5.7.4}$$

不计非零初值条件. 可以证明，$h(t)$满足

$$\frac{d^2h}{dt^2}=-\lambda h, \tag{5.7.5}$$

而空间部分满足下列正则施图姆-刘维尔特征值问题：

$$T_0\frac{d^2\phi}{dx^2}+\lambda\rho(x)\phi=0$$

$$\phi(0)=0$$

$$\phi(L)=0. \tag{5.7.6}$$

通常假定无穷特征值序列 λ_n 及对应的特征函数序列 ϕ_n 是已知的. 然而，为了分析(5.7.5)，知道 λ 的一些性质是必要的. 由物理上的推想，出于对振动的预计，当然期望 $\lambda>0$，而瑞利商就简单地保证了 $\lambda>0$. 对于(5.7.6)，瑞利商(5.6.3)为

195

$$\lambda = \frac{T_0\int_0^L (\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x)^2\mathrm{d}x}{\int_0^L \phi^2\rho(x)\,\mathrm{d}x}. \tag{5.7.7}$$

显然 $\lambda \geqslant 0$(并且如前所述，此时不可能有 $\lambda = 0$). 所以，$\lambda > 0$.

现在就确定了(5.7.5)的解是 $\sin\sqrt{\lambda}t$ 和 $\cos\sqrt{\lambda}t$ 的线性组合. 这样偏微分方程有两组乘积解 $\sin\sqrt{\lambda_n}t\phi_n(x)$ 和 $\cos\sqrt{\lambda_n}t\phi_n(x)$. 根据叠加原理，该问题的解是

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\sqrt{\lambda_n}t\phi_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\sqrt{\lambda_n}t\phi_n(x).} \tag{5.7.8}$$

只需要证明其两组系数可以由初值条件获得:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\phi_n(x) \quad 和 \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sqrt{\lambda_n}\phi_n(x). \tag{5.7.9}$$

所以，b_n 是初始位置 $f(x)$ 的广义傅里叶系数，而 $a_n\sqrt{\lambda_n}$ 是初始速度 $g(x)$ 的广义傅里叶系数. 因此，由特征函数的正交性[关于权函数 $\rho(x)$]，可以很容易地确定 a_n 和 b_n:

$$\boxed{b_n = \frac{\int_0^L f(x)\phi_n(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^L \phi_n^2\rho\,\mathrm{d}x},} \tag{5.7.10}$$

$$\boxed{a_n\sqrt{\lambda_n} = \frac{\int_0^L g(x)\phi_n(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^L \phi_n^2\rho\,\mathrm{d}x}.} \tag{5.7.11}$$

瑞利商可以用来得到有关最小特征值 λ_1 的其他信息. (注意，振动的最小频率是 $\sqrt{\lambda_1}$.)已经知道

196

$$\lambda_1 = \min \frac{T_0\int_0^L (\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)^2\mathrm{d}x}{\int_0^L u^2\rho(x)\,\mathrm{d}x}. \tag{5.7.12}$$

已经证明(参见5.6节)了如何用测试函数得到最小特征值的上界. 由于(5.7.12)的分母依赖于质量密度 $\rho(x)$，这样做并不总是方便的. 因此，要给出获得上界的另一种方法，而且还可以得到一个下界.

像往常一样，设质量密度有上界和下界，

$$0 < \rho_{\min} \leqslant \rho(x) \leqslant \rho_{\max}.$$

对任意 $u(x)$ 就有

$$\rho_{\min}\int_0^L u^2\mathrm{d}x \leqslant \int_0^L u^2\rho(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \rho_{\max}\int_0^L u^2\mathrm{d}x.$$

因此，由(5.7.12)可得

$$\frac{T_0}{\rho_{\max}}\min\frac{\int_0^L (\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)^2\mathrm{d}x}{\int_0^L u^2\mathrm{d}x} \leqslant \lambda_1 \leqslant \frac{T_0}{\rho_{\min}}\min\frac{\int_0^L (\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)^2\mathrm{d}x}{\int_0^L u^2\mathrm{d}x}. \tag{5.7.13}$$

可以算出(5.7.13)中的各项，这是由于认出了满足 $u(0)=0$ 和 $u(L)=0$ 的 $\int_0^L (du/dx)^2 dx \big/ \int_0^L u^2 dx$ 的最小值是另外一个问题的最小特征值：即常系数的问题，

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}+\bar{\lambda}\phi=0$$

$$\phi(0)=0 \quad 和 \quad \phi(L)=0.$$

已经知道 $\bar{\lambda}=(n\pi/L)^2$，所以，这个问题的最小特征值是 $\bar{\lambda}_1=(\pi/L)^2$. 而瑞利商的最小化性质蕴涵着

$$\bar{\lambda}_1=\min\frac{\int_0^L (du/dx)^2 dx}{\int_0^L u^2 dx}.$$

最终证明了这个变系数问题的最小特征值满足下列不等式：

$$\frac{T_0}{\rho_{\max}}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\leqslant\lambda_1\leqslant\frac{T_0}{\rho_{\min}}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2.$$

得到了最小特征值的上界和下界. 开平方根得到

$$\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T_0}{\rho_{\max}}}\leqslant\sqrt{\lambda_1}\leqslant\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T_0}{\rho_{\min}}}.$$

其物理意义是明显的：变密度弦的最小振动频率介于两根常密度弦的最小振动频率之间，这两根弦，一根弦具有最小密度，另一根弦具有最大密度. 有关较高振动频率的类似结果也是成立的，但证明起来比较困难(参见 Weinberger[1965]或 Courant and Hilbert[1953]). [197]

习题 5.7

*5.7.1 确定非均匀弦最小振动频率的上界和(非零)下界，这根弦在 $x=0$ 和 $x=1$ 处是固定的，且满足 $c^2=1+4\alpha^2(x-1/2)^2$.

5.7.2 考虑具有非常数导热系数一维杆中的无源热流. 假定温度在 $x=0$ 和 $x=L$ 处为零. 假设 $c\rho_{\min}\leqslant c\rho\leqslant c\rho_{\max}$ 及 $K_{\min}\leqslant K_0(x)\leqslant K_{\max}$. 求乘积解衰减的最慢指数速率的上界和(非零)下界.

5.8 第三类边界条件

引言. 迄今为止，已经分析了两类边值问题：特别容易求解的边值问题(产生傅里叶正弦级数，傅里叶余弦级数或傅里叶级数的那些问题)和有些抽象但有定理保证了许多所需性质的施图姆-刘维尔特征值问题. 在一种情形中，微分方程有常数系数(具有简单的边界条件)，而另一种情形中，讨论了变系数的微分方程.

这一节要分析满足第三类边界条件的边值问题. 边值问题也很容易求解(仍是常系数微分方程). 然而，由于其边界条件，它对说明施图姆-刘维尔特征值问题的一般思想更具有说服力.

物理例子. 考虑一些带有常物理参数的简单问题. 均匀杆内的热流满足

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\tag{5.8.1}$$

而振动的均匀弦满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{5.8.2}$$

在这两种情形中，假设左端是固定的，而右端满足第三类齐次边界条件：

$$u(0,t)=0 \tag{5.8.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=-hu(L,t). \tag{5.8.4}$$

回想一下，对热传导，如果 $h>0$，(5.8.4)对应牛顿冷却定律；对振动弦问题，如果 $h>0$，198 (5.8.4)对应一个恢复力，称为弹性边界条件．注意，通常在物理问题中，$h\geqslant 0$．然而，由于数学原因，两种情形 $h<0$ 和 $h\geqslant 0$ 都要研究．如果 $h<0$，振动弦在右端有个不稳定力，而对热流问题，热能通过右端不断地流入杆中．

施图姆–刘维尔特征值问题．分离变量之后，

$$u(x,t)=G(t)\phi(x), \tag{5.8.5}$$

时间部分满足下列常微分方程：

$$\text{热流:}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}=-\lambda kG \tag{5.8.6}$$

$$\text{振动弦:}\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}t^2}=-\lambda c^2 G. \tag{5.8.7}$$

这里想把注意力放在第三类边界条件(5.8.4)的作用上．对这两个物理问题，空间部分 $\phi(x)$ 都满足下列正则施图姆–刘维尔特征值问题：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}+\lambda\phi=0} \tag{5.8.8}$$

$$\boxed{\phi(0)=0} \tag{5.8.9}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(L)+h\phi(L)=0,} \tag{5.8.10}$$

其中 h 是所给的固定常数．如果 $h\geqslant 0$，称为"物理"情形，而如果 $h<0$，称为"非物理"情形．虽然微分方程(5.8.8)有常系数，但是边界条件将给出一些新想法．暂时先忽略施图姆–刘维尔特征值问题理论的一些内容(除了特征值是实的)．求解(5.8.8)式时，必须考虑三种不同情形：$\lambda>0$，$\lambda<0$ 和 $\lambda=0$．这在分析非物理情形 $h<0$ 时，将是特别重要的．

正特征值．如果 $\lambda>0$，微分方程的解是正弦和余弦的线性组合：

$$\phi(x)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x. \tag{5.8.11}$$

边界条件 $\phi(0)=0$ 给出 $0=c_1$，所以

199

$$\boxed{\phi(x)=c_2\sin\sqrt{\lambda}x.} \tag{5.8.12}$$

显然正弦函数满足在 $x=0$ 处的零条件．要用到一阶导数，

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}=c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x.$$

所以，第三类边界条件(5.8.10)给出

$$c_2(\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}L + h\sin\sqrt{\lambda}L) = 0. \tag{5.8.13}$$

如果 $c_2=0$，(5.8.12)显示 $\phi\equiv0$，不是特征函数. 所以，对满足下式的 $\lambda>0$，特征值存在：

$$\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}L + h\sin\sqrt{\lambda}L = 0. \tag{5.8.14}$$

较初等的情形 $h=0$ 将在后面分析. 方程(5.8.14)是正特征值 λ 满足的超越方程(若 $h\neq0$). 为求解(5.8.14)，用 $\cos\sqrt{\lambda}L$ 去除，很方便就得到 $\tan\sqrt{\lambda}L$ 的一个表达式：

$$\boxed{\tan\sqrt{\lambda}L = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h}.} \tag{5.8.15}$$

用 $\cos\sqrt{\lambda}L$ 去除是因为它不为零[若 $\cos\sqrt{\lambda}L=0$，那么 $\sin\sqrt{\lambda}L\neq0$，则(5.8.14)不成立]. 还可以用 $\sin\sqrt{\lambda}L$ 除(5.8.14)而得到余切的一个表达式，但读者可能对正切函数更习惯些.

图示方法($\lambda>0$). 方程(5.8.15)是个超越方程. 它不能精确求解. 然而，这里描述一种能获得有关特征值信息的图示方法. 为了图示超越方程的解，引入人工坐标 z. 设

$$z = \tan\sqrt{\lambda}L \tag{5.8.16}$$

以及

$$z = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h}. \tag{5.8.17}$$

联立方程组(5.8.16)和(5.8.17)的解(即它们的交点)对应(5.8.15)的解. (5.8.16)是$\sqrt{\lambda}L$ 的正切函数，其中$\sqrt{\lambda}L>0$，由 $\lambda>0$. 在图(5.8.1)中给出了(5.8.16)的草图. 注意，正切函数是周期为 π 的周期函数；当$\sqrt{\lambda}L=0$，π，2π 等等时，它是零；而当$\sqrt{\lambda}L$ 趋于 $\pi/2$，$3\pi/2$，$5\pi/2$ 等等时，它趋于 $\pm\infty$. 再把正切函数与(5.8.17)相交. 因为所作的曲线是$\sqrt{\lambda}L$ 的函数，也必须要把(5.8.17)表示为$\sqrt{\lambda}L$ 的函数. 只要把(5.8.17)的分子和分母都乘以 L 就行了：

200

$$z = -\frac{\sqrt{\lambda}L}{hL}. \tag{5.8.18}$$

作为$\sqrt{\lambda}L$ 的函数，(5.8.18)是斜率为 $-1/hL$ 的直线. 然而，这条直线在 $h>0$(物理情形)和 $h<0$(非物理情形)时的样子是相当不同的.

正特征值(物理情形，$h>0$). 在图 5.8.1 中，画出了物理情形($h>0$)时两条曲线的交点. 有无穷多个交点；每个交点对应一个正特征值. (由于已经假定所有的 $\lambda>0$，就排除了$\sqrt{\lambda}L=0$.)特征函数是$\phi=\sin\sqrt{\lambda}x$，其中容许的特征值由图示解法确定.

虽然不能准确地确定这些特征值，不过由图(5.8.1)可知

$$\frac{\pi}{2} < \sqrt{\lambda_1}L < \pi, \tag{5.8.19}$$

$$\frac{3\pi}{2} < \sqrt{\lambda_2}L < 2\pi, \tag{5.8.20}$$

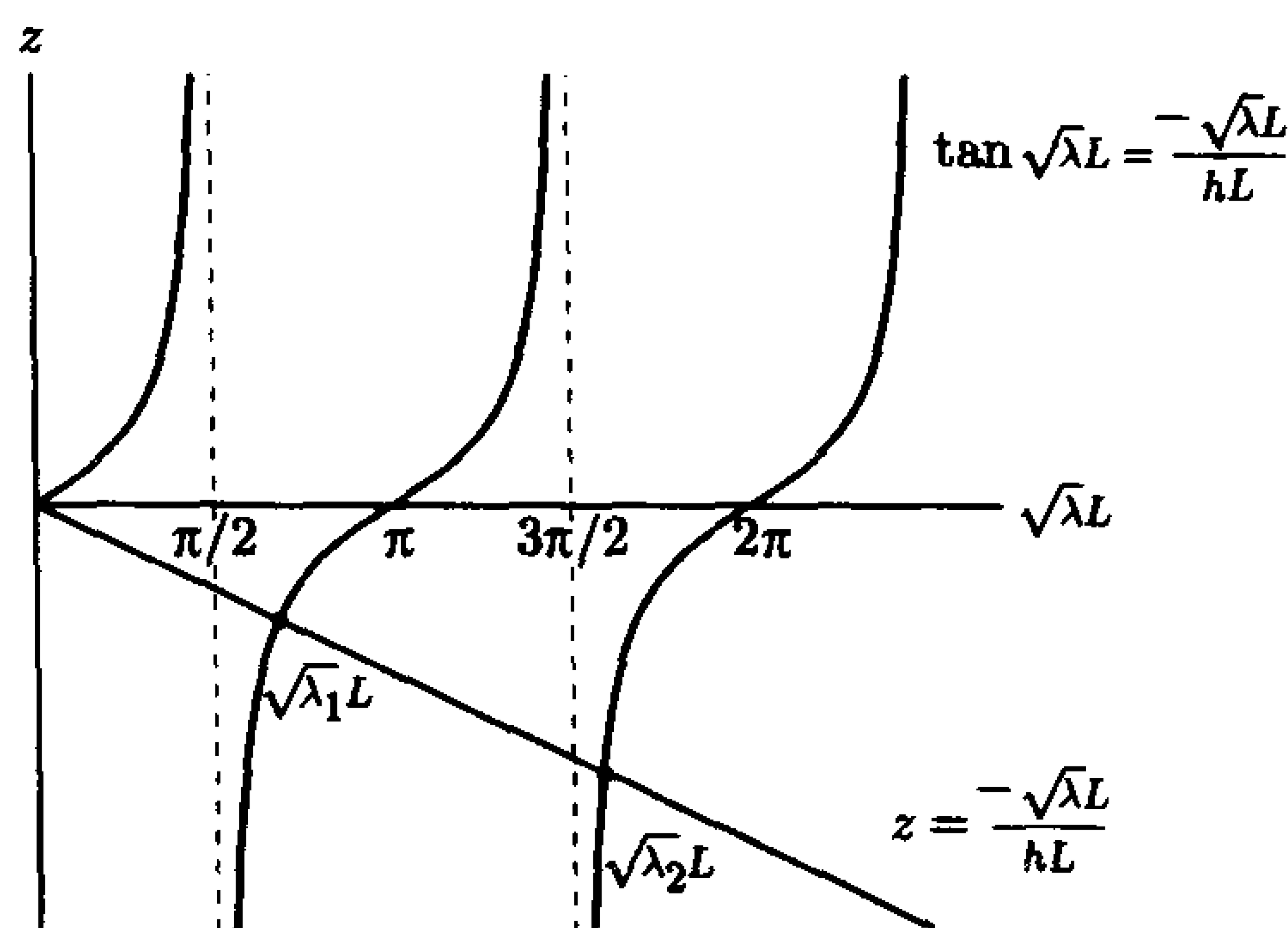


图 5.8.1 图示确定正特征值($h>0$)

等等. 有趣的是，随着 n 增加，交点更接近正切函数竖直部分的位置. 这样就得到下列特征值的近似(渐近)公式，当 $n\to\infty$ 时

$$\sqrt{\lambda_n}L \sim \left(n-\frac{1}{2}\right)\pi, \tag{5.8.21}$$

这个公式当 $n\to\infty$ 时越来越精确. 即使在不能明确求解微分方程的情形，也有类似(5.8.21)的大特征值渐近公式. 这点将在5.9节中讨论.

201

使用诸如(经常在初等微积分课本中讨论的)牛顿法那样的数值法能够获得特征值的准确值. 一个实用的方案是，对前几个特征值用牛顿法求根获得，直到所求的根相当接近渐近公式(5.8.21)(或这个基本渐近公式的改进). 在此之后，对较大的根，渐近公式(5.8.21)就足够准确了.

正特征值(非物理情形，$h<0$). 非物理情形($h<0$)也是有关施图姆–刘维尔特征值问题的许多一般思想的良好实例. 若 $h<0$，正特征值还是由(5.8.15) $\tan\sqrt{\lambda}L=-\sqrt{\lambda}/h$ 的图示确定. 直线(这里有正斜率)一定要与正切函数相交. 只有当斜率大于1(见图5.8.2a)时，它才与正切函数的"第一支"相交. 利用正切函数的性质：其斜率在 $x=0$ 处是1，且斜率沿着第一支增加. 这样，若 $h<0$(非物理情形)，存在两种主要情形($-1/hL>1$ 和 $0<-1/hL<1$)和一种次要情形($-1/hL=1$). 这三种情形的草图见图5.8.2. 三种情形的每一种都有无穷多个交点，对应着无穷多个正特征值. 特征函数仍然是 $\sin\sqrt{\lambda}x$.

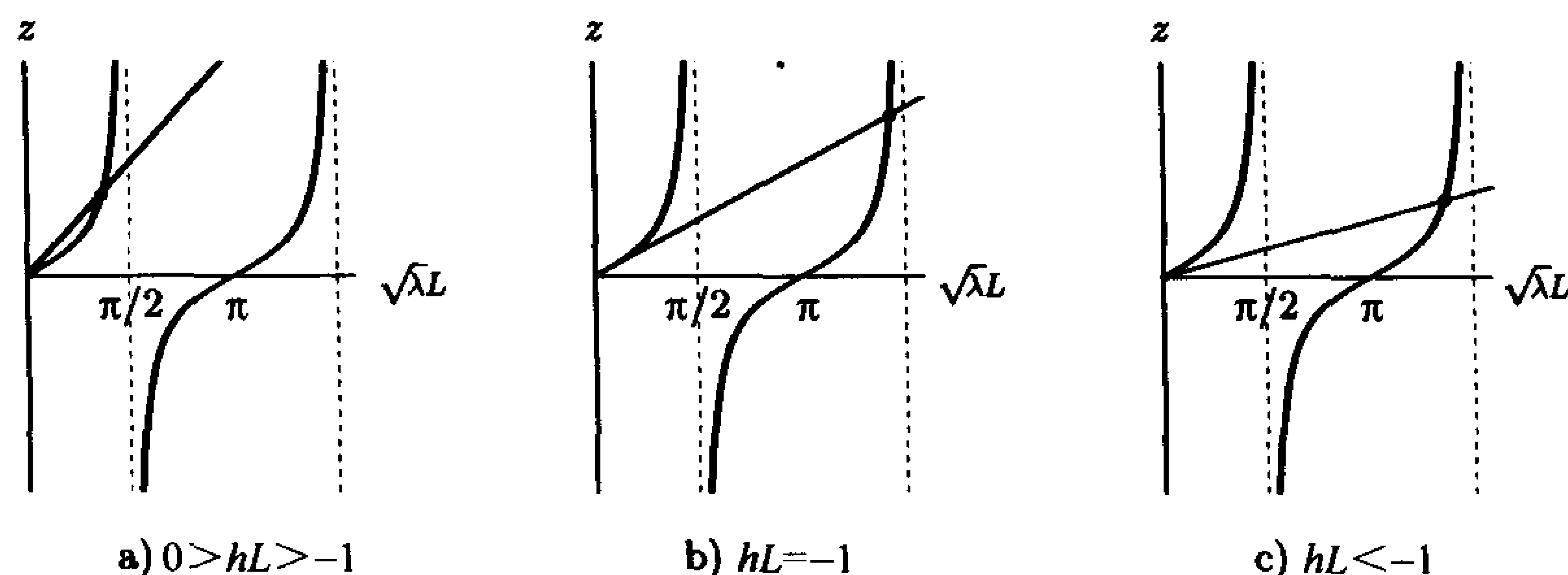


图5.8.2 图示确定正特征值

在这些情形中，图示的解也表明大特征值近似地位于正切函数的奇点处. (5.8.21)仍是渐近公式；n 越大，(5.8.21)越准确.

零特征值. $\lambda=0$ 是(5.8.8)~(5.8.10)的特征值吗？如果 $\lambda=0$，则方程(5.8.11)不是(5.8.8)的通解. 其通解是

$$\phi=c_1+c_2x; \tag{5.8.22}$$

特征函数一定是直线. 边界条件 $\phi(0)=0$ 使得 $c_1=0$，让这条直线通过原点，

202

$$\phi=c_2x. \tag{5.8.23}$$

最后 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x(L)+h\phi(L)=0$ 给出

$$c_2(1+hL)=0. \tag{5.8.24}$$

如果 $hL\neq-1$(包括了所有物理情形，$h>0$)，就得到 $c_2=0$，$\phi=0$，所以，$\lambda=0$ 不是一个特征值. 而如果 $hL=-1$，则由(5.8.24)，c_2 是任意的，$\lambda=0$ 是带有特征函数 x 的特征值.

负特征值. 在物理情形中，不期望能有任何负特征值[见(5.8.6)和(5.8.7)]. 如果 $\lambda<0$，引入 $s=-\lambda$，使得 $s>0$. 则(5.8.8)变为

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}=s\phi. \tag{5.8.25}$$

在 $x=0$ 处的零边界条件暗示用双曲函数表示(5.8.25)的通解比较方便：

$$\phi=c_1\cosh\sqrt{s}x+c_2\sinh\sqrt{s}x. \tag{5.8.26}$$

因为 $\phi(0)=0$ 蕴涵着 $c_1=0$，只需要双曲正弦函数：

$$\phi=c_2\sinh\sqrt{s}x$$

$$\frac{d\phi}{dx}=c_2\sqrt{s}\cosh\sqrt{s}x. \tag{5.8.27}$$

第三类边界条件 $d\phi/dx(L)+h\phi(L)=0$ 给出

$$c_2(\sqrt{s}\cosh\sqrt{s}L+h\sinh\sqrt{s}L)=0. \tag{5.8.28}$$

由此看出对 $\lambda<0$ 的分析正好与 $\lambda>0$ 所出现的情形类似(用双曲函数替换三角函数). 所以，由$c_2\neq0$，

$$\boxed{\tanh\sqrt{s}L=-\frac{\sqrt{s}}{h}=-\frac{\sqrt{s}L}{hL}.} \tag{5.8.29}$$

负特征值的图示解法. 负特征值由超越方程(5.8.29)的图示解法确定. 这里双曲正切函数的性质是相当重要的. 在图5.8.3中画出了双曲正切函数作为$\sqrt{s}L$函数的草图. 注意由双曲正切函数定义得到的一些性质：

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.$$

203

$\sqrt{s}L\to\infty$ 时，$\tanh\sqrt{s}L$ 趋于1. 还要注意的是，双曲正切在$\sqrt{s}L=0$ 处的斜率[⊖]等于1，而当$\sqrt{s}L\to\infty$ 时，斜率递减趋于零. 这个函数一定与(5.8.29)右边所表示的直线相交. 如图5.8.3所示，出现了四种情况. 在物理情形($h>0$)，与$\sqrt{s}L>0$ 无交点，也就是在物理情形($h>0$)没有负特征值，所有特征值都是非负的. 然而，如果 $hL<-1$(且只在这些情形内)，则恰好有一个交点，就有一个负的特征值(若 $hL<-1$). 如果用 $s=s_1$ 表示交点，负特征值就是 $\lambda=-s_1$，其对应的特征函数是$\phi=\sinh\sqrt{s_1}x$. 在非物理情形，存在着有限个负的特征值(若 $hL<-1$ 有一个，否则没有).

特殊情形 $h=0$. 虽然若 $h=0$，不是第三类边界条件，但特征值和特征函数仍然还是有意思的. 如果 $h=0$，所有特征值都是正的[见(5.8.24)和(5.8.28)]，且容易由(5.8.14)确定出来：

$$\lambda=\left[\frac{(n-1/2)\pi}{L}\right]^2,\quad n=1,2,3\cdots,$$

特征函数是 $\sin\sqrt{\lambda}x$.

小结. 已经说明，存在五种依赖边界条件参数 h 值的不同情形. 表5.8.1汇总了这些情形的特征值和特征函数.

⊖ $d/dx\tanh x=\operatorname{sech}^2x=1/\cosh^2x$.

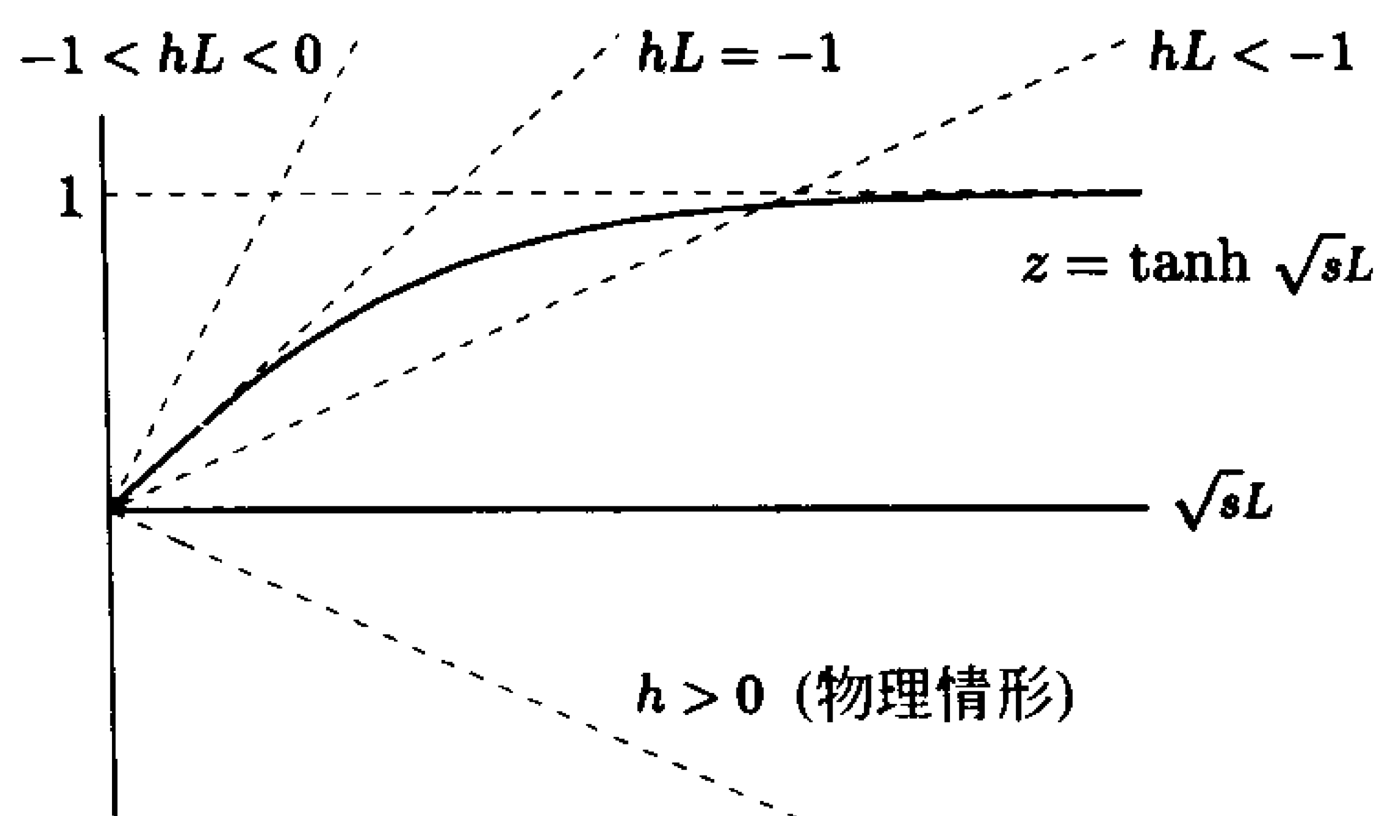


图 5.8.3 确定负特征值的图示解法

表 5.8.1 (5.8.8) ~ (5.8.10)的特征函数

		$\lambda>0$	$\lambda=0$	$\lambda<0$
物理情形	$h>0$	$\sin\sqrt{\lambda}x$		
	$h=0$	$\sin\sqrt{\lambda}x$		
非物理情形	$-1<hL<0$	$\sin\sqrt{\lambda}x$		
	$hL=-1$	$\sin\sqrt{\lambda}x$	x	
	$hL<-1$	$\sin\sqrt{\lambda}x$		$\sinh\sqrt{s_1}x$

而从某种意义上讲，实际上只有三种情形：若 $-1<hL$，所有特征值是正的；若 $hL=-1$，没有负特征值，但零是一个特征值；若 $hL<-1$，不但有无穷多个正特征值，还有一个负特征值.

瑞利商. 由显式求解，证明了特征值问题

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}+\lambda\phi=0 \tag{5.8.30}$$

$$\phi(0)=0 \tag{5.8.31}$$

$$\frac{d\phi}{dx}(L)+h\phi(L)=0, \tag{5.8.32}$$

在物理情形($h\geqslant 0$)，所有特征值都是正的，而在非物理情形($h<0$)，可能有也可能没有负特征值. 下面证明瑞利商与这个结果相一致：

$$\lambda=\frac{-p\phi\dfrac{d\phi}{dx}\Big|_a^b+\displaystyle\int_a^b\left[p\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2-q\phi^2\right]dx}{\displaystyle\int_a^b\phi^2\sigma dx}=\frac{h\phi^2(L)+\displaystyle\int_0^L\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2dx}{\displaystyle\int_0^L\phi^2dx}. \tag{5.8.33}$$

因为由(5.8.30)，$p(x)=1$，$\sigma(x)=1$，$q(x)=0$ 和 $a=0$，$b=L$，其中用边界条件(5.8.31)和(5.8.32)简化了瑞利商中的边界项. 如果 $h\geqslant 0$(物理情形)，则由(5.8.33)容易得到，特征值一定是正的，恰好是显式计算所得到的结论. 然而，如果 $h<0$(非物理情形)，则瑞利商的分子含有负项 $h\phi^2(L)$ 和正项 $\int_0^L(d\phi/dx)^2dx$. 不可能得出关于 λ 符号的任何结论. 这样，如果 $h<0$，则可能有负特征值. 但并不能推出，一定有负特征值. 只有当 $|h\phi^2(L)|>\int_0^L(d\phi/dx)^2dx$ 时，

204~205

负特征值才出现. 由瑞利商不能确定这种情况何时会发生. 只有从显式计算才知道, 仅当 $hL < -1$ 时出现负特征值.

特征函数的零点. 本节讨论过的施图姆-刘维尔特征值问题

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda\phi = 0$$
$$\phi(0) = 0, \tag{5.8.34}$$
$$\frac{d\phi}{dx}(L) + h\phi(L) = 0$$

是一个说明特征函数零点一般定理的好例子. 定理指出, 对应最小特征值的特征函数内部没有零点. 更一般地, 第 n 个特征函数有 $n-1$ 个零点.

(5.8.34)中有五种情形值得讨论: $h>0$, $h=0$, $-1<hL<0$, $hL=-1$, $hL<-1$. 然而, 在这所有情形中用于研究特征函数零点的推理方式都是相当类似的. 因此, 这里只分析一种情形($hL<-1$), 而把其他情形留作习题. 在这一情形中($hL<-1$), 存在一个负特征值(对应的特征函数 $\sinh\sqrt{s_1}x$)和无穷多个正的特征值(对应的特征函数 $\sin\sqrt{\lambda}x$). 由于需要仔细分析正特征值, 所以, 重做了图 5.8.2c(这里的图 5.8.4), 以便用图示解法来确定 $hL<-1$ 时的特征值. 因为最小特征值是负的, $\lambda_1=-s_1$, 这里就从 $n=2$ 开始标明交点 λ_n. 由图示解法可以得到这些特征值的界:

$$\pi < \sqrt{\lambda_2}L < \frac{3\pi}{2} \tag{5.8.35}$$

$$2\pi < \sqrt{\lambda_3}L < \frac{5\pi}{2}, \tag{5.8.36}$$

这容易推广为

$$(n-1)\pi < \sqrt{\lambda_n}L < (n-1/2)\pi, \quad n \geqslant 2. \tag{5.8.37}$$

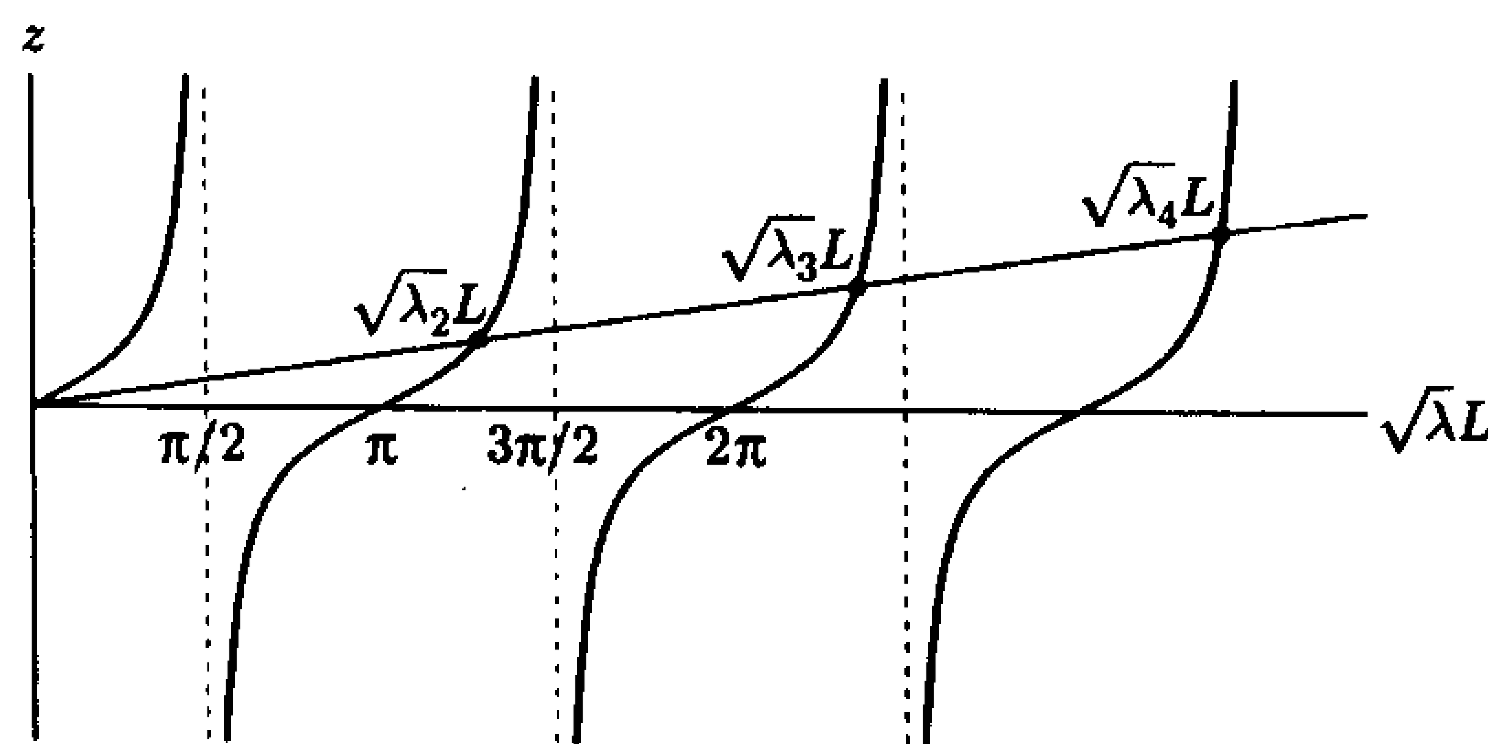


图 5.8.4 正特征值($hL<-1$)

206

下面研究特征函数的零点. 最小特征函数是 $\sinh\sqrt{s_1}x$. 因为双曲正弦函数(除在端点 $x=0$ 外)总不为零, 这就验证了定理的一部分: 对应最小特征值的特征函数在内部没有零点. 其他特征函数是 $\sin\sqrt{\lambda_n}x$, 画在图 5.8.5 中. 在图中, 端点 $x=0$ 清楚地标出, 而端点 $x=L$ 则依赖于 λ. 例如, 对 λ_3, 端点 $x=L$ 出现在$\sqrt{\lambda_3}L$ 处, $\sqrt{\lambda_3}L$ 在图 5.8.5 中的位置是根据(5.8.36)画出的. 当 x 从 0 变化到 L 时, 这个特征函数在图 5.8.5 中画到虚线为止. 它有两个零点($\sqrt{\lambda_3}x=\pi$

和 2π). 这个推理方法可以用于这些特征函数的任何一个. 这样的话, 恰为一般定理所指出的: 对应 λ_n 的第 n 个特征函数零点的个数是 $n-1$. 但定理没有说, 对应最小正特征值的特征函数没有零点. 而是, 对应最小特征值的特征函数没有零点. 再说一遍, 在这个例子里, 最小的特征值是负的, 其对应的特征函数没有零点.

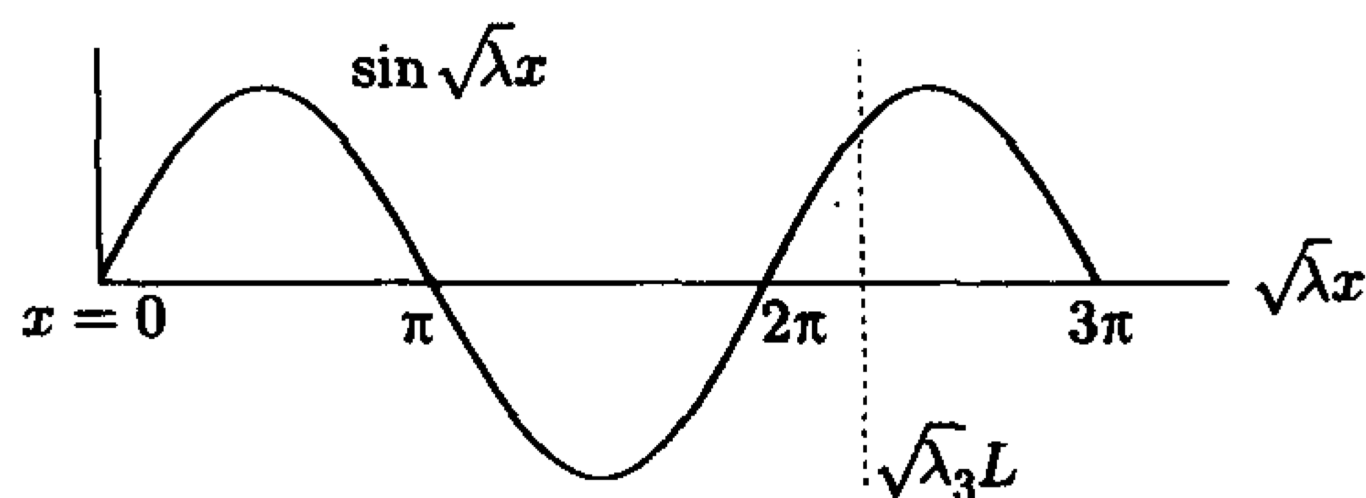


图 5.8.5 特征函数 $\sin\sqrt{\lambda}x$ 的零点

满足非物理边界条件的热流. 为了进一步理解第三类边界条件, 下面要完成对一个例子的研究. 考虑均匀杆的热流:

$$\text{PDE}: \frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\text{BC1}: u(0,t) = 0$$

$$\text{BC2}: \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = -hu(L,t)$$

$$\text{IC}: u(x,0) = f(x) \tag{5.8.38}$$

假定温度在 $x=0$ 处是零, 且在 $x=L$ 处, 加上第三类边界条件的"非物理"情形($h<0$). 热能在$x=L$ 处流入杆内[如果 $u(L, t)>0$].

分离变量,

207

$$u(x,t) = \phi(x)G(t), \tag{5.8.39}$$

给出

$$\frac{dG}{dt} = -\lambda kG \tag{5.8.40}$$

$$\boxed{\frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda\phi = 0} \tag{5.8.41}$$

$$\boxed{\phi(0) = 0} \tag{5.8.42}$$

$$\boxed{\frac{d\phi}{dx}(L) + h\phi(L) = 0.} \tag{5.8.43}$$

时间部分是一个指数 $G=ce^{-\lambda kt}$. 这里只考虑情形

$$\boxed{hL < -1.}$$

此时有一个负特征值($\lambda_1 = -s_1$), 对应的特征函数 $\sinh\sqrt{s_1}x$, 其中 s_1 由 $\tanh\sqrt{s}L = -\sqrt{s}/h$ 的唯一解确定. 时间部分依指数增长. 其他所有的特征值 λ_n 都是正的. 对这些特征值, 特征函数是 $\sin\sqrt{\lambda}x$(其中 $\tan\sqrt{\lambda}x = -\sqrt{\lambda}/h$ 有无穷多个解), 而对应的时间相关部分与 $e^{-\lambda kt}$成比例依指数衰减. 乘积解的形式是 $\sin\sqrt{\lambda}xe^{-\lambda kt}$和 $\sinh\sqrt{s_1}xe^{s_1kt}$. 此处, 若考虑有点"抽象的"符号可能会更方便; 乘积解是 $\phi_n(x)e^{-\lambda_n kt}$, 其中特征函数是

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \sinh\sqrt{s_1}x & n = 1 \\ \sin\sqrt{\lambda_n}x & n > 1. \end{cases}$$

根据叠加原理，试图用所有可能乘积解的线性组合满足初值问题：

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) e^{-\lambda_n k t}.$$

初值条件 $u(x, 0) = f(x)$ 给出

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x).$$

208

因为在(5.8.41)中，系数 $\sigma(x)=1$，特征函数 $\phi_n(x)$ 关于权函数 1 正交. 由此可知道初始条件 $f(x)$ 的广义傅里叶系数是

$$a_n = \frac{\int_0^L f(x)\phi_n(x)\,dx}{\int_0^L \phi_n^2\,dx} = \begin{cases} \int_0^L f(x)\sinh\sqrt{s_1}x\,dx \Big/ \int_0^L \sinh^2\sqrt{s_1}x\,dx & n = 1 \\ \int_0^L f(x)\sin\sqrt{\lambda_n}x\,dx \Big/ \int_0^L \sin^2\sqrt{\lambda_n}x\,dx & n \geqslant 2. \end{cases}$$

特别地，可以证明 $\int_0^L \sin^2\sqrt{\lambda_n}x\,dx \neq L/2$. 或许应该再强调一点. 这里利用了对应不同特征值的特征函数正交的定理；因此保证了 $\int_0^L \sin\sqrt{\lambda_n}x\sin\sqrt{\lambda_m}x\,dx = 0\,(n \neq m)$ 和 $\int_0^L \sin\sqrt{\lambda_n}x\sinh\sqrt{s_1}x\,dx = 0$. 这些就不必要用积分来验证了(虽然可以做到).

其他满足第三类边界条件的问题在习题中讨论.

习题 5.8

5.8.1 考虑

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

满足 $u(0, t) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = -hu(L, t)$ 和 $u(x, 0) = f(x)$.

(a) 在 $hL > -1$ 的条件下求解. (b) 在 $hL = -1$ 的条件下求解.

5.8.2 考虑特征值问题(5.8.8)~(5.8.10). 证明第 n 个特征函数在内部有 $n-1$ 个零点，如果

(a) $h > 0$ (b) $h = 0$ *(c) $-1 < hL < 0$ (d) $hL = -1$

5.8.3 考虑特征值问题

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda\phi = 0,$$

满足 $\frac{d\phi}{dx}(0) = 0$ 和 $\frac{d\phi}{dx}(L) + h\phi(L) = 0$，其中 $h > 0$.

(a) 证明 $\lambda > 0$(不求解微分方程).

*(b) 用图示解法，确定所有的特征值. 求其上界和下界. 并估计大的特征值.

(c) 证明第 n 个特征函数在内部有 $n-1$ 个零点.

5.8.4 如果 $h < 0$，重做习题 5.8.3 的(b)和(c).

209

5.8.5 考虑

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

满足 $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = -hu(L, t)$ 和 $u(x, 0) = f(x)$.

(a)在 $h>0$ 条件下求解. (b)在 $h<0$ 条件下求解.

5.8.6 考虑($h>0$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)-hu(0,t)=0 \qquad u(x,0)=f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0 \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x).$$

(a)证明振动存在无穷多个不同的频率. (b)估计振动的大频率. (c)求解初值问题.

*5.8.7 考虑特征值问题

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}+\lambda\phi=0 \text{ 满足 } \phi(0)=0 \quad \text{和} \quad \phi(\pi)-2\frac{d\phi}{dx}(0)=0.$$

(a)证明：对于满足这些齐次边界条件的任意两个函数 u 和 v，一般

$$\int_0^\pi\left(u\frac{d^2v}{dx^2}-v\frac{d^2u}{dx^2}\right)\ dx\neq 0.$$

(b)确定所有正特征值. (c)确定所有负特征值. (d)$\lambda=0$ 是特征值吗?

(e)除了由(b)到(d)部分所确定的特征值外，还有其他的特征值吗？简单地解释一下.

5.8.8 考虑边值问题

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}+\lambda\phi=0 \quad \text{满足} \quad \begin{aligned}\phi(0)-\frac{d\phi}{dx}(0)&=0\\ \phi(1)+\frac{d\phi}{dx}(1)&=0.\end{aligned}$$

210

(a)利用瑞利商，证明 $\lambda\geqslant 0$. 为何 $\lambda>0$?

(b)证明对应不同特征值的特征函数是正交的.

*(c)证明

$$\tan\sqrt{\lambda}=\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}.$$

用图示解法确定特征值. 估计大特征值.

(d)求解

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

满足

$$u(0,t)-\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$$

$$u(1,t)+\frac{\partial u}{\partial x}(1,t)=0$$

$$u(x,0)=f(x).$$

你可能需要相关的特征函数 $\phi_n(x)$，假定它们是已知的.

5.8.9 考虑特征值问题

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}+\lambda\phi=0 \quad \text{满足} \quad \phi(0)=\frac{d\phi}{dx}(0) \quad \text{和} \quad \phi(1)=\beta\frac{d\phi}{dx}(1).$$

对 β 的什么值(若有的话)，$\lambda=0$ 是特征值?

5.8.10 考虑5.8节特征值问题的特殊情形：

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}+\lambda\phi=0 \quad \text{满足} \quad \phi(0)=0 \quad \text{和} \quad \frac{d\phi}{dx}(1)+\phi(1)=0.$$

*(a)利用表或计算器，确定最小的特征值，至少到两位或三位有效数字.

* (b)在计算机上，用求根算法(例如，牛顿方法)确定最小特征值.

(c)把(a)或(b)部分的结果与用瑞利商所得的界作比较[见习题5.6.1(c)].

5.8.11 确定所有负的特征值：

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}+5\phi=-\lambda\phi \text{ 满足 } \phi(0)=0 \text{ 和 } \phi(\pi)=0.$$

5.8.12 考虑$\partial^2 u/\partial t^2=c^2\partial^2 u/\partial x^2$ 满足边界条件

$$u=0 \qquad \text{在 } x=0 \text{ 处}$$

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-T_0\frac{\partial u}{\partial x}-ku \qquad \text{在 } x=L \text{ 处}.$$

211

(a)给出该边界条件的简要物理解释.

(b)说明如何确定振动的频率. 估计振动的大频率.

(c)在不使用瑞利商的条件下，显式确定是否有不随时间振动的可分离变量解.（提示：没有.）

(d)证明该边界条件不是自伴的：即证明

$$\int_0^L\left(u_n\frac{d^2u_n}{dx^2}-u_m\frac{d^2u_n}{dx^2}\right)dx\neq 0,$$

即使 u_n 和 u_m 是对应不同特征值的特征函数.

*5.8.13 当 λ 由(5.8.15)给定时，简化$\int_0^L\sin^2\sqrt{\lambda}x\,dx$.

5.9 大特征值(渐近行为)

对于变系数的情形，施图姆-刘维尔微分方程

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\phi}{dx}\right]+[\lambda\sigma(x)+q(x)]\phi=0 \tag{5.9.1}$$

的特征值通常一定要用数值法计算. 特征值有无穷多个，而没有最大特征值. 这样就产生了一个大特征值的无穷序列. 在这一节中将给出和解释对于这些大特征值和所对应特征函数的相当好的逼近结果. 因此只对前几个特征值和特征函数才需要数值解.

带有适当解释的渐近方法的仔细推导是很冗长的. 尽管如此，还是要给出有关这些结果的一些想法. 首先从在未知特征值 λ 大的($\lambda\gg1$)条件下，试图近似微分方程(5.9.1)的解. 把(5.9.1)认为是具有随时间变化参数的弹簧质量系统(x 是时间，ϕ 是位置)是有益的. 这时(5.9.1)有一个大恢复力$[-\lambda\sigma(x)\phi]$，由此可以预计解对 x 有快速振动. 另一方面，对应大特征值的特征函数有许多零点. 由于解振动得很快，在几个周期上(每个周期都很小)变系数近似地为常数. 这样在任一点 x_0 附近，由于还有 $\lambda\sigma(x)\gg q(x)$，这个微分方程大致可以近似为常系数微分方程：

$$p(x_0)\frac{d^2\phi}{dx^2}+\lambda\sigma(x_0)\phi\approx 0, \tag{5.9.2}$$

根据(5.9.2)，预计解按下面“局部的”空间(圆)频率振动：

$$\text{频率}=\sqrt{\frac{\lambda\sigma(x_0)}{p(x_0)}}. \tag{5.9.3}$$

212

这个频率是大的($\lambda\gg1$)，因此周期如假定的那样是小的. 虽然频率(和周期)依赖于 x，但变化缓慢；即在几个周期上(很短距离)，周期几乎不变化. 很多周期后，频率(和周期)可能会有大的改变. 图5.9.1显示出这种慢变化周期.

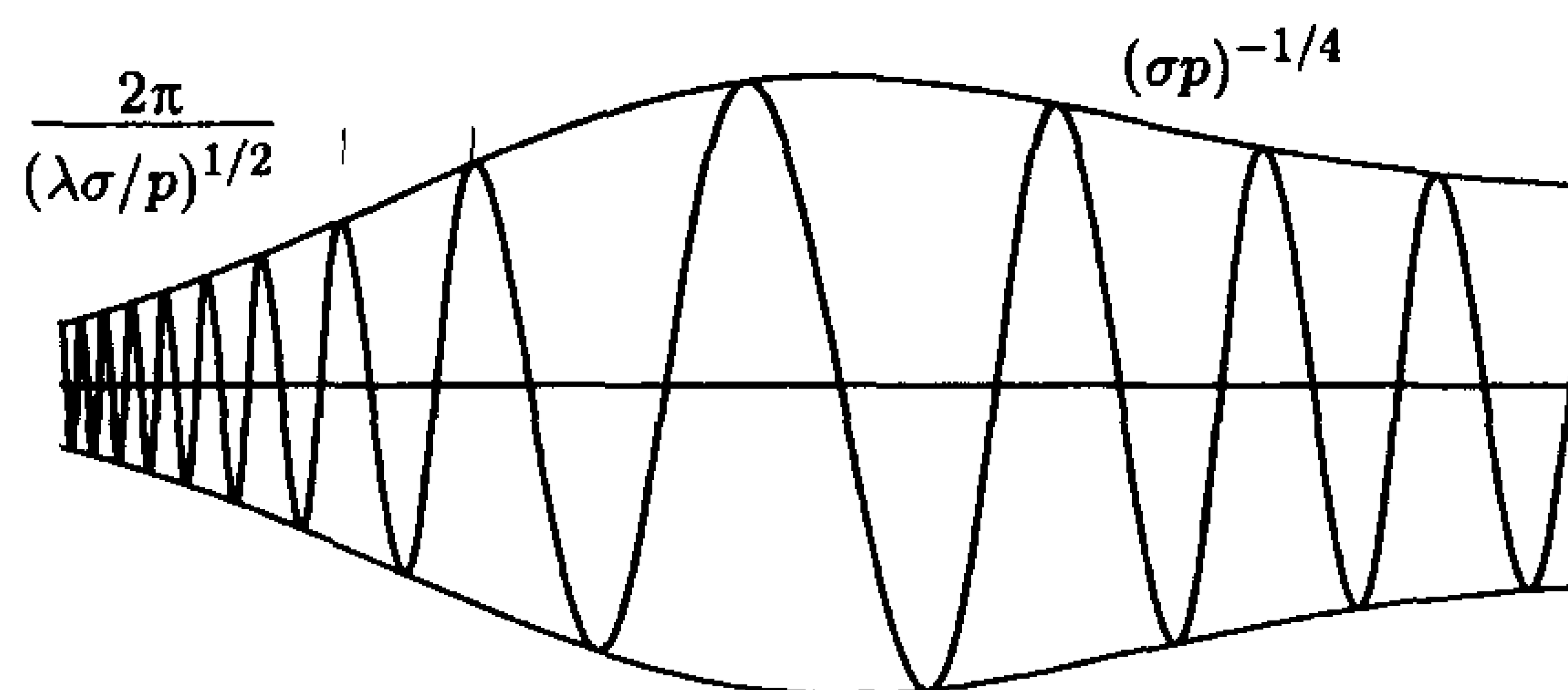


图 5.9.1 微分方程的刘维尔–格林渐近解表明了快速振动(或等价地，相对缓慢变化的振幅)

由(5.9.2)，可以期望振动的振幅不变．不过，(5.9.2)仅是个近似．而是应该期望振幅在每个周期上都近似地为常数．这样振幅和频率都缓慢地变化：

$$\phi(x) = A(x)\cos\psi(x), \tag{5.9.4}$$

其中也可以用正弦．适当的相位 $\psi(x)$ 渐近公式可以用刚才所概述的想法获得．因为周期很小，只需要用 x_0 附近的 x 值来理解由(5.9.4)给出的振动．由 $\psi(x)$ 的泰勒级数得到

$$\phi(x) = A(x)\cos[\psi(x_0) + (x - x_0)\psi'(x_0) + \cdots]. \tag{5.9.5}$$

这是局部频率为 $\psi'(x_0)$ 的振动．这样，相位的导数是局部频率．由(5.9.2)，局部频率应为 $[\lambda\sigma(x_0)/p(x_0)]^{1/2}$．由此预计

$$\psi'(x_0) = \lambda^{1/2}\left[\frac{\sigma(x_0)}{p(x_0)}\right]^{1/2}. \tag{5.9.6}$$

该推理方法的结果是正确地确定了相位：

$$\psi(x) = \lambda^{1/2}\int^{x}\left[\frac{\sigma(x_0)}{p(x_0)}\right]^{1/2}\mathrm{d}x_0. \tag{5.9.7}$$

[213] 注意，相位并不等于频率乘以 x(除非频率是常数)．

精确的渐近技术⊖超出了本书的讨论范围，它们确定的是缓慢变化的振幅．已经知道，可以准确地(如果 λ 是大的)近似微分方程的两个无关解为

$$\boxed{\phi(x) \approx (\sigma p)^{-1/4}\exp\left[\pm \mathrm{i}\lambda^{1/2}\int^{x}\left(\frac{\sigma}{p}\right)^{1/2}\mathrm{d}x_0\right],} \tag{5.9.8}$$

其中也可以用正弦和余弦．图 5.9.1 给出了这些解的略图(用正弦或余弦)．解快速地振动．这个波的包络是缓慢变化的函数 $(\sigma p)^{-1/4}$，它表现出相对缓慢的振幅变化．局部频率是 $(\lambda\sigma/p)^{1/2}$，对应的周期是 $2\pi(\lambda\sigma/p)^{1/2}$．

为了确定大特征值，一定要对通解(5.9.8)应用边界条件．例如，如果 $\phi(0)=0$，则

$$\phi(x) = (\sigma p)^{-1/4}\sin\left(\lambda^{1/2}\int_0^{x}\left(\frac{\sigma}{p}\right)^{1/2}\mathrm{d}x_0\right) + \cdots. \tag{5.9.9}$$

第二个边界条件(例如，$\phi(L)=0$)确定特征值

$$0 = \sin\left(\lambda^{1/2}\int_0^{L}\left(\frac{\sigma}{p}\right)^{1/2}\mathrm{d}x_0\right) + \cdots.$$

⊖ 可以用多种方法推导这些结果，如 W. K. B. (J.)方法(应该称为刘维尔–格林方法)或多重尺度方法．这些渐近技术的参考文献包括书 Bender and Orszag[1999]、Kevorkian and Cole[1996]和 Nayfeh[2002]．

这就导出大特征值的渐近公式 $\lambda^{1/2}\int_0^L\left(\frac{\sigma}{p}\right)^{1/2}dx_0\approx n\pi$,或等价地,若 n 很大,

$$\lambda\sim\left[n\pi\Big/\int_0^L\left(\frac{\sigma}{p}\right)^{1/2}dx_0\right]^2,\qquad(5.9.10)$$

即使 n 不是很大，这个公式也常常是相当准确的. 特征函数由(5.9.9)近似地给出，其中要用到(5.9.10). 注意，$q(x)$并不出现在这些渐近公式中；$q(x)$不影响特征值的主阶数. 不过，也有考虑到$q(x)$的更加准确的近似公式.

例. 考虑特征值问题

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}+\lambda(1+x)\phi=0$$

$$\phi(0)=0$$

$$\phi(1)=0.$$

214

其中 $p(x)=1$，$\sigma(x)=1+x$，$q(x)=0$，$L=1$. 对特征值的渐近公式(5.9.10)是

$$\lambda\sim\left[\frac{n\pi}{\int_0^1(1+x_0)^{1/2}dx_0}\right]^2=\frac{n^2\pi^2}{\left[\frac{2}{3}(1+x_0)^{3/2}\Big|_0^1\right]^2}=\frac{n^2\pi^2}{\frac{4}{9}(2^{3/2}-1)^2}.\qquad(5.9.11)$$

在表 5.9.1 中比较了(用计算机的准确数值格式的)数值结果和渐近公式的结果. (5.9.11)式甚至对 $n=1$ 也是个合理的近似. 随着 n 增加，渐近公式的百分数误差或相对误差会获得改进. 不过，误差大体保持相同(虽然很小). (5.9.10)的渐近值精度有改进，但绝对误差近似为常数.

表 5.9.1 特征值 λ_n

n	数值解[①]（假定为准确的）	渐近公式 (5.9.11)	误差
1	6.548 395	6.642 429	0.094 034
2	26.464 937	26.569 718	0.104 781
3	59.674 174	59.781 865	0.107 691
4	106.170 023	106.278 872	0.108 849
5	165.951 321	166.060 737	0.109 416
6	239.017 727 5	239.127 461 5	0.109 734
7	325.369 115	325.479 045	0.109 930

注：①由 E. C. Gartland, Jr. 提供.

习题 5.9

5.9.1 对

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\phi}{dx}\right)+[\lambda\sigma(x)+q(x)]\phi=0$$

估计(主阶数)大的特征值和对应的特征函数，如果边界条件是

(a) $\frac{d\phi}{dx}(0)=0$ 和 $\frac{d\phi}{dx}(L)=0$　　*(b) $\phi(0)=0$ 和 $\frac{d\phi}{dx}(L)=0$　　(c) $\phi(0)=0$ 和 $\frac{d\phi}{dx}(L)+h\phi(L)=0$

5.9.2 考虑

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}+\lambda(1+x)\phi=0$$

215

满足 $\phi(0)=0$ 和 $\phi(1)=0$. 大致地画出大 λ 特征函数的草图. 要考虑振幅和周期的变化.

5.9.3 考虑 $\lambda\gg1$,

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}+[\lambda\sigma(x)+q(x)]\phi=0.$$

*(a)做代换

$$\phi=A(x)\exp\left[i\lambda^{1/2}\int_0^x\sigma^{1/2}(x_0)dx_0\right].$$

确定 $A(x)$ 的微分方程.

(b)设 $A(x)=A_0(x)+\lambda^{-1/2}A_1(x)+\cdots$. 求解 $A_0(x)$ 和 $A_1(x)$. 并验证(5.9.8).

(c)假设 $\phi(0)=0$. 利用 $A_1(x)$ 改进(5.9.9).

(d)如果 $\phi(L)=0$, 利用(c)改进(5.9.10).

*(e)求 $A_n(x)$ 的递推公式.

5.10 逼近性质

在用分离变量求解偏微分方程的许多实际应用中，要计算和处理无穷级数的无穷多项是不太可能的. 通常主要是利用有限多项[⊖]. 本节将简要讨论广义傅里叶级数的有限项使用.

已知任何分段光滑函数 $f(x)$ 都能够表示为特征函数的广义傅里叶级数,

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\phi_n(x). \tag{5.10.1}$$

由特征函数[关于权函数 $\sigma(x)$]的正交性，就可以容易地确定广义傅里叶系数:

$$a_n=\frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)\sigma(x)dx}{\int_a^b\phi_n^2\sigma dx}. \tag{5.10.2}$$

然而，假设只可以使用前 M 个特征函数来近似函数 $f(x)$,

$$f(x)\approx\sum_{n=1}^{M}\alpha_n\phi_n(x). \tag{5.10.3}$$

那么系数 α_n 应该是什么呢? 或许利用有限项，会有一种比使用广义傅里叶系数(5.10.2)更好的方式逼近 $f(x)$. 要选取新的系数 α_n,使得 $\sum_{n=1}^{M}\alpha_n\phi_n(x)$ 是 $f(x)$ 的"最佳"逼近. 有很多定义"最

216

佳"的方法，这里只说明特别有用的一种. 系数 α_n 一般依赖 M. 例如，假设取 $M=10$，并算出 α_1, …, α_{10}, 使得(5.10.3)按某种方式是"最佳"的. 但计算后，可能发现对(5.10.3)的逼近不够好，就想要包括更多的项，例如，$M=11$. 这就不得不重新计算使得(5.10.3)在 $M=11$ 时"最佳"的所有11个系数. 下面要证明有一种定义最佳的方法，能使得系数 α_n 不依赖于 M; 即从 $M=10$ 到 $M=11$ 时，只需要计算另加的系数，即 α_{11}.

均方偏差. 把最佳逼近定义为最小误差的逼近. 不过，误差可以用多种方式来定义. $f(x)$

⊖ 通常，偏微分方程问题的数值解最好直接使用数值法获得.

和其逼近 $\sum_{n=1}^{M}\alpha_n\phi_n(x)$ 之间的差依赖 x. $f(x)-\sum_{n=1}^{M}\alpha_n\phi_n(x)$ 可能在某些区域内为正，而在其他区域内为负. 对误差的一种可能测定是其在整个区间上偏差的最大值：$\max\left|f(x)-\sum_{n=1}^{M}\alpha_n\phi_n(x)\right|$. 这是有关误差的一种合理定义，但却很少用，因为选择 α_n 最小化这个最大偏差是非常困难的. 而通常定义误差为均方偏差，

$$\boxed{E\equiv\int_a^b\left[f(x)-\sum_{n=1}^{M}a_n\phi_n(x)\right]^2\sigma(x)\,\mathrm{d}x.}\tag{5.10.4}$$

这里要为在很小区间上的大偏差付出大的代价. 在误差的定义中引入权因子 $\sigma(x)$，下面要证明只有用权 $\sigma(x)$ 时，才易于最小化误差. $\sigma(x)$ 与微分方程中定义特征函数 $\phi_n(x)$ 时出现的函数相同；即出现在误差中的权函数与特征函数的正交性所需的权函数是相同的.

由(5.10.4)定义的误差，是系数 α_1，α_2，…，α_M 的函数. 为了最小化 M 个变量的函数，通常使用一阶导数条件. 并要求关于每个 α_i 的一阶偏导数为零：

$$\frac{\partial E}{\partial\alpha_i}=0,\quad i=1,2,\cdots,M.$$

计算每个偏导数，并令它为零：

$$0=\frac{\partial E}{\partial\alpha_i}=-2\int_a^b\left[f(x)-\sum_{n=1}^{M}\alpha_n\phi_n(x)\right]\phi_i(x)\sigma(x)\,\mathrm{d}x,\quad i=1,2,\cdots,M,\tag{5.10.5}$$

这里利用了事实：$\partial/\partial\alpha_i\left(\sum_{n=1}^{M}\alpha_n\phi_n(x)\right)=\phi_i(x)$. 对 M 个未知量，有 M 个方程(5.10.5). 要不是由于特征函数关于(5.10.5)中相同的权函数 $\sigma(x)$ 正交，该方程是相当难解的. 因此(5.10.5)化为

$$\int_a^b f(x)\phi_i(x)\sigma(x)\,\mathrm{d}x=\alpha_i\int_a^b\phi_i^2(x)\sigma(x)\,\mathrm{d}x.$$

217

可以很容易地由第 i 个方程求出 α_i. 事实上，$\alpha_i=a_i$[见(5.10.2)]；如果选取系数为广义的傅里叶系数，所有的一阶偏导数都为零. 还要证明，这实际上最小化了误差(而不只是局部临界点使得所有一阶偏导数都为零). 事实上是要证明(用前 M 个特征函数，在均方意义下的)最佳逼近出现在系数为广义傅里叶系数的时候：这样，(1)系数容易确定且(2)系数与 M 无关.

证明. 为了证明实际上最小化了误差 E，就不使用偏导数. 而是展开(5.10.4)中的平方偏差进行推导：

$$E=\int_a^b\left(f^2-2\sum_{n=1}^{M}\alpha_n f\phi_n+\sum_{n=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\alpha_n\alpha_l\,\phi_n\phi_l\right)\sigma\,\mathrm{d}x.\tag{5.10.6}$$

由于特征函数的正交性，再次出现一些简化：

$$E=\int_a^b\left(f^2-2\sum_{n=1}^{M}\alpha_n f\phi_n+\sum_{n=1}^{M}\alpha_n^2\phi_n^2\right)\sigma\,\mathrm{d}x.\tag{5.10.7}$$

每个 α_n 以平方形式出现：

$$E=\sum_{n=1}^{M}\left[\alpha_n^2\int_a^b\phi_n^2\sigma\,\mathrm{d}x-2\alpha_n\int_a^b f\phi_n\sigma\,\mathrm{d}x\right]+\int_a^b f^2\sigma\,\mathrm{d}x,\tag{5.10.8}$$

这意味着要做完全平方

$$E=\sum_{n=1}^{M}\left[\int_a^b\phi_n^2\sigma\mathrm{d}x\left(\alpha_n-\frac{\int_a^b f\phi_n\sigma\mathrm{d}x}{\int_a^b\phi_n^2\sigma\mathrm{d}x}\right)^2-\frac{\left(\int_a^b f\phi_n\sigma\mathrm{d}x\right)^2}{\int_a^b\phi_n^2\sigma\mathrm{d}x}\right]+\int_a^b f^2\sigma\mathrm{d}x. \tag{5.10.9}$$

依赖于未知 α_n 的唯一项以非负的形式出现. 因为只有当第一项变为零时, 才出现最小值, 这就确定了最佳系数

$$\alpha_n=\frac{\int_a^b f\phi_n\sigma\mathrm{d}x}{\int_a^b\phi_n^2\sigma\mathrm{d}x}, \tag{5.10.10}$$

与使用较简单的一阶导数条件所得到的结果一样.

误差. 因此, (5.10.9)证明了最小误差是

218

$$\boxed{E=\int_a^b f^2\sigma\mathrm{d}x-\sum_{n=1}^{M}\alpha_n^2\int_a^b\phi_n^2\sigma\mathrm{d}x,} \tag{5.10.11}$$

其中使用了(5.10.10)、(5.10.11)式表明当 M 增加时, 误差减少. 所以, 我们可以把广义傅里叶级数作为一个逼近方案. 在截断级数中用的项越多, 逼近得越好.

例. 对傅里叶正弦级数, 其中 $\sigma(x)=1,\phi_n(x)=\sin n\pi x/L$ 和 $\int_0^L\sin^2 n\pi x/L\mathrm{d}x=L/2$, 有

$$E=\int_0^L f^2\mathrm{d}x-\frac{L}{2}\sum_{n=1}^{M}\alpha_n^2. \tag{5.10.12}$$

贝塞尔不等式和帕塞瓦尔等式. 因为 $E\geqslant0$[见(5.10.4)], (5.10.11)给出

$$\boxed{\int_a^b f^2\sigma\mathrm{d}x\geqslant\sum_{n=1}^{M}\alpha_n^2\int_a^b\phi_n^2\sigma\mathrm{d}x,} \tag{5.10.13}$$

称为贝塞尔不等式. 更重要的是, 对任何施图姆–刘维尔特征值问题, $f(x)$的特征函数展开式依平均收敛于$f(x)$, 也就是[见(5.10.4)]

$$\lim_{M\to\infty}E=0;$$

当 $M\to\infty$ 时, 均方偏差为零. 这就证明了帕塞瓦尔等式:

$$\boxed{\int_a^b f^2\sigma\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2\int_a^b\phi_n^2\sigma\mathrm{d}x.} \tag{5.10.14}$$

帕塞瓦尔等式(5.10.14)是毕达哥拉斯定理(即勾股定理)的一个推广. 在一个直角三角形中, $c^2=a^2+b^2$. 这对向量有一个解释. 如果 $v=a\hat{i}+b\hat{j}$, 则 $v\cdot v=|v|^2=a^2+b^2$. 这里, a 和 b 是标准正交基中 v 的分量. 在这里, 用正交的特征函数表示函数$f(x)$:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\phi_n(x).$$

如果引入单位长度的特征函数, 则

219

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n l\phi_n(x)}{l},$$

其中 l 是 $\phi_n(x)$的长度:

$$l^2 = \int_a^b \phi_n^2 \sigma \mathrm{d}x.$$

因此帕塞瓦尔等式可简单地陈述为，f 的平方长度 $\int_a^b f^2 \sigma \mathrm{d}x$，等于 f(用单位长度函数的正交基)分量的平方和，$(a_n l)^2 = a_n^2 \int_a^b \phi_n^2 \sigma \mathrm{d}x$.

习题 5.10

5.10.1 考虑 $f(x) = 1$ 在区间 $0 \leqslant x \leqslant L$ 上的傅里叶正弦级数. 为了使均方误差是 $\int_0^L f^2 \sigma \mathrm{d}x$ 的 1%，要保留这个级数的多少项？

5.10.2 对下列无穷级数应用帕塞瓦尔等式，以获得相应的公式：

(a) $f(x) = 1$ 在区间 $0 \leqslant x \leqslant L$ 上的傅里叶正弦级数.

*(b) $f(x) = x$ 在区间 $0 \leqslant x \leqslant L$ 上的傅里叶余弦级数.

(c) $f(x) = x$ 在区间 $0 \leqslant x \leqslant L$ 上的傅里叶正弦级数.

5.10.3 考虑定义在 $a \leqslant x \leqslant b$ 上的函数 $f(x)$. 用常值函数逼近这个函数. 证明：(在均方意义下，即最小化均方偏差)最佳的这个常值等于 $f(x)$ 在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上的平均.

5.10.4 (a)利用帕塞瓦尔等式，用级数的尾项表示误差.

(b)对在区间 $0 \leqslant x \leqslant L$ 上的傅里叶正弦级数，重做(a).

(c)如果 $f(x)$ 是分段光滑的，估计(b)部分的尾项. (提示：利用分部积分.)

5.10.5 证明：如果

$$L(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right) + qf,$$

则若 f 和 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ 是连续的，

$$-\int_a^b f L(f) \mathrm{d}x = -pf\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\bigg|_a^b + \int_a^b \left[p\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^2 - qf^2\right]\mathrm{d}x.$$

5.10.6 假定求和运算与积分运算能够交换，证明：若

$$f = \sum \alpha_n \phi_n \quad 和 \quad g = \sum \beta_n \phi_n,$$

[220]

则正规化的特征函数

$$\int_a^b fg\sigma \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n$$

是帕塞瓦尔等式的一个推广.

5.10.7 利用习题 5.10.5 和习题 5.10.6，证明

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n^2 = -pf\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\bigg|_a^b + \int_a^b \left[p\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^2 - qf^2\right]\mathrm{d}x. \tag{5.10.15}$$

[提示：让 $g = L(f)$，并假定逐项微分是正确的.]

5.10.8 根据施瓦茨不等式(在习题 2.3.10 中证明过)，逐点误差的绝对值满足

$$\left|f(x) - \sum_{n=1}^{M} \alpha_n \phi_n\right| = \left|\sum_{n=M+1}^{\infty} \alpha_n \phi_n\right| \leqslant \left\{\sum_{n=M+1}^{\infty} |\lambda_n| \alpha_n^2\right\}^{1/2} \left\{\sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{\phi_n^2}{|\lambda_n|}\right\}^{1/2} \tag{5.10.16}$$

进一步地，第 9 章引入了一个格林函数 $G(x, x_0)$，证明了

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n^2}{\lambda_n} = -G(x, x). \tag{5.10.17}$$

并利用(5.10.15)、(5.10.16)和(5.10.17)，导出逐点误差的一个上界(在广义傅里叶级数是逐点收敛的情形下). Weinberger[1995]给出了有关逐点误差的例子和进一步的讨论.

[221]

第6章　偏微分方程的有限差分数值法

6.1　引言

偏微分方程通常是分类的. 同一类方程有相似的数学与物理特性. 前面主要研究了最简单的原型. 热传导方程($\partial u/\partial t = k\partial^2 u/\partial x^2$)是*抛物型*偏微分方程的例子，通常其解会随时间依指数衰减并趋于平衡解. 信息与不连续点以无穷大的速度传播. 波动方程($\partial^2 u/\partial t^2 = c^2\partial^2 u/\partial x^2$)是典型的*双曲型*偏微分方程. 存在多种振动模式. 其信息以有限的速度传播，因此间断被保留. 拉普拉斯方程($\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$)是*椭圆型*偏微分方程的例子. 其解通常满足最大值原理. 抛物型，双曲型与椭圆型三个概念都源于圆锥曲线的变换特性. (例如参见 Weinberger [1995].)

在前几章中，研究了获取某些有物理意义的偏微分方程显式解的各种方法. 除一维波动方程外，其他方程的解都比较复杂，含有无穷级数或积分表示. 许多时候还需要对偏微分方程的解做细致的数值计算. 以前的分析给出了一些计算方法(例如，傅里叶级数的前 100 项). 不过，求数值解通常还有更有效的方法，尤其是利用计算机的时候. 本章将介绍有限差分方法，来数值逼近不同类型(即椭圆型、双曲型与抛物型)偏微分方程的解. 这里仅对几种简单类型的方程进行讨论，即热传导方程，波动方程和拉普拉斯方程，对于更复杂问题(包括非线性问题)的算法也可依此类推.

222

6.2　有限差分与截断泰勒级数

多项式逼近. 有限差分数值计算的最基本技巧是基于对 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 附近的多项式逼近. 设 $x = x_0 + \Delta x$，则 $\Delta x = x - x_0$. 若在 $x = x_0$ 附近用常量近似 $f(x)$，就取 $f(x_0)$. 对 $f(x)$ 更好的逼近是其在 $x = x_0$ 处的切线(参看图 6.2.1)：

$$f(x) \approx f(x_0) + \underbrace{(x - x_0)}_{\Delta x}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0), \tag{6.2.1}$$

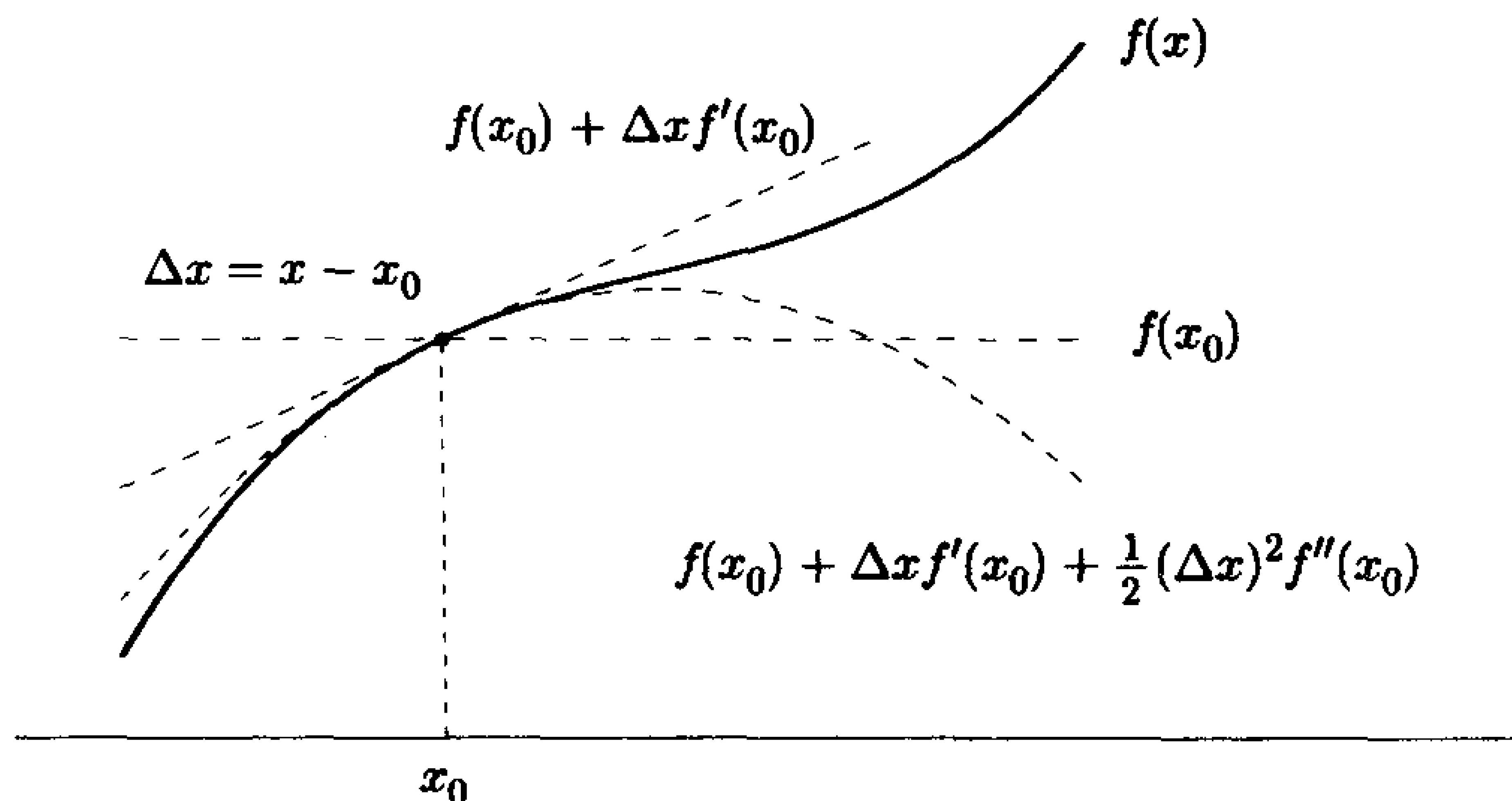


图 6.2.1　泰勒多项式

这是线性逼近(一阶多项式). 也可考虑对$f(x)$的二次逼近，即$f(x)\approx f(x_0)+\Delta xf'(x_0)+(\Delta x)^2f''(x_0)/2!$，它在$x=x_0$处的一阶与二阶导数均与$f(x)$的相同. 如果$x$充分接近$x_0$(即$\Delta x$很小)，则这样对$f(x)$继续进行的高阶多项式逼近将会越来越精确.

截断误差. 这些多项式逼近的误差公式可直接由被称为带余式的泰勒级数得到：

$$f(x)=f(x_0)+\Delta xf'(x_0)+\cdots+\frac{(\Delta x)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+R_n, \tag{6.2.2}$$

余式R_n(也叫截断误差)具有级数下一项的形式，但在一个通常未知的中间点计值：

$$R_n=\frac{(\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_{n+1}),\text{其中 } x_0<\xi_{n+1}<x=x_0+\Delta x. \tag{6.2.3}$$

为了使该式成立，$f(x)$必须有$n+1$阶连续可导.

223

例. 当$n=1$时，由(6.2.3)给出的切线逼近误差：

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\Delta x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)+\frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(\xi_2), \tag{6.2.4}$$

称之为扩展的中值定理. 如果Δx小，则ξ_2包含在小区间内，截断误差就大体确定了(若$\mathrm{d}^2f/\mathrm{d}x^2$连续)，

$$R\approx\frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(x_0).$$

我们说截断误差为$O(\Delta x)^2$，读作"$(\Delta x)^2$阶"，意思是

$$|R|\leqslant C(\Delta x)^2,$$

因为通常假设$\mathrm{d}^2f/\mathrm{d}x^2$是有界的($|\mathrm{d}^2f/\mathrm{d}x^2|<M$). 于是，$C=M/2$.

对一阶导数的逼近. 通过使用泰勒级数，可用多种方法逼近导数. 例如，由(6.2.4)可得：

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-\frac{\Delta x}{2}\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(\xi_2). \tag{6.2.5}$$

这样就引入有限差分逼近，对$\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$的前向差分逼近：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)\approx\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.} \tag{6.2.6}$$

它几乎就是导数的定义. 这里使用了前向差分(但不取$\Delta x\to0$的极限). 由于(6.2.5)对任意Δx都成立，将Δx换为$-\Delta x$就导出对$\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$的后向差分逼近：

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)=\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}+\frac{\Delta x}{2}\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(\bar{\xi}_2), \tag{6.2.7}$$

因而有

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)\approx\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}.} \tag{6.2.8}$$

比较(6.2.5)与(6.2.6)以及(6.2.7)与(6.2.8)，可见截断误差为$O(\Delta x)$，并且对于一阶导数的前向差分逼近与后向差分逼近的误差几乎是相同的.

224

为了获得$\mathrm{d}f/\mathrm{d}x(x_0)$的更精确逼近，取前向与后向逼近的平均值. 将(6.2.5)与(6.2.7)相加，

$$2\frac{df}{dx}(x_0)=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}+\frac{\Delta x}{2}\left[\frac{d^2f}{dx^2}(\bar{\xi}_2)-\frac{d^2f}{dx^2}(\xi_2)\right]. \tag{6.2.9}$$

由于$\bar{\xi}_2$与ξ_2接近，可以期望误差几乎被抵消了，从而远远小于$O(\Delta x)$. 为了导出这个逼近的误差，再回到$f(x_0-\Delta x)$与$f(x_0+\Delta x)$的泰勒级数：

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\Delta x f'(x_0)+\frac{(\Delta x)^2}{2!}f''(x_0)+\frac{(\Delta x)^3}{3!}f'''(x_0)+\cdots, \tag{6.2.10}$$

$$f(x_0-\Delta x)=f(x_0)-\Delta x f'(x_0)+\frac{(\Delta x)^2}{2!}f''(x_0)-\frac{(\Delta x)^3}{3!}f'''(x_0)+\cdots. \tag{6.2.11}$$

由(6.2.11)减去(6.2.10)得到

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)=2\Delta x f'(x_0)+\frac{2}{3!}(\Delta x)^3 f'''(x_0)+\cdots.$$

因此期望下式成立：

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}-\frac{(\Delta x)^2}{6}f'''(\xi_3), \tag{6.2.12}$$

它的证明留作习题. 这样就导出$df/dx(x_0)$的中心差分逼近：

$$\boxed{f'(x_0)\approx\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}.} \tag{6.2.13}$$

由于(6.2.13)式更精确(截断误差为$O(\Delta x)^2$)，并且包含了前向与后向差分公式相同数目(2)的函数值计算，因而一般中心差分更可取些. 不过后面将说明，使用中心差分公式并不一定总比其他差分好.

这些对df/dx的有限差分逼近是相容的，即当$\Delta x\to 0$时，截断误差为零. 还有更精确的有限差分公式，但不经常用.

表 6.2.1

	前向差分	后向差分	中心差分
差分公式	0.953 102	1.053 605	1.003 35
|误差|	4.6898%	5.3605%	0.335%

例. 考虑$f(x)=\log x$，$\Delta x=0.1$时，$df/dx(1)$的数值逼近. 与实际问题不一样，这里已经知道了精确答案$df/dx(1)=1$. 用袖珍计算器就能得到表6.2.1中的结果($x_0=1$，$\Delta x=0.1$，$f(x_0+\Delta x)=f(1.1)=\log(1.1)=0.095\,310\,2$和$f(x_0-\Delta x)=\log(0.9)=-0.105\,360\,5$). 从理论上讲，中心差分的误差应当比$\Delta x$小一阶. 我们也观察到了这个现象，为进一步理解误差，用余式的估计来计算期望误差E. 对于前向或后向差分有

225

$$E\approx\left|\frac{\Delta x}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(1)\right|=\frac{0.1}{2}=+0.05,$$

而对中心差分有

$$E\approx\frac{(\Delta x)^2}{6}\frac{d^3f}{dx^3}(1)=\frac{(0.1)^2}{6}\times 2=0.003\,33\cdots.$$

这些结果与表中的实际误差一致．因为一般开始都不知道二阶与三阶导数，因而这样的误差估计不太准确.

二阶导数. 将(6.2.10)与(6.2.11)相加得到

$$f(x_0+\Delta x)+f(x_0-\Delta x)=2f(x_0)+(\Delta x)^2f''(x_0)+\frac{2(\Delta x)^4}{4!}f^{(iv)}(x_0)+\cdots.$$

因而预计有

$$f''(x_0)=\frac{f(x_0+\Delta x)-2f(x_0)+f(x_0-\Delta x)}{(\Delta x)^2}-\frac{(\Delta x)^2}{12}f^{(iv)}(\xi). \tag{6.2.14}$$

这就得到一个截断误差为 $O(\Delta x)^2$ 的二阶导数有限差分逼近：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(x_0)\approx\frac{f(x_0+\Delta x)-2f(x_0)+f(x_0-\Delta x)}{(\Delta x)^2}.} \tag{6.2.15}$$

由于(6.2.15)也可以由对一阶导数重复运用中心差分公式得到(见习题 6.2.2)，因而称(6.2.15)为二阶导数的*中心差分逼近*. 二阶导数的中心差分逼近包含三个函数值计算 $f(x_0-\Delta x)$，$f(x_0)$和$f(x_0+\Delta x)$，它们各自对应的“权”是 $1/(\Delta x)^2$，$-2(\Delta x)^2$及 $1/(\Delta x)^2$，如图 6.2.2 所示. 事实上，一般地，*任意导数的任意有限差分逼近的权之和必须为零*.

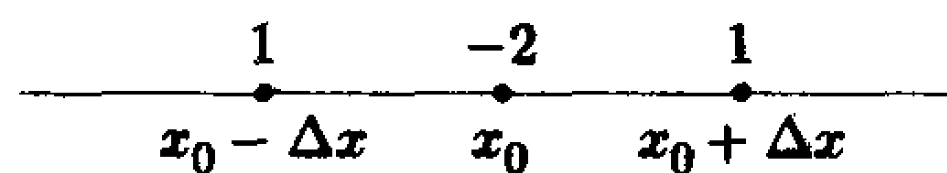


图 6.2.2 二阶导数中心差分逼近的权

偏导数. 在解偏微分方程时，分析两个或多个变量的函数，例如，$u(x, y)$，$u(x, t)$和$u(x, y, t)$. 数值法经常使用有限差分逼近. 某些(并非所有的)偏导数可以用前面所得的单变量函数的结果获得. 226 例如，如果 $u(x, y)$中保持 y 不变，$\partial u/\partial x$ 就是常导数 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$. 可以使用前向差分、后向差分与中心差分公式. 使用中心差分公式，

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\approx\frac{u(x_0+\Delta x,y_0)-u(x_0-\Delta x,y_0)}{2\Delta x}.$$

对于$\partial u/\partial y$，保持 x 不变，用中心差分公式可得

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\approx\frac{u(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0-\Delta y)}{2\Delta y}.$$

这些公式均为两点公式，如图 6.2.3 所示.

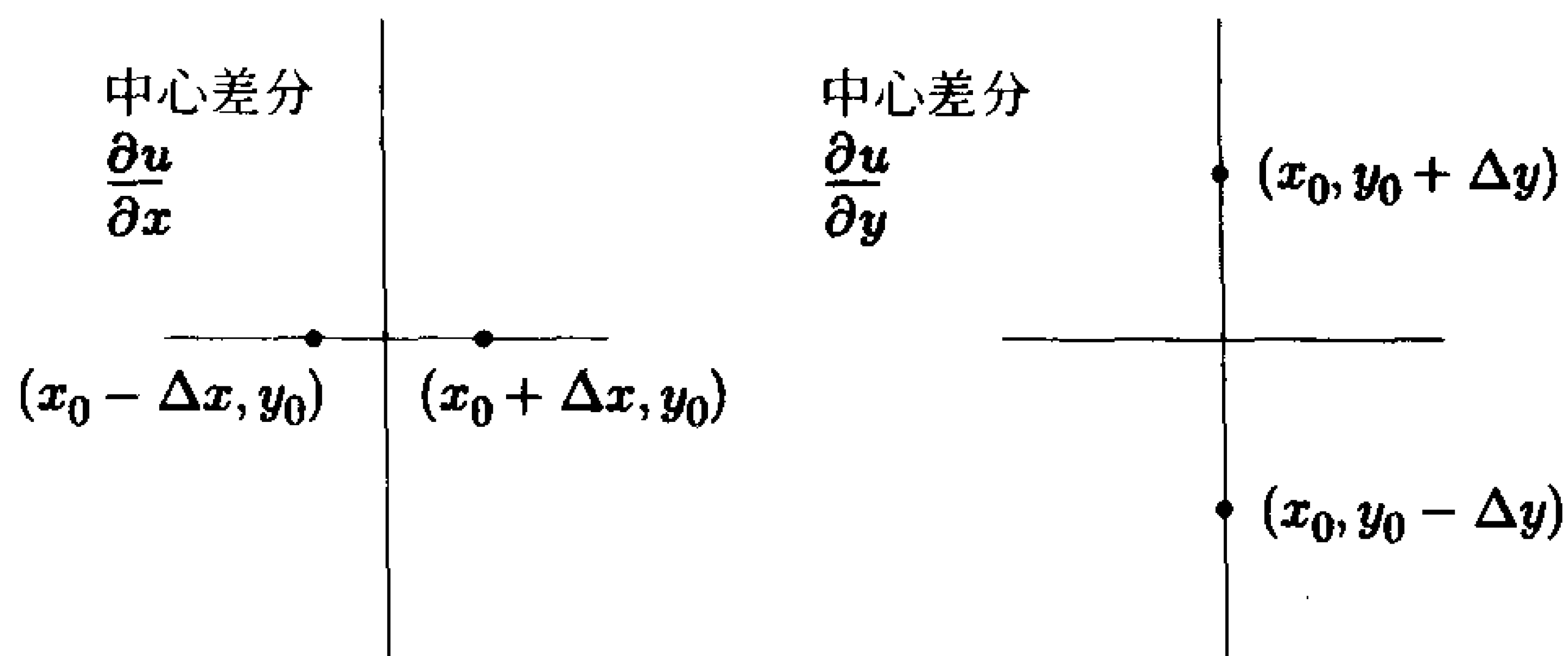


图 6.2.3 一阶偏导数的点

对物理问题，经常要用到拉普拉斯算子$\nabla^2 u = \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2$. 使用二阶导数中心差分公式(6.2.15)，将$x$固定的公式与$y$固定的公式相加：

$$\nabla^2 u(x_0,y_0) \approx \frac{u(x_0+\Delta x,y_0) - 2u(x_0,y_0) + u(x_0-\Delta x,y_0)}{(\Delta x)^2} + \frac{u(x_0,y_0+\Delta y) - 2u(x_0,y_0) + u(x_0,y_0-\Delta y)}{(\Delta y)^2}. \tag{6.2.16}$$

其误差为$O(\Delta x)^2$与$O(\Delta y)^2$中最大的. 取$\Delta x = \Delta y$，就得到拉普拉斯算子∇^2的标准五点有限差分逼近，

227

$$\boxed{\nabla^2 u(x_0,y_0) \approx \frac{u(x_0+\Delta x,y_0) + u(x_0-\Delta x,y_0) + u(x_0,y_0+\Delta y) + u(x_0,y_0-\Delta y) - 4u(x_0,y_0)}{(\Delta x)^2},} \tag{6.2.17}$$

如图6.2.4所示，其中$\Delta x = \Delta y$. 注意，相关权的和也为零.

其他的导数逼近公式可参见 P. J. Davis 及 I. Polonsky 所著的"Numerical Interpolation, Differentiation, and Integration"(Abramowitz and Stegum[1974]的第25章).

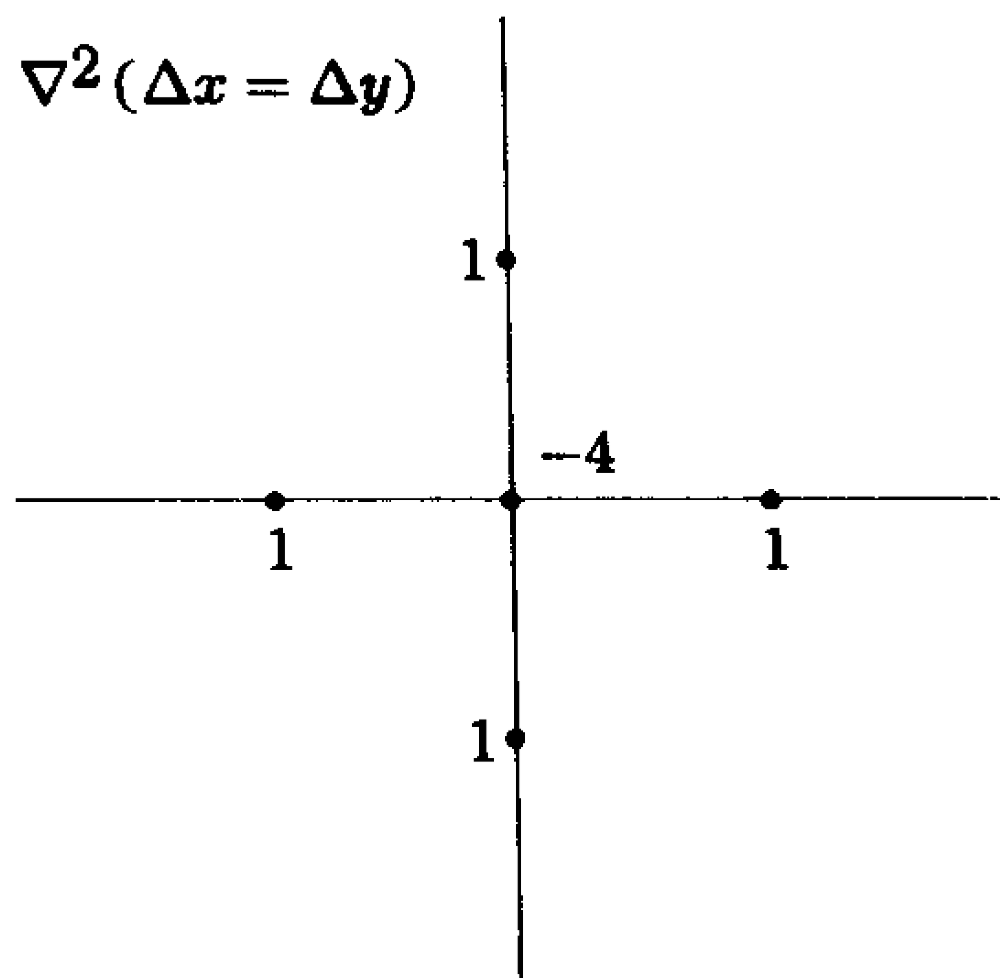


图6.2.4 拉普拉斯($\Delta x = \Delta y$)的权

习题6.2

6.2.1 (a)证明：一阶导数的中心差分逼近(6.2.13)的截断误差是$-(\Delta x)^2 f'''(\xi_3)/6$.（提示：将$g(\Delta x) = f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)$看作为$\Delta x$的函数，考虑它在$\Delta x = 0$处的泰勒级数.）

(b)证明：(6.2.13)对任意的二次多项式都是精确的.

6.2.2 通过两次利用一阶导数的中心差分逼近推导(6.2.15).

6.2.3 推导二阶导数中心差分逼近的截断误差.

6.2.4 假设不知道(6.2.15)，但认为可以通过三个函数值$f(x_0-\Delta x)$，$f(x_0)$与$f(x_0+\Delta x)$的未知线性组合来逼近$\mathrm{d}^2f/\mathrm{d}x^2(x_0)$：

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} \approx af(x_0-\Delta x) + bf(x_0) + cf(x_0+\Delta x).$$

将其右端在x_0处利用(6.2.10)和(6.2.11)展开成泰勒级数，然后让两端直至$\mathrm{d}^2f/\mathrm{d}x^2(x_0)$项的系数相等，由此确定$a$，$b$，$c$的值.

228

6.2.5 导出$f'(x_0)$包括$f(x_0)$，$f(x_0 \pm \Delta x)$，$f(x_0 \pm 2\Delta x)$的最精确五点逼近. 截断误差的阶数是多少?

*6.2.6 导出对$\partial^2 u/\partial x \partial y$截断误差为$O(\Delta x)^2$的一个逼近.（提示：两次使用一阶偏导数的中心差分逼近.）

6.2.7 $1/2[f(x)+f(x+\Delta x)]$如何逼近$f(x+\Delta x/2)$(即截断误差是多少)?

6.3 热传导方程

6.3.1 概述

本小节引入求解有限区间$0<x<L$上一维无源热传导方程的有限差分数值法：

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) &= 0 \\ u(L,t) &= 0 \\ u(x,0) &= f(x). \end{aligned}} \tag{6.3.1}$$

6.3.2 偏差分方程

这里要用基于导数有限差分公式的逼近替代在点 $x=x_0$，$t=t_0$ 处的偏微分方程. 这种替代多种多样，但最终要知道为什么有些方法是好的，而有些方法是不好的. 任取$\partial u/\partial t$ 的时间前向差分

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0,t_0) = \frac{u(x_0,t_0+\Delta t)-u(x_0,t_0)}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_0,\eta_1),$$

其中 $t_0<\eta_1<t_0+\Delta t$. 对于空间导数，引入空间中心差分格式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,t_0) = \frac{u(x_0+\Delta x,t_0)-2u(x_0,t_0)+u(x_0-\Delta x,t_0)}{(\Delta x)^2} - \frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_1,t_0),$$

其中 $x_0<\xi_1<x_0+\Delta x$. 因而在任意 $x=x_0$，$t=t_0$ 处的热传导方程精确地化为

$$\frac{u(x_0,\ t_0+\Delta t)-u(x_0,\ t_0)}{\Delta t} = k\frac{u(x_0+\Delta x,\ t_0)-2u(x_0,\ t_0)+u(x_0-\Delta x,\ t_0)}{(\Delta x)^2}+E, \tag{6.3.2}$$

229

其中离散化(或截断)误差是

$$E = \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_0,\eta_1) - \frac{k(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_1,t_0). \tag{6.3.3}$$

由于 E 未知，就不能解(6.3.2). 然而忽略了截断误差就引入了逼近：

$$\frac{u(x_0,t_0+\Delta t)-u(x_0,t_0)}{\Delta t} \approx k\frac{u(x_0+\Delta x,t_0)-2u(x_0,t_0)+u(x_0-\Delta x,t_0)}{(\Delta x)^2}. \tag{6.3.4}$$

更确切地，引入 $\tilde{u}(x_0,\ t_0)$ 表示对精确解在 $x=x_0$，$t=t_0$ 处值 $u(x_0,\ t_0)$ 的逼近. 令逼近 $\tilde{u}(x_0,\ t_0)$ 精确地满足(6.3.4)，

$$\frac{\tilde{u}(x_0,\ t_0+\Delta t)-\tilde{u}(x_0,\ t_0)}{\Delta t} = k\frac{\tilde{u}(x_0+\Delta x,\ t_0)-2\tilde{u}(x_0,\ t_0)+\tilde{u}(x_0-\Delta x,\ t_0)}{(\Delta x)^2}. \tag{6.3.5}$$

$\tilde{u}(x_0,\ t_0)$ 是一个仅近似正确方程的精确解. 因此希望 $\tilde{u}(x_0,\ t_0)$ 精确地逼近所要求的解 $u(x_0,\ t_0)$.

方程(6.3.5)包含空间分离为 Δx 与时间分离为 Δt 的点，这样就引入了均匀网格 Δx 与常量离散时间 Δt. 时空图(见图 6.3.1)说明了初边值问题域上的网格和时间离散. 将长度为 L 的杆分为 N 等分，$\Delta x=L/N$，得到 $x_0=0$，$x_1=\Delta x$，$x_2=2\Delta x$，$\cdots$，$x_N=N\Delta x=L$. 一般地，



图 6.3.1 时—空离散化

$$\boxed{x_j = j\Delta x.} \tag{6.3.6}$$

同理，引入时间步长 Δt，有

230

$$\boxed{t_m = m\Delta t.} \tag{6.3.7}$$

网格点处的精确温度值 $u(x_j, t_m)$ 近似等于 $\tilde{u}(x_j, t_m)$，它满足(6.3.5)．引入下列记号：

$$\boxed{\tilde{u}(x_j,t_m) \equiv u_j^{(m)},} \tag{6.3.8}$$

表示(6.3.5)在时刻 t_m、第 j 个网格点处的精确解．在每个网格点 $x_0 = x_j$ 与每个时间点 $t_0 = t_m$ 处(除了时空边界)均满足方程(6.3.5)．注意，$x_0 + \Delta x$ 变为 $x_j + \Delta x = x_{j+1}$，$t_0 + \Delta t$ 变为 $t_m + \Delta t = t_{m+1}$，这样

$$\boxed{\frac{u_j^{(m+1)} - u_j^{(m)}}{\Delta t} = k\frac{u_{j+1}^{(m)} - 2u_j^{(m)} + u_{j-1}^{(m)}}{(\Delta x)^2},} \tag{6.3.9}$$

$j=1, \cdots, N-1$，m 从0开始．(6.3.9)称为*偏差分方程*．(6.3.3)给出了其局部截断误差，即 $O(\Delta t)$ 与 $O(\Delta x)^2$ 中较大的．由于当 $\Delta x \to 0$，$\Delta t \to 0$ 时，$E \to 0$，因此说，逼近(6.3.9)与偏微分方程(6.3.1)是相容的．

另外，要求在网格点上，$u_j^{(m)}$ 满足初值条件

$$u_j^{(0)} = u(x,0) = f(x) = f(x_j), \tag{6.3.10}$$

其中 $x_j = j\Delta x$，$j=0, \cdots, N$．类似地，$u_j^{(m)}$(在每个时间步)满足边界条件

$$u_0^{(m)} = u(0,t) = 0 \tag{6.3.11}$$

$$u_N^{(m)} = u(L,t) = 0. \tag{6.3.12}$$

若在初始时刻任何边界点处有物理的(因而有数学的)间断点，即可用不同的数值法来分析 $u_0^{(0)}$ 或 $u_N^{(0)}$．

6.3.3　计算

有限差分格式(6.3.9)包含四个点，三个在时刻 t_m，一个在超前时刻 $t_{m+1} = t_m + \Delta t$，如图6.3.2所示．通过解出 $u_j^{(m+1)}$ 就能“顺时向前”，在图6.3.2中以星号表示：

231

$$\boxed{u_j^{(m+1)} = u_j^{(m)} + s\left(u_{j+1}^{(m)} - 2u_j^{(m)} + u_{j-1}^{(m)}\right),} \tag{6.3.13}$$

其中 s 是一个无量纲参数．

$$\boxed{s = k\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}} \tag{6.3.14}$$

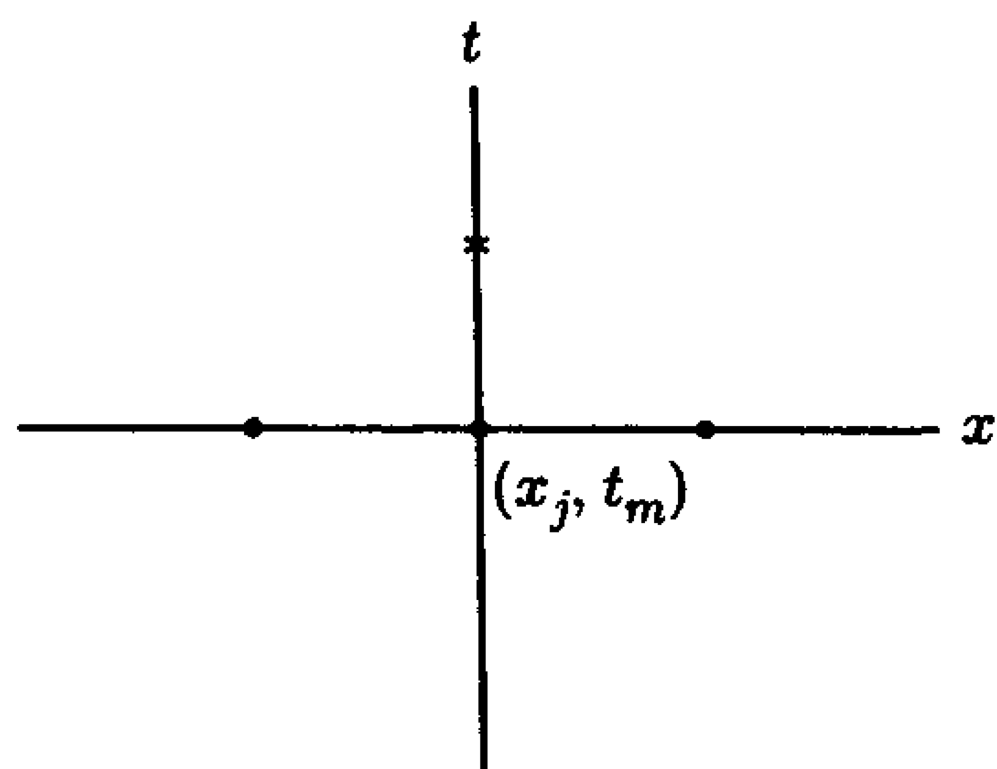


图6.3.2　顺时向前

$u_j^{(m+1)}$ 是前面指定的三个值的线性组合．由初值条件 $u_j^{(0)} =$

$f(x_j)$ $(j=1, \cdots, N-1)$开始计算. 然后(6.3.13)指定在时刻 Δt 的解 $u_j^{(1)}$, 如此继续地算下去. 对于靠近边界的网格点(即 $j=1$ 或 $j=N-1$), (6.3.13)要求在边界点($j=0$ 或 $j=N$)处的解. 可以从边界条件获得这些值. 这样就简单地数值求解了这个离散问题. 所提出的格式也很容易在计算机(或可编程计算器与符号计算程序)上编程实现.

扰动的传播速度. 作为一个简单例子, 假定初值条件除了在远离边界的某个内部网格点为 1 外, 其余全部为 0. 在第一个时间步, (6.3.13)表明解除了在初始非 0 网格点及其两个相邻点外, 在其余点均为 0. 这个过程的描述如图 6.3.3 所示. 星号表示非 0 值. 这个孤立的初始非 0 值以恒定速度传播(直至到达边界). 这个扰动以速度 $\Delta x/\Delta t$ 传播. 然而对于热传导方程来讲, 扰动以无穷大的速度在移动(见第 10 章). 从某种程度上讲, 此处的数值格式对热传导方程这种特性的逼近差强人意. 不过若将参数固定为 s, 则数值传播速度为

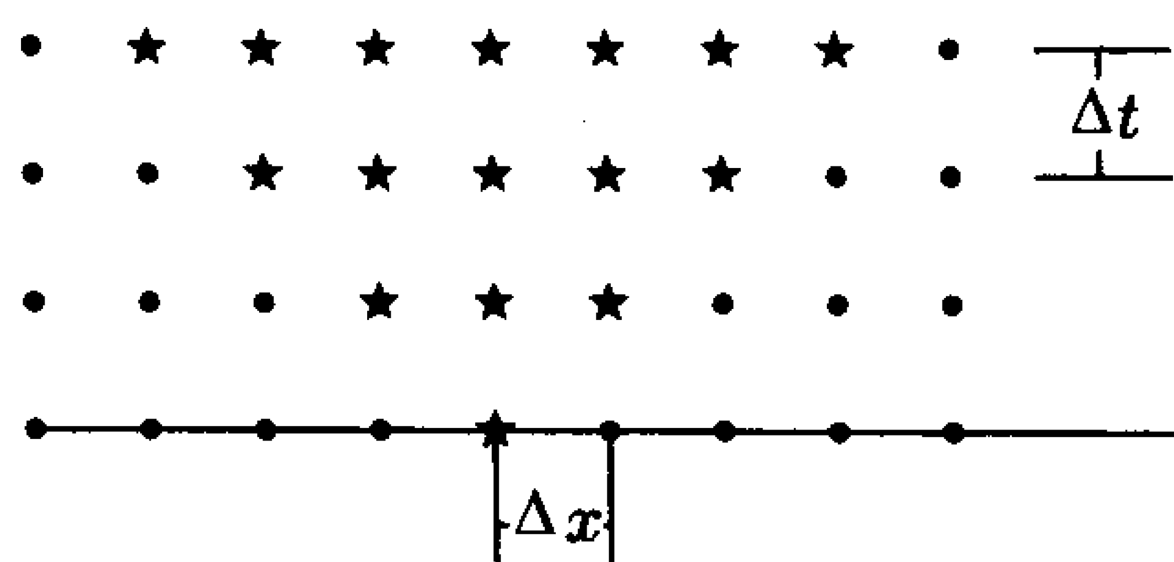


图 6.3.3 扰动的传播速度

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{k\Delta x}{s(\Delta x)^2}=\frac{k}{s\Delta x}.$$

当 $\Delta x\to 0$(s 固定)时, 该速度趋于期望值 ∞.

计算举例. 为了用(6.3.13)来计算, 必须指定 Δx 与 Δt. 很显然, Δx 与 Δt 越小, 解越精确. 当然, 局部截断误差会减小. 而减小 Δx 与 Δt 的明显弱点就是会导致数值计算时间(和费用)的增加. 这种权衡在数值计算中通常都要出现. 不过, 还有一个更严重的问题需要分析. 为指明这个问题, 要用(6.3.13)做计算. 首先, 必须选取 Δx 和 Δt, 固定 $\Delta x=L/10$ (九个内点和两个边点). 由于偏差分方程(6.3.13)主要依赖 $s=k\Delta t/(\Delta x)^2$, 取 Δt 使得 $s=1/4$ 与 $s=1$. 在这两种情形中都假设 $u(x,0)=f(x)$ 是如图 6.3.4 所示的初值条件, 以及零边界条件(6.3.11)与(6.3.12). 它由第 2 章所给出的精确解为 [232]

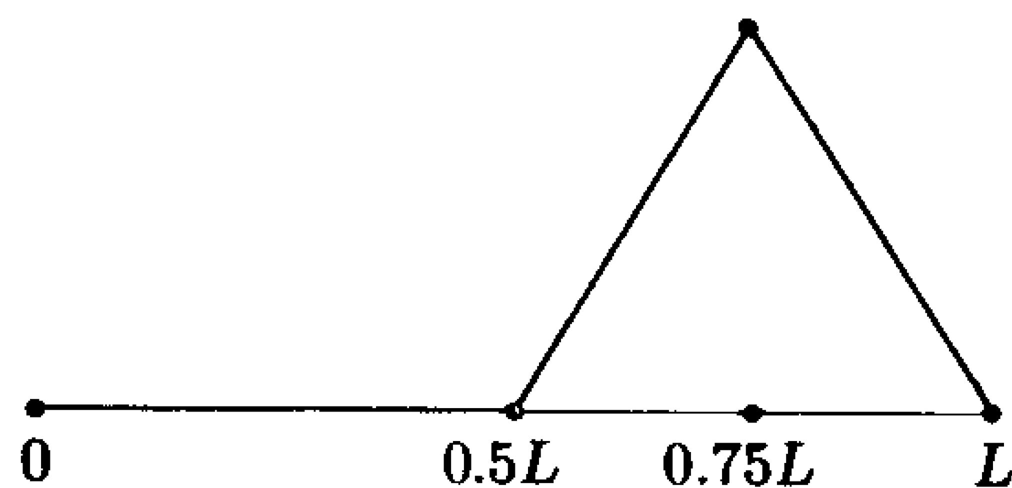
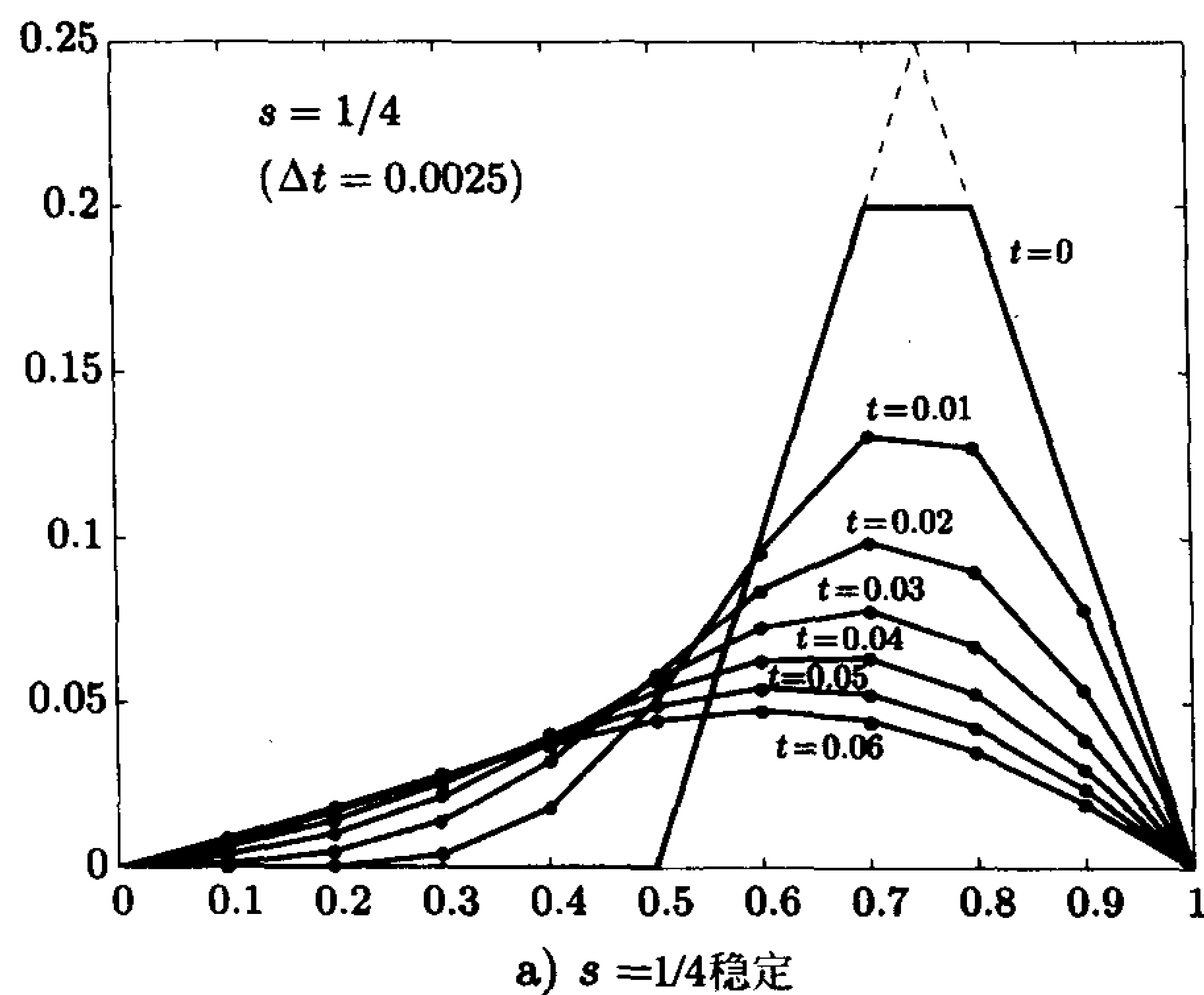


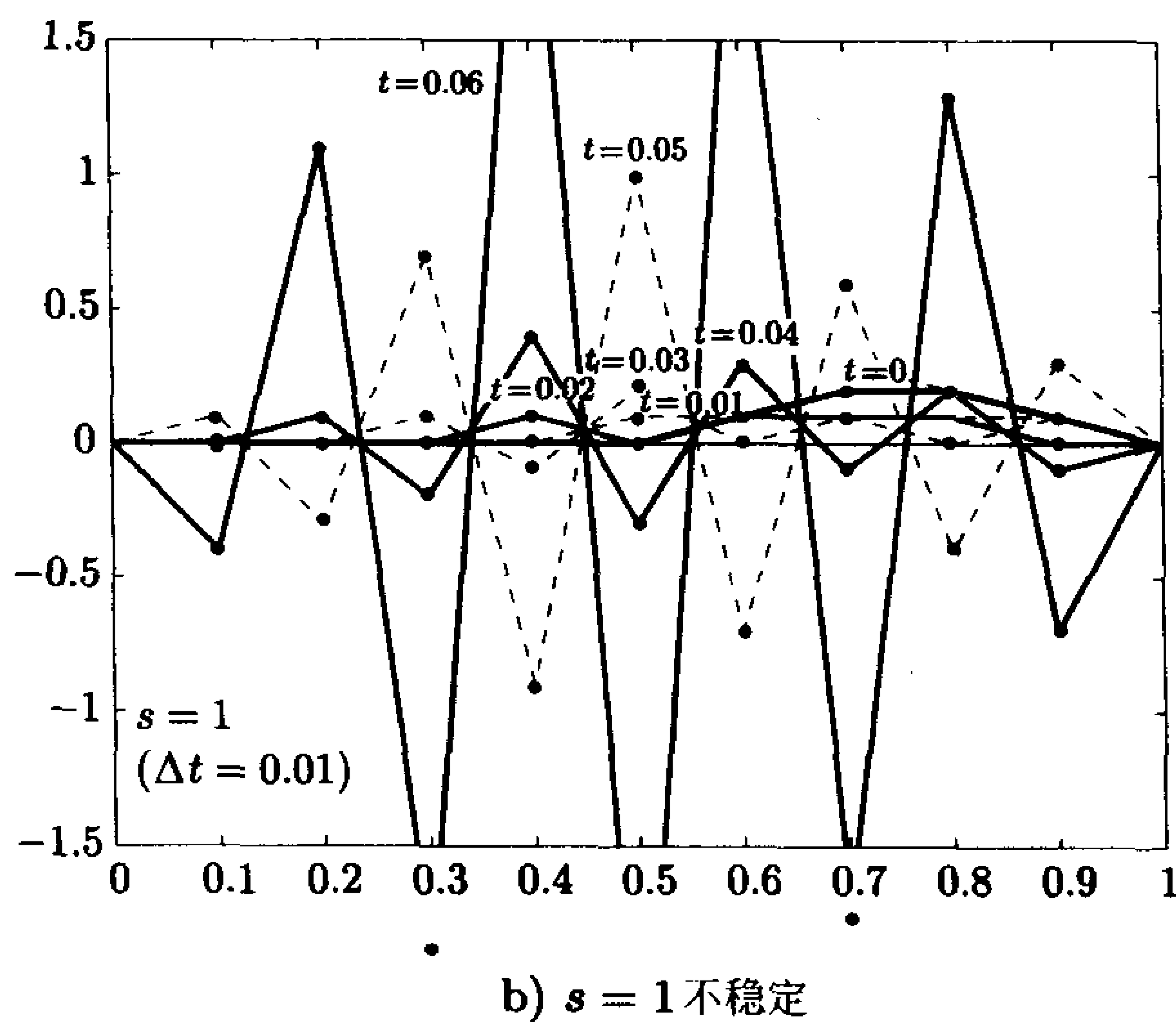
图 6.3.4 初值条件

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{L}e^{-k(n\pi/L)^2t} \\ a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \end{aligned} \tag{6.3.15}$$

上式表明, 解随时间依指数衰减, 并且对大 t 在空间上趋近简单的正弦形状($\sin\pi x/L$). 对 $s=1/4$ 与 $s=1$, 数值格式(6.3.13)的计算机计算结果绘制在图 6.3.5 中(用光滑曲线将固定 t 值对应的九个点连接起来). 对于 $s=1/4$, 这些结果看起来相当合理, 与精确解的定性分析一致. 而另一方面, 对于 $s=1$, (6.3.13)的解却是荒谬的. 最明显的问题是出现了负温度. 它的解随时间疯长并且关于空间和时间快速振荡, 但没有一种这样的现象是与热传导方程相联系的. 若 $s=1$, 有限差分逼近给出了不能用的结果. 下一小节再解释这些结果. 因此, 必须清楚如何选择 $s=k(\Delta t)/(\Delta x)^2$, 才能得到合理的数值解. [233]



a) s =1/4稳定



b) s = 1不稳定

234

图 6.3.5 热传导方程的计算结果 $s = k(\Delta t)/(\Delta x)^2$

6.3.4 傅里叶-冯·诺伊曼稳定性分析

引言. 本小节将分析热传导方程的有限差分方法，它对时间前向差分与对空间中心差分：

$$\text{pde}^{\ominus}: \boxed{u_j^{(m+1)} = u_j^{(m)} + s\left(u_{j+1}^{(m)} - 2u_j^{(m)} + u_{j-1}^{(m)}\right)} \quad (6.3.16)$$

$$\text{IC}: \boxed{u_j^{(0)} = f(x_j) = f_j} \quad (6.3.17)$$

⊖ 这里的 pde 表示偏差分方程.

$$\text{BC:}\boxed{\begin{aligned} u_0^{(m)} &= 0 \\ u_N^{(m)} &= 0, \end{aligned}} \tag{6.3.18}$$

其中 $s=k(\Delta t)/(\Delta x)^2$，$x_j=j\Delta x$，$t=m\Delta t$，希望 $u(x_j,\ t)\approx u_j^{(m)}$. 这里将讨论冯・诺伊曼 20 世纪 40 年代时基于傅里叶类型分析所提出的想法.

特征函数与乘积解. 6.3.5 节将证明，能够对偏差分方程应用分离变量法. 存在具有以下形式波数为 α 的特别乘积解

$$u_j^{(m)} = e^{i\alpha x}Q^{t/\Delta t} = e^{i\alpha j\Delta x}Q^m. \tag{6.3.19}$$

将(6.3.19)代入(6.3.16)并消去 $e^{i\alpha x}Q^m$，得到

$$Q = 1 + s(e^{i\alpha\Delta x} - 2 + e^{-i\alpha\Delta x}) = 1 - 2s[1 - \cos(\alpha\Delta x)]. \tag{6.3.20}$$

Q 对于正 α 与负 α 都是相同的. 这样便可以用 $e^{\pm i\alpha x}$ 的线性组合. 边界条件 $u_0^{(m)}=0$ 表明 $\sin\alpha x$ 是合适的，而 $u_N^{(m)}=0$ 表明 $\alpha=n\pi/L$. 因而存在方程(6.3.16)满足条件(6.3.18)如下形式的解:

$$\boxed{u_j^{(m)} = \sin\frac{n\pi x}{L}Q^{t/\Delta t},} \tag{6.3.21}$$

其中 Q 由(6.3.20)确定,

$$\boxed{Q = 1 - 2s\left[1 - \cos\left(\frac{n\pi\Delta x}{L}\right)\right],} \tag{6.3.22}$$

235

而 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ N-1$，下面将对此作出解释. 对于偏微分方程，存在无穷多个特征函数($\sin n\pi x/L$, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$). 而且下面还将证明，对于偏差分方程，仅有 $N-1$ 个无关的特征函数($\sin n\pi x/L$, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ N-1$):

$$\phi_j = \sin\frac{n\pi x}{L} = \sin\frac{n\pi j\Delta x}{L} = \sin\frac{n\pi j}{N}, \tag{6.3.23}$$

(此时)它们与偏微分方程的特征函数相同. 例如，对于 $n=N$，对任意 j 都有 $\phi_j=\sin\pi j=0$. 此外，$n=N+1$ 的 ϕ_j 与 $n=N-1$ 的 ϕ_j 等价，这是因为

$$\sin\frac{(N+1)\pi j}{N} = \sin\left(\frac{\pi j}{N} + j\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi j}{N} - j\pi\right) = -\sin\frac{(N-1)\pi j}{N}.$$

图 6.3.6 中绘出了部分这种"特征函数"($N=10$). 由于离散性，偏差分方程的解仅由 $N-1$ 个波组成. 这些波的数量等于独立网格点(端点除外)数. 波长最短的波是

$$\sin\frac{(N-1)\pi x}{L} = \sin\frac{(N-1)\pi j}{N} = (-1)^{j+1}\sin\frac{\pi j}{N},$$

它在各点交替变化符号. 由叠加原理得到通解，引入 $N-1$ 个常数 β_n:

$$u_j^{(m)} = \sum_{n=1}^{N-1}\beta_n\sin\frac{n\pi x}{L}\left[1 - 2s\left(1 - \cos\frac{n\pi}{N}\right)\right]^{t/\Delta t}, \tag{6.3.24}$$

其中

$$s = \frac{k\Delta t}{(\Delta x)^2}.$$

利用特征函数 $\sin n\pi j/N$ 的离散正交性，这些系数可以通过 $N-1$ 个初值条件确定. 对离散傅里叶级数的分析在习题 6.3.3 和习题 6.3.4 中再进行讨论.

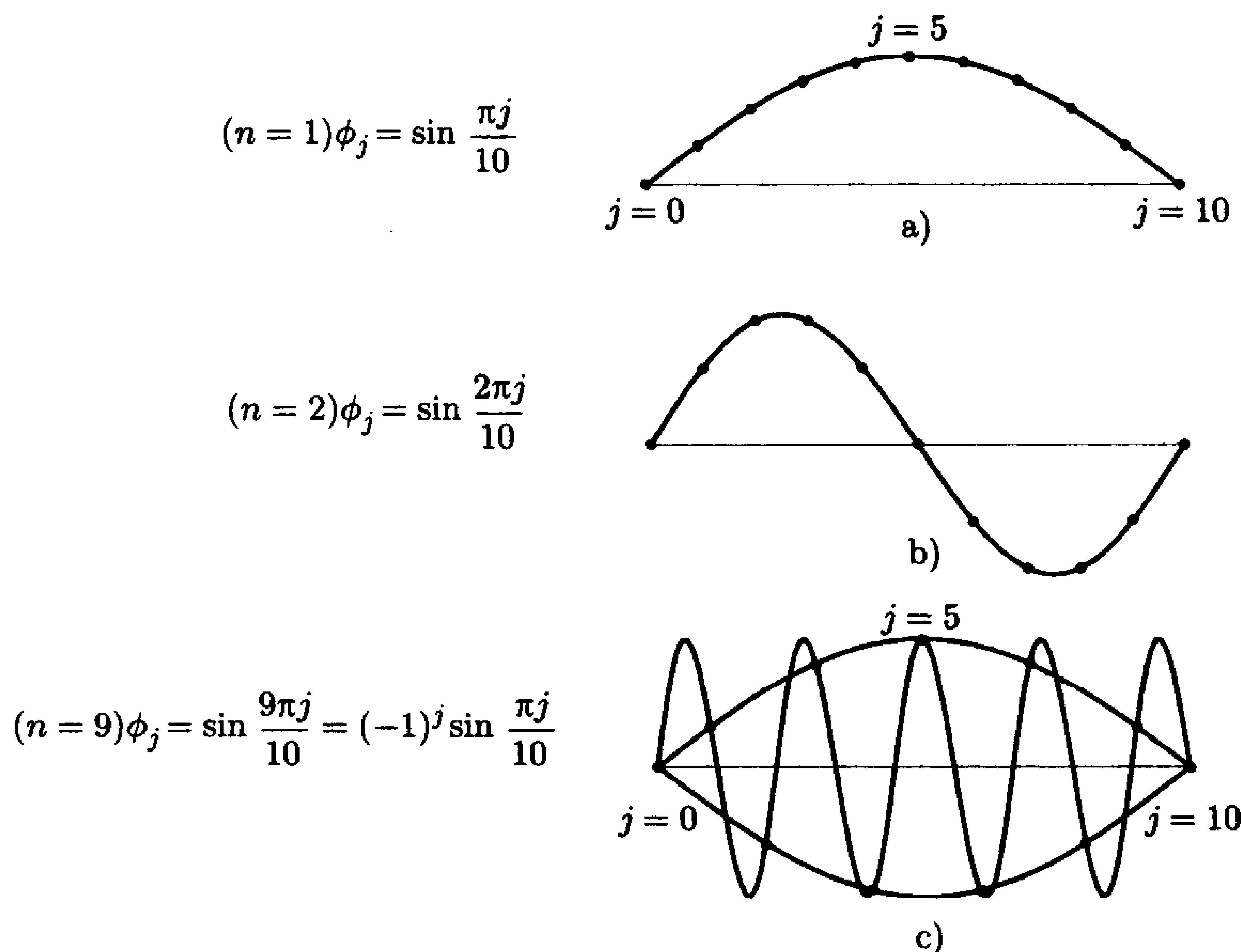


图 6.3.6　离散问题的特征函数

与偏微分方程的比较. 可以比较偏差分方程的乘积解 $u_j^{(m)}$ 和偏微分方程的乘积解 $u(x,\ t)$：

$$\boxed{\begin{aligned} u_j^{(m)} &= \sin\frac{n\pi x}{L}\left[1-2s\left(1-\cos\frac{n\pi}{N}\right)\right]^{t/\Delta t} \\ u(x,t) &= \sin\frac{n\pi x}{L}e^{-k(n\pi/L)^2 t} \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} n &= 1,2,\cdots,N-1 \\ n &= 1,2,\cdots \end{aligned}$$

其中 $s=k(\Delta t)/(\Delta x)^2$. 对于偏微分方程，每个波都依指数 $e^{-k(n\pi/L)^2 t}$ 衰减. 对于偏差分方程，时间相关部分(对应于空间部分 $\sin n\pi x/L$)是

$$Q^m = \left[1-2s\left(1-\cos\frac{n\pi}{N}\right)\right]^{t/\Delta t}. \tag{6.3.25}$$

稳定性. 若 $Q>1$，就有随时间指数阶的增长，若 $0<Q<1$，就出现指数阶衰减，$Q=1$ 时，解不变. 此外，也可能存在解随时间收敛振荡($-1<Q<0$)、纯振荡($Q=-1$)和发散振荡($Q<-1$). 6.3.5 节将讨论这些可能性并作图示. Q 的取值将决定稳定性. 若对所有的解都有 $|Q|\leqslant 1$，则称数值格式是稳定的，反之，称之为不稳定的.

再来分析 $Q^m=Q^{t/\Delta t}$，其中 $Q=1-2s(1-\cos n\pi/N)$. 这里 $Q\leqslant 1$，解不会随时间作纯指数增长. 不过，解可以收敛，或发散振荡，以及指数阶衰减. 我们并不希望数值格式随着时间发散振荡[⊖]. 如果 s 太大，则 Q 会变得太负.

236~237

由于 $Q\leqslant 1$，若 $Q\geqslant -1$，解是"稳定的". 要稳定，就需要 $1-2s(1-\cos n\pi/N)\geqslant -1$，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ N-1$，或者等价地

⊖ 收敛振荡没有重复偏微分方程解的性态. 不过，至少它们衰减. 因此，一般可容忍振荡衰减项.

$$s \leqslant \frac{1}{1-\cos n\pi/N}, \quad n=1,2,3,\cdots,N-1.$$

为了稳定性，s 必须小于或等于最小的，$n=N-1$，

$$s \leqslant \frac{1}{1-\cos(N-1)\pi/N}.$$

为了简化判别准则，注意到 $1-\cos(N-1)\pi/N<2$，就有若 $s\leqslant 1/2$，数值解一定是稳定的：

$$s \leqslant \frac{1}{2} < \frac{1}{1-\cos(N-1)\pi/N}. \tag{6.3.26}$$

实际中，若 s 比 1/2 大很多，就不能稳定，因为 $\cos(N-1)\pi/N=-\cos\pi/N$，所以对于大 N 有 $1-\cos(N-1)\pi/N\approx 2$.

若 $s>1/2$，对某些 n 通常(不一定)有 $Q<-1$. 数值解就会有发散振荡，称之为数值不稳定性. 若 $s>1/2$，增长最快的解对应于空间的快速振荡($n=N-1$). **数值不稳定性的特点是，对空间的快速振荡($n=N-1$)解随时间发散振荡($Q<-1$)**. 一般来说，若观察到计算机有这种形式的输出，数值格式大概就是不稳定的，因而不可靠，这也正是在 $s=1$ 时所看到的数值结果. 当 $s=1/4$ 时，解的表现相当合理. 然而当 $s=1$ 时，解随时间发散振荡，对空间快速变化.

由于 $s=k\Delta t/(\Delta x)^2$，限制条件 $s\leqslant 1/2$ 说的是

$$\Delta t \leqslant \frac{\frac{1}{2}(\Delta x)^2}{k}. \tag{6.3.27}$$

这是对数值计算加的实用约束条件. 时间步长 Δt 一定不能太大(否则格式变得不稳定). 事实上，由于 Δx 必须很小(为了计算精确)，(6.3.27)证明了时间步长必须非常小. 因此，热传导方程的向前时间，空间中心差分方程逼近在使用上代价有些高.

为了最小化计算量，要使 Δt 尽可能大(保持稳定性). $s=1/2$ 就很好，此时偏差分方程为

$$u_j^{(m+1)} = \frac{1}{2}\left[u_{j+1}^{(m)} + u_{j-1}^{(m)}\right].$$

Δt 时间之后的温度就是左边温度和右边温度平均. 238

收敛性. 作为对差分方程与微分方程进一步的一般对比，考虑偏差分方程的解当 $\Delta x\to 0(N\to\infty)$ 与 $\Delta t\to 0$ 时的极限. 要证明，当 $n/N\ll 1$ 时(如同固定 n 而让 $N\to\infty$)，离散化的时间相关部分收敛于热传导方程的相应部分. 若 $n/N\ll 1$，由其泰勒级数 $\cos n\pi/N\approx 1-1/2(n\pi/N)^2$，因此有

$$Q^{t/\Delta t} \approx \left[1-s\left(\frac{n\pi}{N}\right)^2\right]^{t/\Delta t} = \left[1-k\Delta t\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right]^{t/\Delta t}, \tag{6.3.28}$$

其中 $N=L/\Delta x$. 所以，当 $\Delta t\to 0$ 时有

$$Q^{t/\Delta t} \to \mathrm{e}^{-k(n\pi/L)^2 t}, \tag{6.3.29}$$

这是由于 e 可以定义为 $\mathrm{e}=\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{1/z}$. 若 $n/N\ll 1$，经过更仔细的分析(对(6.3.28)取对数)，可以证明 $Q^m-\exp(-k(n\pi/L)^2 t)=O(\Delta t)$. 它一般是对固定 s 计算的. 为了改进计算，将 Δx 减半(Δt 为原来的四分之一). 因此，当 s 固定，$n/N\ll 1$ 时，如果离散化步长 Δx 减半(时间步长减小为原来的 1/4)，则数值误差(x 与 t 固定)会减小为原来的 1/4. 当然所有的计算都应当

在 s 满足稳定性条件时进行.

然而，若 n/N 不够小，则实际计算时会出现困难. 这些是偏差分方程的空间强烈振荡解. 对于热传导方程来讲，这些波是唯一导致计算困难的波.

拉克斯等价性定理. 收敛与稳定性的关系可作推广. 拉克斯等价定理说的是，对于适定的依赖时间的线性偏微分方程的相容有限差分逼近，数值格式稳定就收敛，并且收敛就稳定.

一个简化的稳定性条件判定准则. 快速地分析一个数值法的稳定性常常是很方便的. 从前面(基于分离变量法)的分析，证明了差分方程有对 x 振荡的特殊类型解：

$$u_j^{(m)} = e^{i\alpha x} Q^{t/\Delta t}, \tag{6.3.30}$$

其中

$$x = j\Delta x \quad 和 \quad t = m\Delta t.$$

α 为边界条件所限制. 通常为了简化稳定性分析而忽略边界条件，允许 α 取任意值[⊖]. 此时，若$s \leqslant 1/2$，由(6.3.20)就得到稳定性.

239

随机游动. 偏差分方程(6.3.16)可以写为以下形式：

$$u_j^{(m+1)} = s u_{j-1}^{(m)} + (1-2s) u_j^{(m)} + s u_{j+1}^{(m)}. \tag{6.3.31}$$

在其稳定区域内，$s \leqslant 1/2$；这可以解释为称作随机游动的概率问题. 考虑一个"醉汉"，在单位时间 Δt 内，或者不动，或者随机地向左或向右走一步 Δx. 显然无法精确地知道醉汉将在哪儿. 设 $u_j^{(m)}$ 是时刻 $m\Delta t$ 醉汉在位置 j 的概率. 假设他在时间 Δt 内向左移动或向右移动 Δx 的可能性相等，其概率为 s. 注意，做这样的解释，s 必须小于或等于 1/2. 他在时刻 Δt 内的移动不能超过Δx，这样他原地不动的概率为 $1-2s$. 他在下一时刻$(m+1)\Delta t$ 在 $j\Delta x$ 处的概率由(6.3.31)给出：它是三个可能事件的概率和. 例如，这个人前一时刻在那儿的概率为 $u_j^{(m)}$，并且不动的概率为$1-2s$；这个复合事件的概率为$(1-2s)u_j^{(m)}$. 此外，他还可能以概率 $u_{j-1}^{(m)}$ 在左边一步处(或以概率 $u_{j+1}^{(m)}$ 在右边一步处)，以概率 s 向适当的方向移动一步.

对于稳定计算 $s=1/2$ 的最大时间步长，对应随机游动问题，其中站立不动的概率为 0. 如果确切知道初始位置，则

$$u_j^{(0)} = \begin{cases} 1 & j = 初始已知位置 \\ 0 & j = 其他位置 \end{cases}$$

所以说，醉汉以概率 1/2 向左或向右移动. 这样由帕斯卡三角形给出了二项式概率分布(见图 6.3.7).

240

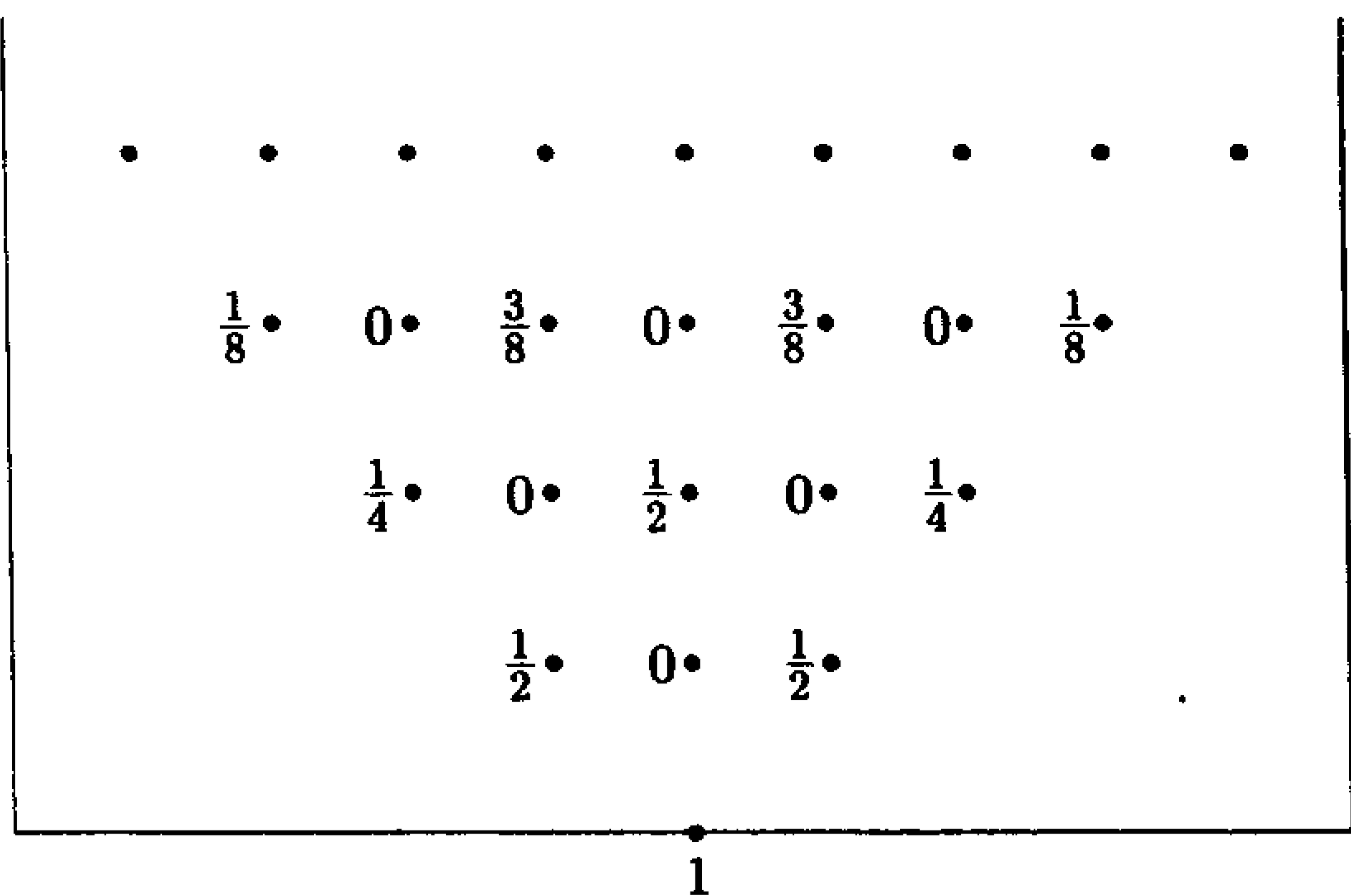


图 6.3.7 帕斯卡三角形

6.3.5 偏差分方程的分离变量和常差分方程的解析解

偏差分方程可以用与偏微分方程同样的步骤分析来分析—分离变量. 假设(6.3.16)有如下形式的乘积解：

⊖ 对稳定性的进一步分析可知，仅当波长很短时才会出现不稳定波. 也许期望边界对于这些波没有什么影响.

$$\boxed{u_j^{(m)} = \phi_j h_m.} \tag{6.3.32}$$

将(6.3.32)[⊖]代入(6.3.16)可得

$$\phi_j h_{m+1} = \phi_j h_m + s(\phi_{j+1} h_m - 2\phi_j h_m + \phi_{j-1} h_m).$$

用 $\phi_j h_m$ 去除等式两边，分离变量：

$$\frac{h_{m+1}}{h_m} = 1 + s\left(\frac{\phi_{j+1} + \phi_{j-1}}{\phi_j} - 2\right) = + \lambda,$$

其中 λ 是分离常数.

这样偏差分方程给出两个常差分方程. 离散时间的差分方程是一阶的(包含一个差分)

$$\boxed{h_{m+1} = + \lambda h_m.} \tag{6.3.33}$$

分离常数 λ(如偏微分方程中一样)由边值问题确定，这里是一个二阶差分方程，

$$\boxed{\phi_{j+1} + \phi_{j-1} = -\left(\frac{-\lambda + 1 - 2s}{s}\right)\phi_j,} \tag{6.3.34}$$

满足两个由(6.3.18)给定的齐次边界条件：

$$\phi_0 = 0 \tag{6.3.35}$$

$$\phi_N = 0. \tag{6.3.36}$$

一阶差分方程. 诸如(6.3.33)类的一阶线性常系数齐次差分方程是容易分析的. 考虑

$$h_{m+1} = \lambda h_m, \tag{6.3.37}$$

其中 λ 是常数. 注意到

$$h_1 = \lambda h_0, h_2 = \lambda h_1 = \lambda^2 h_0, \text{等等}.$$

241

这样，解就是

$$h_m = \lambda^m h_0, \tag{6.3.38}$$

其中 h_0 是一阶差分方程的初值条件.

获得(6.3.38)的另一种方法是，假设存在形式为 $h_m = Q^m$ 的齐次解. 将其代入(6.3.37)得 $Q^{m+1} = \lambda Q^m$ 或 $Q = \lambda$，就重新导出(6.3.38). 这后一种技巧和将 e^{rt}代入常系数齐次微分方程的技巧类似.

(6.3.38)对于各种 λ 值的解绘制在图 6.3.8 中. 注意到，若 $\lambda > 1$，解依指数增长(由于 $m = t/\Delta t$，所以 $\lambda^m = e^{m\log\lambda} = e^{(\log\lambda/\Delta t)t}$). 若 $0 < \lambda < 1$，解依指数衰减. 进一步讲，若 $-1 < \lambda < 0$，解会振荡(且依指数)地衰减，称为*收敛振荡*. 另一方面，若 $\lambda < -1$，解有*发散振荡*.

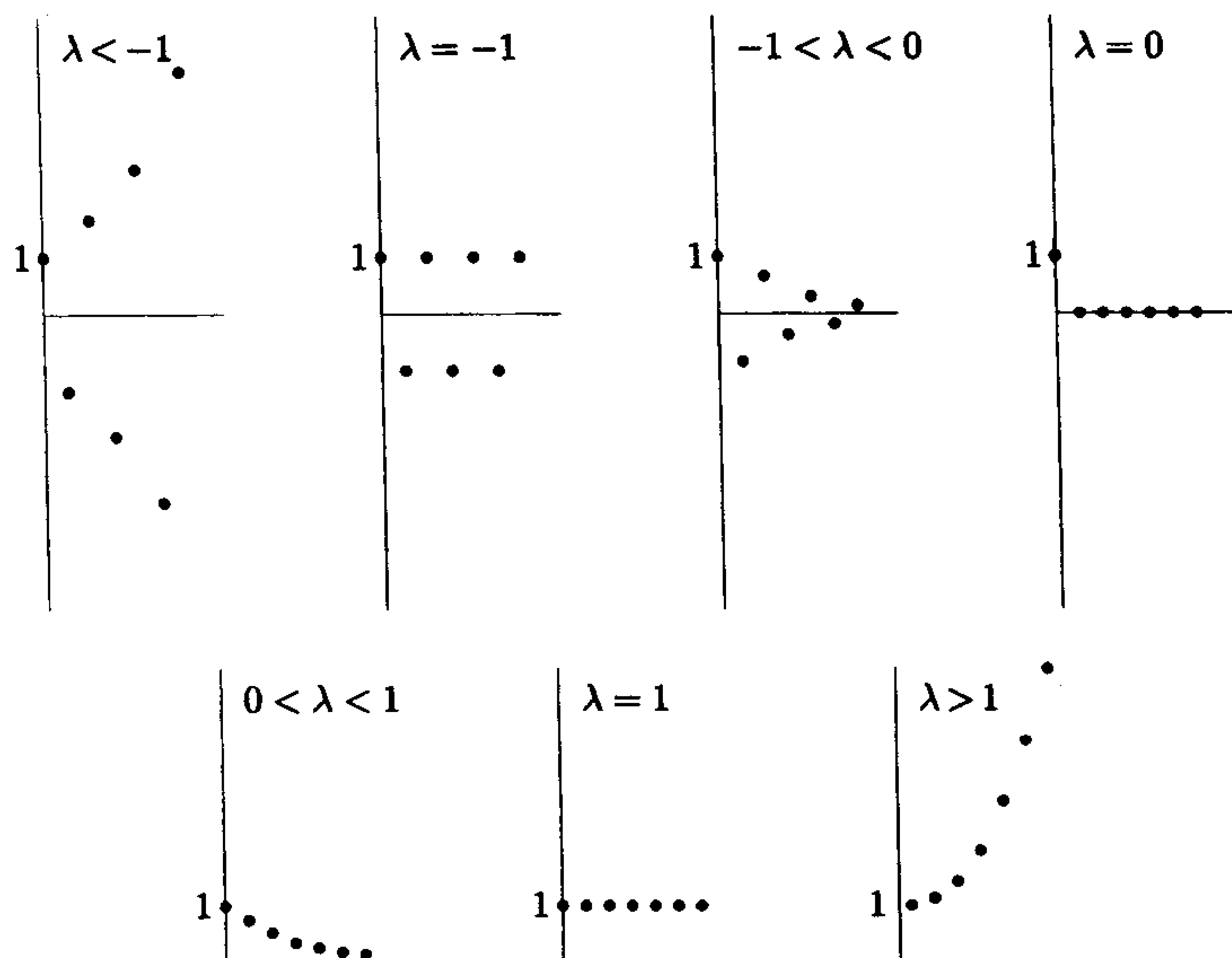
在某些情况下，还允许 λ 是复数. 用复数的极坐标形式，$\lambda = re^{i\theta}$，$r = |\lambda|$ 和 $\theta = \arg\lambda$，得到

$$\lambda^m = r^m e^{im\theta} = |\lambda|^m(\cos m\theta + i\sin m\theta). \tag{6.3.39}$$

例如，实部是 $|\lambda|^m \cos m\theta$. 作为 m 的函数，λ^m 以周期 $m = 2\pi/\theta = 2\pi/\arg\lambda$ 振荡. 若 $|\lambda| > 1$，解随离散时间增长，若 $|\lambda| < 1$，则解随离散时间衰减.

总之(包括复数情况)，若 $|\lambda| \leqslant 1$，在 m 增加(t 增加)时，$h_{m+1} = \lambda h_m$ 的解 λ^m 保持有界. 若 $|\lambda| > 1$，解增大.

⊖ 原书为(6.3.19). ——译者注



242

图 6.3.8　一阶差分方程的解

二阶差分方程. 差分方程(6.3.34)为常系数(因为$(-\lambda+1-2s)/s$与步长j不相关)方程. 因此容易求得其解析解. 与解一阶差分方程一样(见(6.3.38)), 对常系数差分方程, 其齐次解可由代入$\phi_j=Q^j$求得.

边界条件$\phi_0=\phi_N=0$, 说明解可能会振荡. 若Q是满足$|Q|=1$的复数, 此时, 等价代换是

$$\phi_j = (|Q|e^{i\theta})^j = e^{i\theta j} = e^{i\theta(x/\Delta x)} = e^{i\alpha x}, \tag{6.3.40}$$

这是由于$j=x/\Delta x$, 定义$\alpha=\theta/\Delta x=(\arg Q)/\Delta x$. 习题 6.3.2 会证明由(6.3.34)可得$|Q|=1$, 这样(6.3.40)就可能被用到. 将(6.3.40)带入(6.3.34)给出波数α满足的方程

$$e^{i\alpha\Delta x}+e^{-i\alpha\Delta x}=\frac{\lambda-1+2s}{s},$$

或者等价地

$$\boxed{2\cos(\alpha\Delta x)=\frac{\lambda-1+2s}{s}.} \tag{6.3.41}$$

该式给出α的两个值(互为相反数), 这样便可以利用$e^{\pm i\alpha x}$的线性组合而不用$\phi_j=e^{i\alpha x}$, 或者利用

$$\phi_j = c_1\sin\alpha x + c_2\cos\alpha x. \tag{6.3.42}$$

边界条件$\phi_0=\phi_N=0$确定了$c_2=0$, $\alpha=n\pi/L$, $n=1, 2, 3, \cdots$. 这就得到

$$\boxed{\phi_j=\sin\frac{n\pi x}{L}=\sin\frac{n\pi j\Delta x}{L}=\sin\frac{n\pi j}{N}.} \tag{6.3.43}$$

进一步的分析可按照前一小节的方式讨论.

6.3.6 矩阵记号

矩阵[⊖]记号对于分析偏微分方程的离散化常常是方便的. 对于固定的 t, $u(x, t)$仅是 x 的函数. 它的离散化 $u_j^{(m)}$(每个时间步)定义在 $N+1$ 个网格点上. 这里引入 $N+1$ 维向量 u, 它在每个时间步都会改变. 它是 m 的函数, $u^{(m)}$. $u^{(m)}$ 的第 j 个分量就是 $u(x, t)$在第 j 个网格点的值:

$$(u^{(m)})_j = u_j^{(m)}. \tag{6.3.44}$$

243

偏差分方程为

$$u_j^{(m+1)} = u_j^{(m)} + s\left(u_{j+1}^{(m)} - 2u_j^{(m)} + u_{j-1}^{(m)}\right). \tag{6.3.45}$$

如果应用边界条件 $u_0^{(m)} = u_N^{(m)} = 0$, 则有

$$u_1^{(m+1)} = u_1^{(m)} + s\left(u_2^{(m)} - 2u_1^{(m)} + u_0^{(m)}\right) = (1-2s)u_1^{(m)} + su_2^{(m)}.$$

对于 $u_{N-1}^{(m+1)}$也有类似的方程. 在每个时间步有 $N-1$ 个未知量. 引入 $N-1 \times N-1$ 阶三对角阵 A, 它除了主对角线(元素为 $1-2s$)及与其相邻的两个对角线(元素为 s)外, 其余的元素均为 0.

$$A = \begin{bmatrix} 1-2s & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & 1-2s & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 1-2s & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & 1-2s & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & 1-2s & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & 1-2s \end{bmatrix}. \tag{6.3.46}$$

偏差分方程变为如下的向量方程:

$$u^{(m+1)} = Au^{(m)}. \tag{6.3.47}$$

向量 u 以直接的方式改变, 由初值条件 $u^{(0)}$, 直接计算可得:

$$u^{(1)} = Au^{(0)}$$

$$u^{(2)} = Au^{(1)} = A^2u^{(0)},$$

这样,

$$u^{(m)} = A^m u^{(0)}. \tag{6.3.48}$$

矩阵 A 取 m 次幂表示初值条件是如何影响第 m 时间步的解的($t = m\Delta t$).

为了理解这个解, 引入矩阵 A 的特征值 μ, 即使得方程有非平凡向量解 ξ 的 μ 值:

$$A\xi = \mu\xi. \tag{6.3.49}$$

特征值满足

$$\det[A - \mu I] = 0, \tag{6.3.50}$$

其中 I 是单位矩阵. 满足(6.3.49)的非平凡向量 ξ 称为对应于 μ 的特征向量. A 是$(N-1) \times (N-1)$阶矩阵, 因此有 $N-1$ 个特征值. 不过有些特征值不是相异的, 可能会有重特征值(或

⊖ 本节需要一些线性代数方面的知识.

244 退化). 对于一个相异的特征值，有唯一的特征向量(在不计常量倍的意义下)；而对于多重(k 重)特征值，至多有 k 个线性无关的特征向量. 如果有某个 k 重特征值对应的特征向量少于 k 个，就说该矩阵是亏损的. 如果矩阵 A 是实对称的(如(6.3.46))，则所有的多重特征值都不是亏损的. 这样矩阵 A 有 $N-1$ 个(线性无关的)特征向量. 另外，若 A 是实对称矩阵，则特征值(以及特征向量)是实的并且特征向量是正交的(见5.5节附录). 设 μ_n 是第 n 个特征值，ξ_n 为与其对应的特征向量.

可以使用特征向量展开法求解向量方程(6.3.47)(等价于偏差分方程). (这个技巧与用特征函数展开式求解偏微分方程是类似的.)任一向量都可以展成特征向量的级数：

$$u^{(m)} = \sum_{n=1}^{N-1} c_n^{(m)} \xi_n. \tag{6.3.51}$$

特征向量随 m(时间)变化，因而常数 $c_n^{(m)}$ 依赖于 m(时间)

$$u^{(m+1)} = \sum_{n=1}^{N-1} c_n^{(m+1)} \xi_n. \tag{6.3.52}$$

不过由(6.3.47)得到

$$u^{(m+1)} = Au^{(m)} = \sum_{n=1}^{N-1} c_n^{(m)} A\xi_n = \sum_{n=1}^{N-1} c_n^{(m)} \mu_n \xi_n, \tag{6.3.53}$$

上式用到了(6.3.51)与(6.3.49). 比较(6.3.52)与(6.3.53)，得到 $c_n^{(m)}$ 的常系数一阶差分方程：

$$c_n^{(m+1)} = \mu_n c_n^{(m)}. \tag{6.3.54}$$

容易由其求解得到

$$c_n^{(m)} = c_n^{(0)} (\mu_n)^m, \tag{6.3.55}$$

因此有

$$\boxed{u^{(m)} = \sum_{n=1}^{N-1} c_n^{(0)} (\mu_n)^m \xi_n.} \tag{6.3.56}$$

$c_n^{(0)}$ 可由初值条件确定.

从(6.3.56)可知，随着 t 的增加(m 的增加)，解的增长取决于 $(\mu_n)^m$，其中 $m = t/\Delta t$，μ_n 是实数，

245

$$(\mu_n)^m = \begin{cases} \text{指数增长} & \mu_n > 1 \\ \text{指数衰减} & 0 < \mu_n < 1 \\ \text{收敛振荡} & -1 < \mu_n < 0 \\ \text{发散振荡} & \mu_n < -1. \end{cases}$$

如果某个特征值 $\mu_n > 1$ 或 $\mu_n < -1$，则数值解是不稳定的.

下面求 A 的 $N-1$ 个特征值 μ：

$$A\xi = \mu\xi. \tag{6.3.57}$$

令 ξ_j 是 ξ 的第 j 个分量. 因为 A 是由(6.3.46)给定，所以可以将(6.3.57)改写为

$$s\xi_{j+1} + (1-2s)\xi_j + s\xi_{j-1} = \mu\xi_j, \tag{6.3.58}$$

其中

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_N = 0. \tag{6.3.59}$$

方程(6.3.58)等价为

$$\xi_{j+1} + \xi_{j-1} = \left(\frac{\mu + 2s - 1}{s}\right)\xi_j. \tag{6.3.60}$$

比较(6.3.60)与(6.3.34)就看出，A 的特征值 μ 分离变量得到二阶差分方程的特征值 λ. 因此有(见(6.3.20))

$$\mu = 1 - 2s(1 - \cos(\alpha\Delta x)), \tag{6.3.61}$$

其中 $\alpha = n\pi/L$, $n = 1, 2, \cdots, N-1$. 正如前面所讲的，$s > 1/2$ 时，格式通常是不稳定的. 总之，在这种简单情形下，特征值可以用傅里叶型分析显式地求出来.

在更难的问题当中，大型矩阵的特征值就很少能求得. 有时格什戈林圆周定理(证明参见 Strang[1993])是很有用的：A 的每个特征值至少在复平面上的圆 $C_1, \cdots, C_{N-1}$ 中的一个内，C_i 的圆心为第 i 个对角线元素，半径为该行其余元素绝对值之和. 若 a_{ij} 是 A 的元素，则所有特征值 μ 至少在下列的一个圆中：

$$|\mu - a_{ii}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{N-1} |a_{ij}|. \tag{6.3.62}$$

对于这里的矩阵 A，对角线元素均为 $1-2s$，该行其余元素之和为 $2s$(除首、尾行的和为 s 外). 因此，两个圆为 $|\mu - (1-2s)| < s$，另外 $N-3$ 个圆为

$$|\mu - (1 - 2s)| < 2s. \tag{6.3.63}$$

所有的特征值都在所得到的区域中((6.3.63)给出了其中最大的). 由于特征值 μ 是实数，图 6.3.9 表明

$$1 - 4s \leqslant \mu \leqslant 1.$$

若 $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$，就保证了稳定性，这样，若 $s \leqslant 1/2$，格什戈林圆周定理证明了数值格式是稳定的. 若 $s > 1/2$，格什戈林圆周定理证明不了格式是不稳定的.

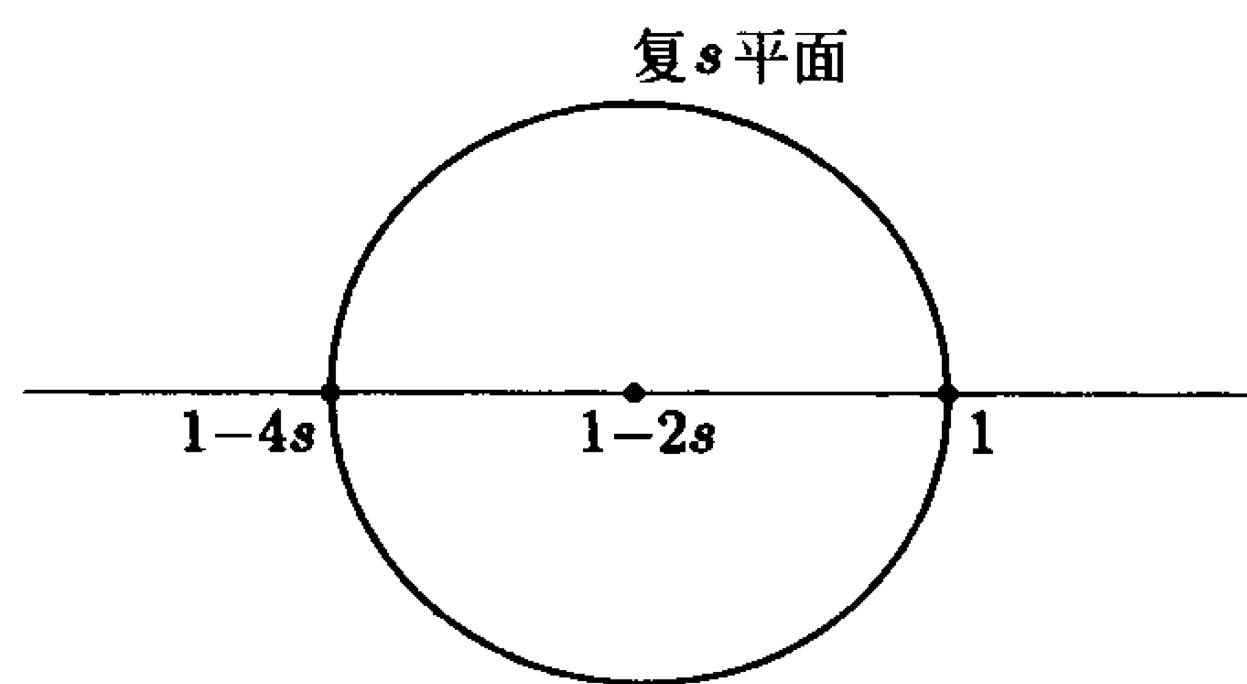


图 6.3.9　对应于热传导方程离散化矩阵 A 的格什戈林圆

246

6.3.7　非齐次问题

有源热传导方程可用同样的方法计算. 考虑

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t)$$

$$u(0,t) = A(t)$$

$$u(L,t) = B(t)$$

$$u(x,0) = f(x).$$

与前面一样，使用时间前向差分与空间中心差分，就得到下面的数值逼近：

$$\frac{u_j^{(m+1)} - u_j^{(m)}}{\Delta t} = \frac{k}{(\Delta x)^2}\left(u_{j+1}^{(m)} - 2u_j^{(m)} + u_{j-1}^{(m)}\right) + Q(j\Delta x, m\Delta t)$$

$$u_0^{(m)} = A(m\Delta t)$$

$$u_N^{(m)} = B(m\Delta t)$$

$$u_j^{(0)} = f(j\Delta x).$$

解出 $u_j^{(m+1)}$ 就容易计算这个解. 可以断定，对于齐次问题稳定性分析的结论，对于非齐次问题同样也成立. 这样就要在 $s = k\Delta t/(\Delta x)^2 \leqslant 1/2$ 的限制下，进行计算.

6.3.8 其他数值格式

如果 $s = k\Delta t/(\Delta x)^2 \leqslant 1/2$，热传导方程用空间中心差分与时间前向差分的数值格式是稳定的. 时间步长小(与 $(\Delta x)^2$ 同阶). 为此希望有低代价格式. 截断误差是两项之和，一项与 Δt 同阶，另一项与 $(\Delta x)^2$ 同阶. 如果 s 固定(如 $s = 1/2$)，由于 $\Delta t = s(\Delta x)^2/k$，两项误差均为 $O(\Delta x)^2$.

247

理查森格式. 为了寻求低代价格式，可以尝试更精确的时间差分. 利用理查森在 1927 年首先提出的时间与空间的中心差分：

$$\frac{u_j^{(m+1)} - u_j^{(m-1)}}{\Delta t} = \frac{k}{(\Delta x)^2}\left(u_{j+1}^{(m)} - 2u_j^{(m)} + u_{j-1}^{(m)}\right) \tag{6.3.64}$$

或

$$u_j^{(m+1)} = u_j^{(m-1)} + s(u_{j+1}^{(m)} - 2u_j^{(m)} + u_{j-1}^{(m)}), \tag{6.3.65}$$

其中仍然有 $s = k\Delta t/(\Delta x)^2$. 这里的截断误差是 $(\Delta t)^2$ 与 $(\Delta x)^2$ 之和. 尽管在某种意义下这个格式比前面的方法更精确些，但绝不应当使用(6.3.65). 习题 6.3.12(a)将证明，这个数值格式总是不稳定的.

克兰克-尼科尔森格式. 克兰克与尼科尔森在 1947 年提出了利用中心差分的另一种方法. 时间前向差分

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t}$$

可以解释为对 $t + \Delta t/2$ 的中心差分. 逼近 $\partial u/\partial t(t + \Delta t/2)$ 的误差为 $O(\Delta t)^2$. 因而，在 $t + \Delta t/2$ 处用中心差分离散二阶导数. 由于包含函数在中间时间的计值，就取 t 与 $t + \Delta t$ 的平均值. 克兰克-尼科尔森格式由此给出

$$\frac{u_j^{(m+1)} - u_j^{(m)}}{\Delta t} = \frac{k}{2}\left[\frac{u_{j+1}^{(m)} - 2u_j^{(m)} + u_{j-1}^{(m)}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{j+1}^{(m+1)} - 2u_j^{(m+1)} + u_{j-1}^{(m+1)}}{(\Delta x)^2}\right]. \tag{6.3.66}$$

虽然不明显，但确实有(证明见习题 6.3.13)，截断误差是两项之和，一项是 $(\Delta x)^2$，另一项是 $(\Delta t)^2$. 克兰克-尼科尔森方法的优点是，这个格式对任何 $s = k\Delta t/(\Delta x)^2$ 都是稳定的，证明见习题(6.3.12)(b). Δt 可以任意大，此处取 Δt 与 Δx (而非 $(\Delta x)^2$)成比例，这样误差便为 $O(\Delta x)^2$，与前面的格式有着同样的精度，但计算量小得多. 显然克兰克-尼科尔森法是个实用的方法. 然而，克兰克-尼科尔森格式(见图 6.3.10)要包括六个点(而不是较简单稳定方法的四个点)，其中三个点在超前时刻. 这就不能直接由(6.3.66)依时间前进. 而是要前进一个时间步，(6.3.66)要求求解一个含 $N-1$ 个

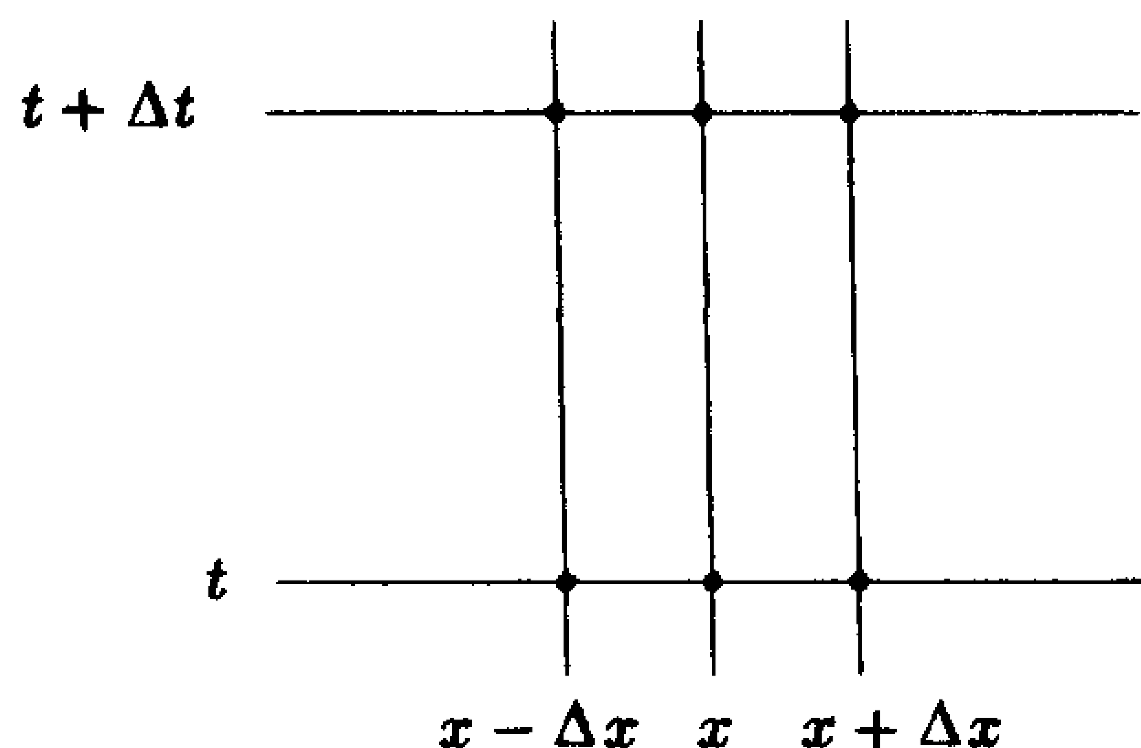


图 6.3.10 隐式的克兰克-尼科尔森格式

方程的线性方程组. 格式(6.3.66)称为隐式的(而(6.3.13)称为显式的). 这里的矩阵是三对角的，因而即使 N 非常大，也可用高斯消元法(相对小的代价)简单地解出线性方程组.

6.3.9 其他类型的边界条件

如果在 $x=0$ 处，$\partial u/\partial x=g(t)$(而不是在 $x=0$ 处给定 u 的值)，就必须引入边界条件的数值逼近. 由于偏微分方程离散化的截断误差为 $O(\Delta x)^2$，空间中心差分对边界条件可以给出相同阶的误差： 248

$$\frac{\partial u}{\partial x}\approx\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x-\Delta x,t)}{2\Delta x}.$$

此时在 $x=0$ 处的边界条件 $\partial u/\partial x=g(t)$ 变为

$$\frac{u_1^{(m)}-u_{-1}^{(m)}}{2\Delta x}=g(t)=g(m\Delta t)=g_m. \tag{6.3.67}$$

由(6.3.67)得到温度在“虚构”点($x_{-1}=-\Delta x$)的表达式：

$$u_{-1}^{(m)}=u_1^{(m)}-2\Delta x g_m. \tag{6.3.68}$$

这样便确定了在虚构点的初值 $u_{-1}^{(0)}$. 在用偏差分方程计算后面时刻的边界温度时需要这个虚构点. 如果用时间前向差分与空间中心差分，(6.3.16)就可以应用于 $j=0$ 到 $j=N-1$. 例如，在 $x=0(j=0)$ 处，

$$\begin{aligned}u_0^{(m+1)}&=u_0^{(m)}+s(u_1^{(m)}-2u_0^{(m)}+u_{-1}^{(m)})\\&=u_0^{(m)}+s(u_1^{(m)}-2u_0^{(m)}+u_1^{(m)}-2\Delta x g_m),\end{aligned}$$

其中用到了(6.3.68). 这样，就可以数值求解边界条件包含导数的偏微分方程. (虚构点在边界条件与偏微分方程之间消去.)

习题 6.3

6.3.1 (a)证明：若 $k(\Delta t)/(\Delta x)^2=1/6$，数值格式(6.3.3)的截断误差会变得小得多. (提示：u 满足偏微分方程(6.3.1).) 249

(b)如果 $k\Delta t/(\Delta x)^2=1/6$，确定截断误差的阶数.

6.3.2 令 $\phi_j=Q^j$，证明：只有 $|Q|=1$，才会满足(6.3.34). (提示：首先证明 $Q^2+\left(\frac{-\lambda+1-2s}{s}\right)Q+1=0$.)

6.3.3 定义 $L(\phi)=\phi_{j+1}+\phi_{j-1}+\gamma\phi_j$.

(a)证明 $uL(v)-vL(u)=w_{j+1}-w_j$，其中 $w_j=u_{j-1}v_j-v_{j-1}u_j$.

(b)由于求和法类似于积分法，导出离散形式的格林公式

$$\sum_{i=1}^{N-1}[uL(v)-vL(u)]=w_N-w_0.$$

(c)证明：如果 u 和 v 均满足齐次边界条件(6.3.18)，(b)中公式的右端为 0.

(d)令 $\gamma=(1-2s)/s$，特征函数 ϕ 满足 $L(\phi)=(\lambda/s)\phi$. 证明：对应于不同特征值的特征函数在 $\sum_{i=1}^{N-1}\phi_i\psi_i=0$ 的意义下是正交的.

*6.3.4 (a)利用习题 6.3.3. 从初值条件 $u_j^{(0)}=f_j$ 确定(6.3.24)中 β_n 的值.

(b)求每一特征函数(即固定 n)的标准化常量

$$\sum_{j=1}^{N-1} \sin^2 \frac{n\pi j}{N}.$$

(提示：利用倍角公式与几何级数.)

6.3.5 证明：若 $s>1/2$，热传导方程数值格式的最不稳定的模式，在相邻网格点的符号交替变化.

6.3.6 计算 $1/[1-\cos(N-1)\pi/N]$. 由此，可以得出有关稳定性的什么结论？

250

(a) $N=4$ (b) $N=6$ (c) $N=8$ *(d) $N=10$ (e)大 N 的渐近情形

6.3.7 初始温度由图 6.3.4 给出，计算热传导方程的数值解. 利用(6.3.16)～(6.3.18)，其中 $N=10$. 对于不同的 s 值计算(并讨论稳定性)：

(a) $s=0.49$ (b) $s=0.50$ (c) $s=0.51$ (d) $s=0.52$

6.3.8 对热传导方程的数值格式(6.3.9)，在什么条件下初始正解($u(x, 0)>0$)保持正的($u(x, t)>0$)?

6.3.9 考虑

$$\frac{d^2u}{dx^2}=f(x) \qquad 满足\ u(0)=0\ 及\ u(L)=0.$$

(a)对二阶导数用中心差分逼近，网格长度为三等分长度 L(见 6.3.2 节)，导出对 $u(x)$ 逼近的线性方程组. 记号：$x_i=i\Delta x$, $f_i=f(x_i)$ 及 $u_i=u(x_i)$. (注：$x_0=0$, $x_1=1/3L$, $x_2=2/3L$, $x_3=L$.)

*(b)将这个方程组写成矩阵形式 $Au=f$. 矩阵 A 是什么？

(c)解 u_1 与 u_2.

(d)证明："格林函数"矩阵 G 可以定义为

$$u_i=\sum_j G_{ij}f_j \qquad (u=Gf).$$

那么矩阵 G 是什么？并证明它是对称的，即 $G_{ij}=G_{ji}$.

6.3.10 假设在随机游动中，在每个 Δt，向右移动 Δx 的概率为 a 与向左移动 Δx 的概率也为 a. 而呆在原地的概率为 $b(2a+b=1)$.

(a)建立这个问题的差分方程.

*(b)导出当 $\Delta x\to 0$ 且 $\Delta t\to 0$ 时，控制该过程的偏微分方程，使得

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta t\to 0}} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}=\frac{k}{s}.$$

(c)假设在右侧 $x=L$ 处有一面墙(或壁)，到达墙之后，向左移动的概率为 a，向右移动的概率为 c，呆在原地的概率为 $1-a-c$. 假定没有从 $x>L$ 返回的可能性. 那么在墙壁处所满足的条件为何？由此导致的偏微分方程的边界条件是什么？(与前面一样，令 $\Delta x\to 0$, $\Delta t\to 0$.)考虑 $c=0$ 与 $c\neq 0$ 两种情况.

251

6.3.11 假设在一个二维随机游动中，在每个 Δt，其向左或向右移动 Δx，和向上或向下移动 Δy 的概率都相同(如图 6.3.11 所示).

(a)建立这个问题的差分方程.

(b)导出当 $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, $\Delta t\to 0$ 时，控制该过程的偏微分方程，使得

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta t\to 0}} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}=\frac{k_1}{s}\ 且 \lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta t\to 0}} \frac{(\Delta y)^2}{\Delta t}=\frac{k_2}{s}.$$

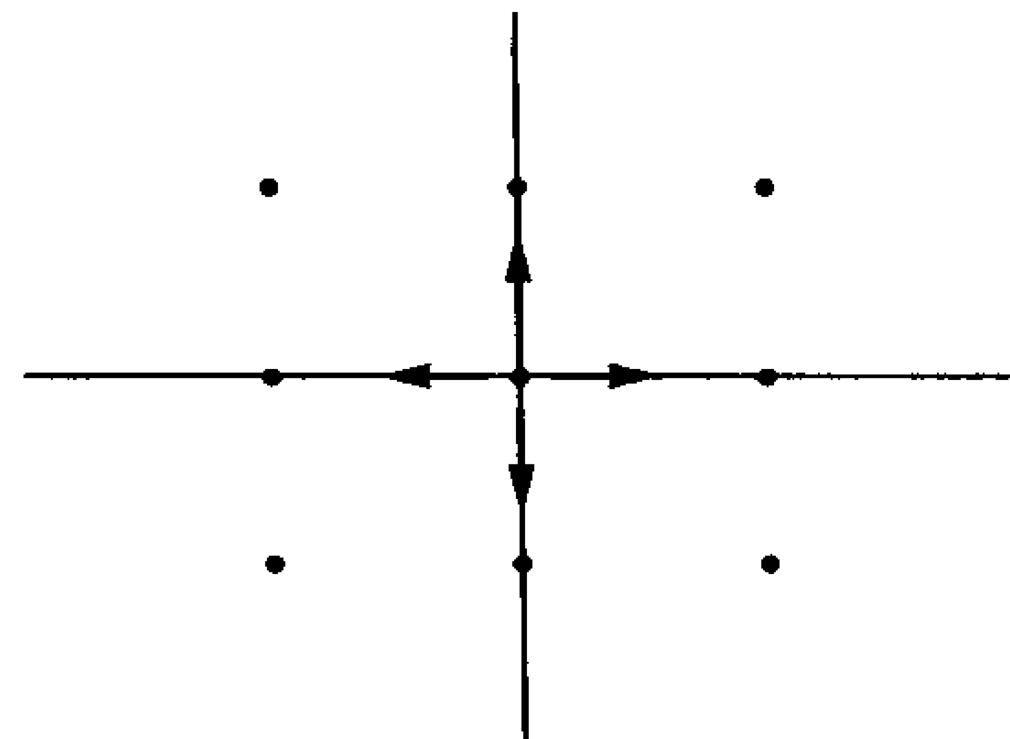


图 6.3.11 习题 6.3.11

6.3.12 利用简化的稳定性判定方法(即代入 $u_j^{(m)}=e^{i\alpha x}Q^{t/\Delta t}$)讨论下列问题：

(a)对热传导方程(6.3.65)的理查森关于时间与空间的中心差分数值格式.

(b)对热传导方程(6.3.66)的克兰克-尼科尔森数值格式.

6.3.13 分析克兰克-尼科尔森方法(6.3.66)的截断误差.

6.3.14 对于下列矩阵：

$$\text{(a)}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{2} & 2\end{bmatrix}\qquad \text{(b)}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix}\qquad {}^{*}\text{(c)}\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 4 & -6\\ 0 & \frac{1}{3} & 2\end{bmatrix}$$

(1)计算特征值.

(2)计算格什戈林行圆.

(3)根据定理比较(1)与(2).

6.3.15 对于习题6.3.14中的矩阵，计算格什戈林(列)圆. 并证明相应的定理也成立. 252

6.3.16 如果热传导方程的边界条件是

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0)=0 \quad 且 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L)=0.$$

利用时间前向差分、空间中心差分，仔细分析差分数值格式的稳定性.（提示：参见6.3.9节.）并将结论与边界条件 $u(0)=0$ 与 $u(L)=0$ 之一进行比较.

6.3.17 （利用(6.3.9)）在计算机上求解边界条件为 $u(0, t)=0$，$u(1, t)=0$ 的热传导方程 $\partial u/\partial t=\partial^2 u/\partial x^2$，其中 $u(x, 0)=\sin\pi x$，$\Delta x=1/100$. 通过计算误差(解析解与数值解的差)与在 $x=1/2$，$t=1$ 的解析解作比较. 取 Δt 使得

(a) $s=0.4$.

(b) $s=0.6$.

(c)设 $\Delta x=1/200$ 但保持 $s=0.4$，改进(a)的计算结果.

(d)比较(a)与(c)的截断误差.

6.4 二维热传导方程

类似的想法可以用于数值求解二维热传导方程

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).}$$

这里要引入二维网格(或格点)，为方便起见，假设 $\Delta x=\Delta y$. 利用时间前向差分以及基于 x 与 y 的中心差分对拉普拉斯的公式(参见(6.2.17))得到

$$\boxed{\frac{u_{j,l}^{(m+1)}-u_{j,l}^{(m)}}{\Delta t}=\frac{k}{(\Delta x)^2}\left[u_{j+1,l}^{(m)}+u_{j-1,l}^{(m)}+u_{j,l+1}^{(m)}+u_{j,l-1}^{(m)}-4u_{j,l}^{(m)}\right],} \tag{6.4.1}$$

其中 $u_{j,l}^{(m)}\approx u(j\Delta x, l\Delta y, m\Delta t)$. 用(6.4.1)随时间前行.

稳定性分析. 与前面一样，数值格式可能是不稳定的. 这里做一个简化的稳定性分析，因此就忽略了边界条件. 通过将

$$u_{j,l}^{(m)}=Q^{t/\Delta t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha x+\beta y)} \tag{6.4.2}$$

253

代入(6.4.1)考察空间周期波动的可能增长. 立即得到

$$\begin{aligned}Q&=1+s(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\Delta x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\Delta x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\Delta y}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta\Delta y}-4)\\&=1+2s(\cos\alpha\Delta x+\cos\beta\Delta y-2),\end{aligned}$$

其中 $s=k\Delta t/(\Delta x)^2$ 和 $\Delta x=\Delta y$. 为了确保稳定性，$-1<Q<1$，由此导出二维热传导方程的稳定性条件为

$$s=\frac{k\Delta t}{(\Delta x)^2}\leqslant\frac{1}{4}. \tag{6.4.3}$$

例. 作为一个初步的例子，对它没有可用的精确解. 在如图 6.4.1 所示的 L 型区域上考虑热传导方程. 假设初始温度为 0，并且在边界 $x=0$ 上 $u=1000$，而在边界的其他部分 $u=0$. 以最大稳定时间步长做计算，$s=1/4\ [\Delta t=(\Delta x)^2/4k]$，这样 (6.4.1) 为

$$u_{j,l}^{(m+1)}=\frac{\left[u_{j+1,l}^{(m)}+u_{j-1,l}^{(m)}+u_{j,l+1}^{(m)}+u_{j,l-1}^{(m)}\right]}{4}. \tag{6.4.4}$$

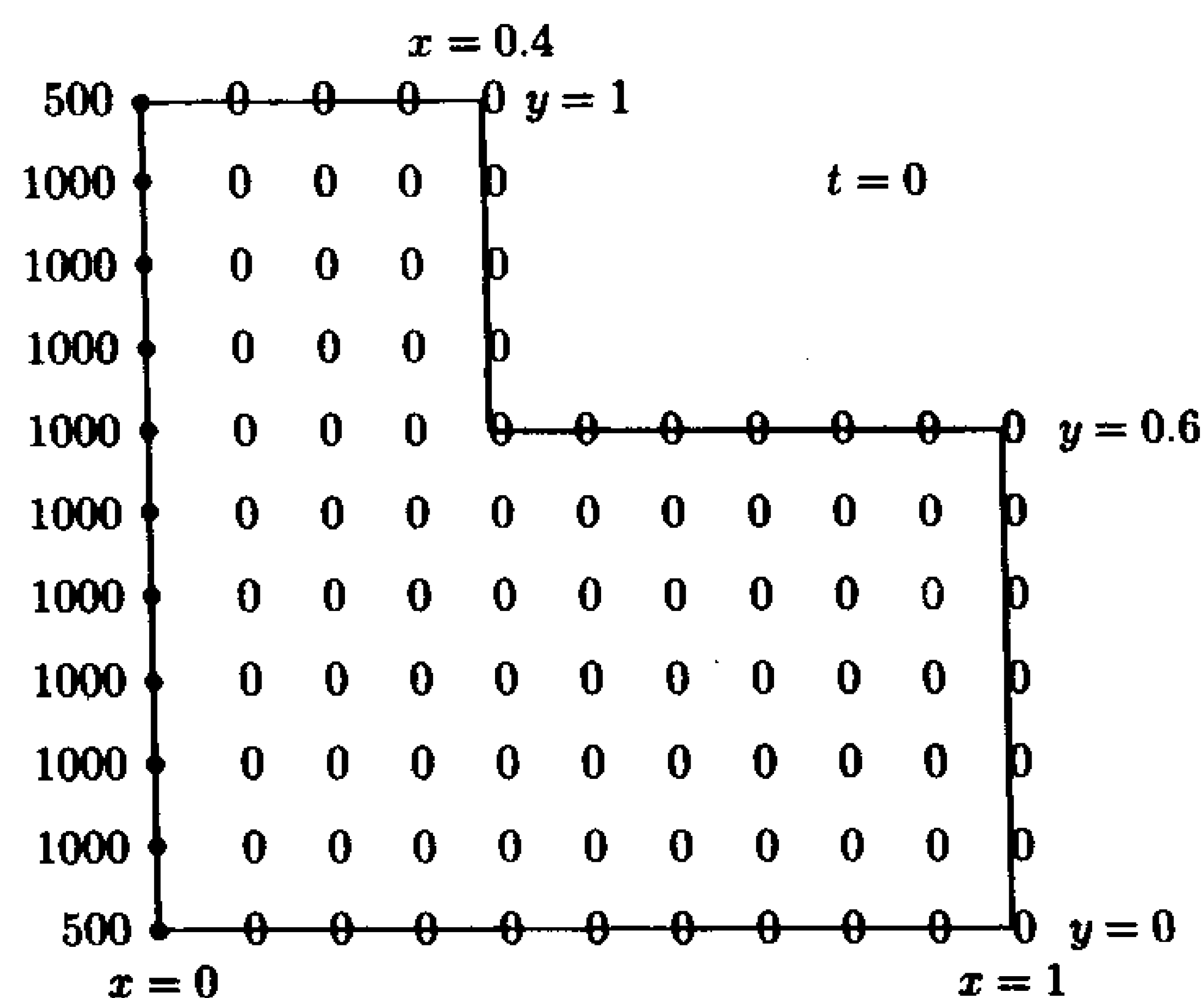


图 6.4.1 初值条件

在此数值格式中，下一时刻的温度，是四个邻近网格(或格)点上当前温度的平均值. 取 $\Delta x=1/10[\Delta t=1/400k]$，在图 6.4.2 与图 6.4.3 中给出了数值解的草图. 并大概地绘出了等温线，以便观察热能如何进入区域的内部.

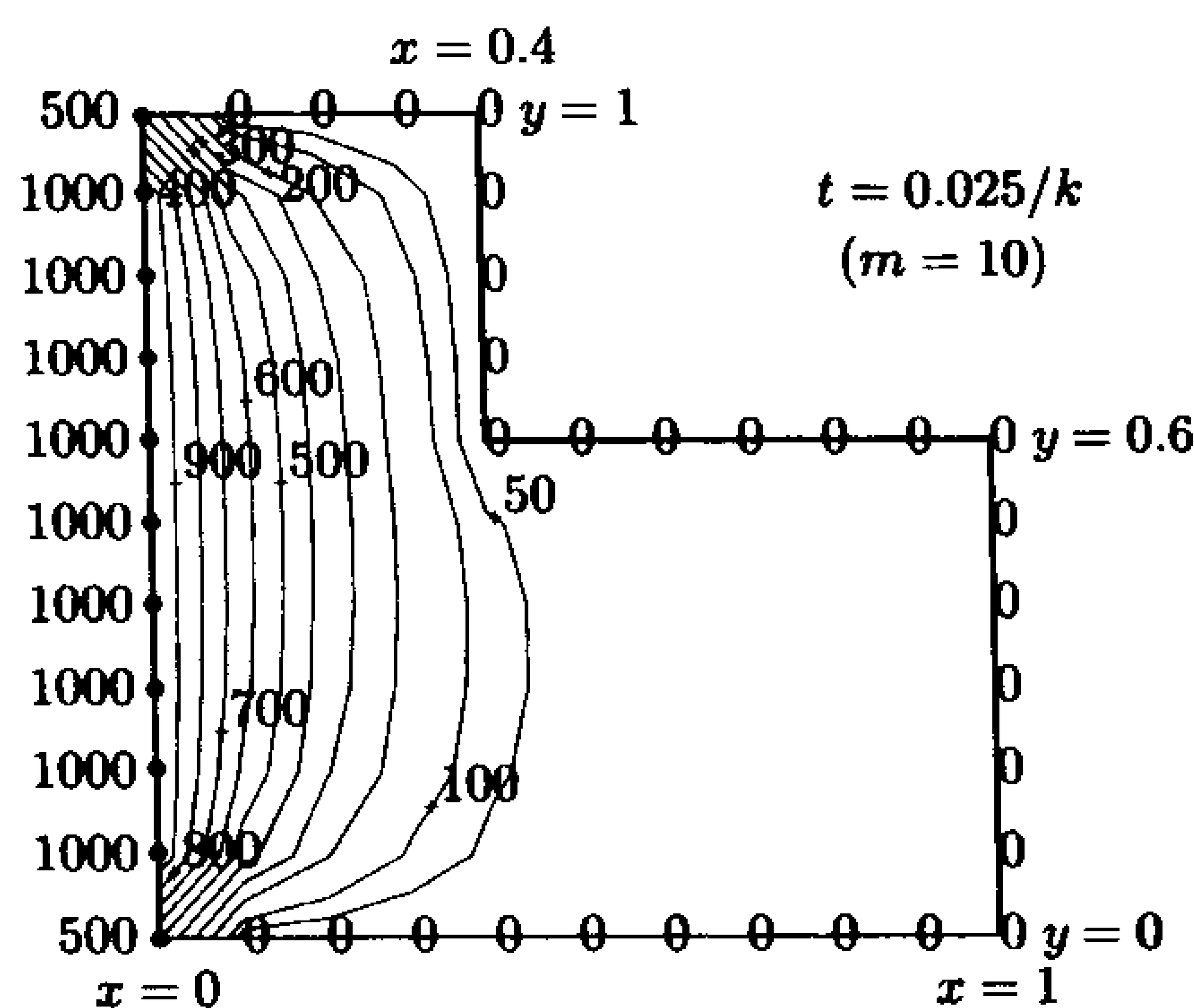


图 6.4.2 L 型区域温度的数值解

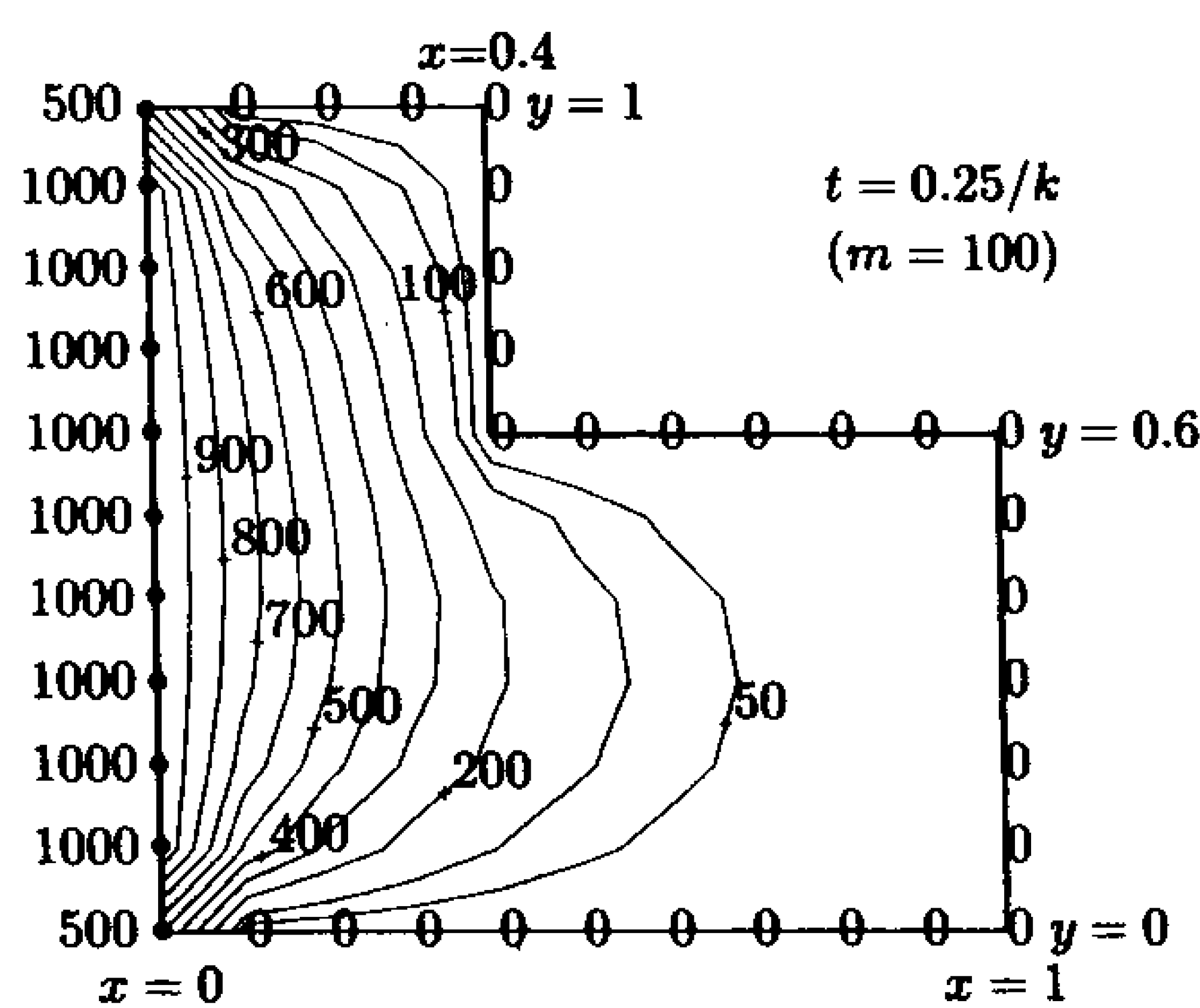


图 6.4.3 L 型区域温度的数值解

254 ~ 255 如果边界完全由网格点组成，可以直接应用偏差分方程. 但一般这是不可能的，此时，必须对边界条件应用更复杂的步骤.

习题 6.4

*6.4.1 若 $\Delta x\neq\Delta y$，求二维热传导方程的稳定性条件(不计边界条件).

6.4.2 若 $\Delta x=\Delta y$，对在正方形四条边上满足 $u(x,y)=0$ 的二维热传导方程导出稳定性条件(要考虑边界条件的影响).

6.4.3 若 $\Delta x=\Delta y=\Delta z$，导出三维热传导方程的稳定性条件(不计边界条件).

6.4.4 在矩形区域 $0<x<1$，$0<y<2$ 上求初始温度为 0 的热传导方程的数值解. 假设边界条件是在三条边上为 0，而在一条长边上 $u=1$.

6.5 波动方程

也可以用有限差分逼近计算一维波动方程的解. 利用时间与空间中心差分，波动方程

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \tag{6.5.1}$$

变成下面的偏差分方程

$$\boxed{\frac{u_j^{(m+1)}-2u_j^{(m)}+u_j^{(m-1)}}{(\Delta t)^2}=c^2\frac{u_{j+1}^{(m)}-2u_j^{(m)}+u_{j-1}^{(m)}}{(\Delta x)^2}.}\tag{6.5.2}$$

截断误差是两项之和，一项与 $O(\Delta x)^2$ 同阶，另一项与 $O(\Delta t)^2$ 同阶. 通过(6.5.2)解出 $u_j^{(m+1)}$，解就随时间前移. 如图 6.5.1 所示，(6.5.2)包含三个时刻. 需要"初始地"在两个 t 值(0 与 $-\Delta t$)处的 $u(x, t)$开始计算. 用波动方程的两个初值条件，$u(x, 0)=f(x)$和$\partial u/\partial t(x, 0)=g(x)$计算在 $m=0$ 与 $m=-1$ 处的值. 利用$\partial u/\partial t$ 的时间中心差分(为了保持 $O(\Delta t)^2$ 截断误差)得到

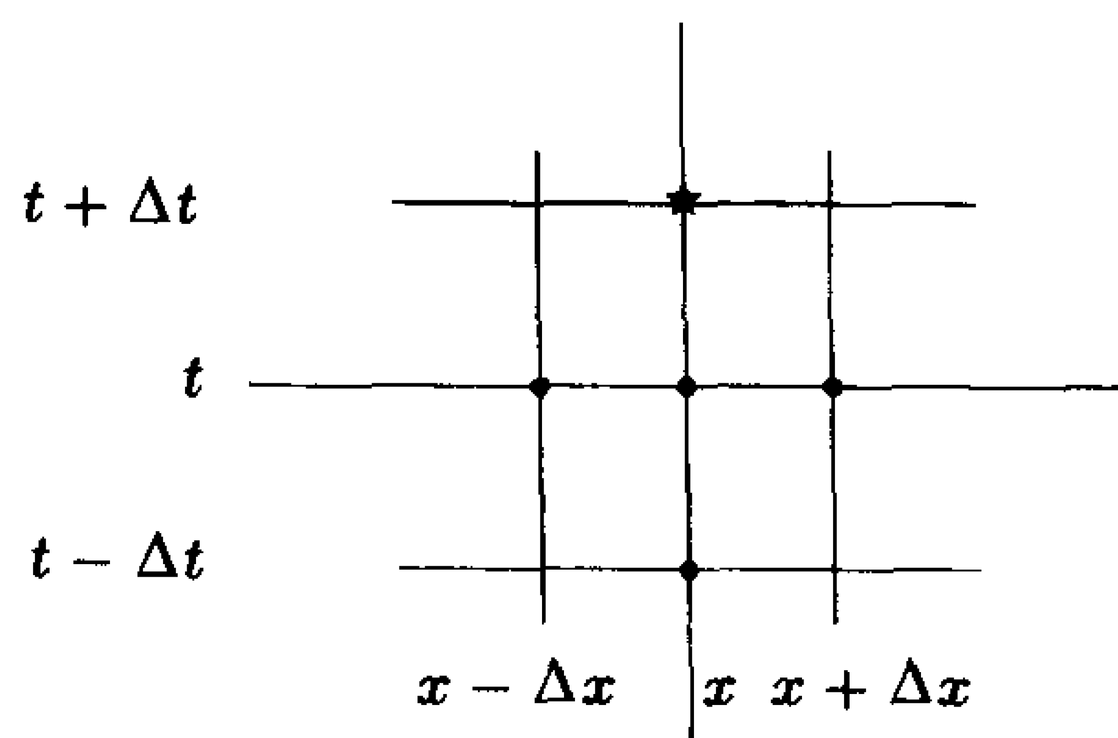


图 6.5.1 波动方程随时间前移

256

$$u_j^{(0)}=f(x_j)=f(j\Delta x)\tag{6.5.3}$$

$$\frac{u_j^{(1)}-u_j^{(-1)}}{2\Delta t}=g(x_j)=g(j\Delta x).\tag{6.5.4}$$

要开始计算，必须计算 $u_j^{(-1)}$. 初值条件(6.5.3)与(6.5.4)是两个含三个未知量 $u_j^{(-1)}$，$u_j^{(0)}$，$u_j^{(1)}$ 的方程. 在 $t=0$ 处的偏差分方程提供了第三个方程：

$$u_j^{(1)}=2u_j^{(0)}-u_j^{(-1)}+\frac{c^2}{(\Delta x/\Delta t)^2}\left(u_{j-1}^{(0)}-2u_j^{(0)}+u_{j+1}^{(0)}\right).\tag{6.5.5}$$

因为由(6.5.3)知道了 $u_j^{(0)}$，所以可从(6.5.4)与(6.5.5)中消去 $u_j^{(1)}$. 这样便能解出 $u_j^{(-1)}$. 一旦求得 $u_j^{(-1)}$ 与 $u_j^{(0)}$，u 后面的值就可以由(6.5.2)算出来. 边界条件还可以按前面的方式分析.

稳定性. 以上的讨论明确表明稳定性分析是重要的. 为了确定是否有空间周期波增大，将

$$u_j^{(m)}=Q^{t/\Delta t}e^{i\alpha x}\tag{6.5.6}$$

代入(6.5.2)得到

$$Q-2+\frac{1}{Q}=\sigma,\tag{6.5.7}$$

其中

$$\sigma=\frac{c^2}{(\Delta x/\Delta t)^2}(e^{i\alpha\Delta x}-2+e^{-i\alpha\Delta x})=\frac{2c^2}{(\Delta x/\Delta t)^2}[\cos(\alpha\Delta x)-1].\tag{6.5.8}$$

(6.5.7)是 Q 的二次方程，这是由于(6.5.2)包含了三个时刻和两个时间差分：

$$Q^2-(\sigma+2)Q+1=0\quad 这样\quad Q=\frac{\sigma+2\pm\sqrt{(\sigma+2)^2-4}}{2}\tag{6.5.9}$$

这两个根对应于波随时间传播的两种方式. 若 $-2<\sigma+2<2$，它们互为复共轭. 此时(如前面讨论的)

$$Q^m=(re^{i\theta})^m=r^m e^{im\theta},$$

257

其中 $r=|Q|$，$\theta=\arg Q$. 由于

$$|Q|^2=\frac{(\sigma+2)^2}{4}+\frac{4-(\sigma+2)^2}{4}=1,$$

若 $-2<\sigma+2<2$，对固定的 x 解随着 m(时间)的增长而振荡. 这与波动方程本身相类似，当

空间部分是周期的时(例如，$\sin n\pi x/L\cos n\pi ct/L$)，它允许时间周期解. 若 $\sigma+2>2$ 或 $\sigma+2<-2$，根是实的且乘积为1(见6.5.9). 这样，一个根的绝对值就会大于1，从而导致了不稳定性.

如果 $-2<\sigma+2<2$ 或 $-4<\sigma<0$，解是稳定的. 从(6.5.8)推出，如果

$$\boxed{\frac{c}{\Delta x/\Delta t}\leqslant 1,} \tag{6.5.10}$$

数值格式是稳定的，这称为(波动方程的)柯朗稳定性条件. 此处 c 为波动方程信号传播速度，$\Delta x/\Delta t$ 是波动方程离散化信号的传播速度. 因此对稳定性可得出结论，数值格式必须比波动方程本身具有更大的传播速度. 这样数值格式才能够堪称真实信号的传播. 而稳定性条件又一次限制了时间步长，此时

$$\Delta t\leqslant\frac{\Delta x}{c}. \tag{6.5.11}$$

收敛性. 若 $-2<\sigma+2<2$，则时间相关部分振荡(稳定性判别标准)

$$Q^{t/\Delta t}=e^{i\frac{t}{\Delta t}\arg Q}. \tag{6.5.12}$$

注意，若 $\alpha\Delta x$ 很小(其中 α 是波数，通常为 $n\pi/L$)，由泰勒级数，$\cos(\alpha\Delta x)\approx 1-\frac{1}{2}(\alpha\Delta x)^2$，因此参数 α 小且为负：

$$\sigma\approx-\frac{1}{2}(\alpha\Delta x)^2\frac{2c^2}{(\Delta x/\Delta t)^2}.$$

此时，偏差分方程解的时间频率为

$$\frac{\arg Q}{\Delta t}=\frac{\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{4-(\sigma+2)^2}{\sigma+2}}\right)}{\Delta t}\approx\frac{\left(\frac{\sqrt{4-(\sigma+2)^2}}{\sigma+2}\right)}{\Delta t}\approx\frac{(\sqrt{-\sigma})}{\Delta t}\approx c\alpha, \tag{6.5.13}$$

这就是由于 σ 小且为负，并且对于小角 ϕ 有 $\tan\phi\approx\phi$. (6.5.13)表明偏差分方程的时间频率趋于偏微分方程的时间频率. 若回想起 σ 通常以 $n\pi/L$ 为波数时，也许结论会更清晰些. 因此，若$\alpha\Delta x$ 小，则偏差分方程有与偏微分方程相近似相同的解：

258

$$Q^{t/\Delta t}e^{i\alpha x}=e^{i\frac{t}{\Delta t}\arg Q}e^{i\alpha x}\approx e^{i\alpha x}e^{ic\alpha t}.$$

同样可以证明，当 $\alpha\Delta x$ 很小时，误差为 $O(\Delta t)$(偏差分方程的解与偏微分方程的解在固定 x 和 t 处值的差). 通常是对固定的 $\Delta x/\Delta t$ 做计算. 为了提高计算精度，将 Δx 减半(因而 Δt 减半). 所以，若 $\Delta x/\Delta t$ 固定且 $\alpha\Delta x\ll 1$，如果离散步长 Δx 减半(且时间步长 Δt 亦减半)，则数值误差(在固定的 x 与 t 处)就会减半. 这些计算都应当在满足柯朗稳定性条件下(6.5.10)进行.

习题 6.5

6.5.1 对边界条件 $u(0)=0$ 与 $u(L)=0$，调整波动方程的柯朗稳定性条件.

6.5.2 考虑满足初值条件

$$u(x,0)=\begin{cases}1 & \frac{L}{4}<x<\frac{3L}{4}\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$$

和边界条件

$$u(0,t)=0$$
$$u(L,t)=0$$

的波动方程. 利用9个内部网格点，用时间与空间中心差分方法计算. 并与精确解作比较.

(a) $\Delta t=\Delta x/2c$

(b) $\Delta t=\Delta x/c$

(c) $\Delta t=2\Delta x/c$

6.5.3 $u(x,t)=f(x-ct)$是波动方程的一个解，其中f是任意函数. 若$c=\Delta x/\Delta t$，证明：对于任意函数f，$u_j^m=f(x_j-ct_m)$是(6.5.2)的一个解.

6.5.4 证明习题6.5.3的结论在$c\neq\Delta x/\Delta t$时不成立.

6.5.5 考虑一阶波动方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=0.$$

(a)用时间前向差分与空间中心差分方法确定偏差分方程.

259

*(b)分析这个格式的(无边界条件)稳定性.

*6.5.6 利用空间与时间中心差分方法，重做习题6.5.5.

6.5.7 (利用习题6.5.2.)用计算机求解满足$u(0,t)=0$，$u(1,t)=0$，$u(x,0)=\sin\pi x$，$\partial u/\partial t(x,0)=0$和$\Delta x=1/100$的波动方程$\partial^2u/\partial t^2=\partial^2u/\partial x^2$. 对一阶导数$\partial u/\partial t(x,0)=0$的初值条件，使用前向差分，而不是中心差分(3.5.4). 通过计算在$x=1/2$，$t=1$处的误差(解析解与数值解的差)与其解析解作比较. 选择Δt使得

(a) $\Delta x/\Delta t=1.5$.

(b) $\Delta x/\Delta t=0.5$.

(c)为了改进(a)的计算，设$\Delta x=1/200$，但保持$\Delta x/\Delta t=1.5$.

(d)比较(a)与(c)中的误差.

6.6 拉普拉斯方程

引言. 拉普拉斯方程

$$\boxed{\nabla^2u=0}\tag{6.6.1}$$

通常是在某个区域上进行讨论使其必须沿着整个边界满足一个条件. 由于没有出现时间变量，对有限差分数值法的实行必然与热传导方程或波动方程的有所不同.

使用标准的中心差分离散化，二维拉普拉斯方程化为以下偏差分方程(假设$\Delta x=\Delta y$)：

$$\boxed{\frac{u_{j+1,l}+u_{j-1,l}+u_{j,l+1}+u_{j,l-1}-4u_{j,l}}{(\Delta x)^2}=0.}\tag{6.6.2}$$

这里希望$u_{j,l}\approx u(j\Delta x,\ l\Delta y)$.

此处的边界条件可以利用分析热传导方程与波动方程边界条件同样的方法进行分析. 最简单的情况是，它是沿着(由网格点组成的)边界指定的. 在内部网格点上的温度是未知的. (6.6.2)在每个内部网格点上都成立. (6.6.2)中某些项要由边界条件确定，但大多数项却是未知的. (6.6.2)可以写成一个线性方程组. 并用高斯消元法求解，但在许多实际应用中，方程与未知数的个数(等于内部网格点个数)太大，以致于无有效的数值计算方法. 在三维空间

260 中更是如此，其中甚至 20×20×20 个网格就生成 8000 个未知数的 8000 个线性方程.

重新整理(6.6.2)可得

$$u_{j,l}=\frac{u_{j+1,l}+u_{j-1,l}+u_{j,l+1}+u_{j,l-1}}{4}. \tag{6.6.3}$$

温度 $u_{j,l}$一定是其四个相邻点的平均值. 因而，拉普拉斯方程离散化的解满足中值定理. 由(6.6.3)也可以证明离散的最大值与最小值原理. 这些性质与拉普拉斯方程本身结果(见2.5.4节)类似.

雅可比迭代. 若非精确地求解(6.6.3)，更一般地是使用逼近迭代格式. 如果误差小，就不必过分担心求解(6.6.3)的误差，因为(6.6.3)已经是拉普拉斯方程的近似.

因为四个相邻点的温度是未知的，就不可能直接求解(6.6.3). 不过，按以下步骤可以给出解. 先对解做初始推测，再利用均值原理(6.6.3)对其进行"更新"：

$$u_{j,l}^{(\text{new})}=\frac{1}{4}(u_{j+1,l}+u_{j-1,l}+u_{j,l-1}+u_{j,l+1})^{(\text{old})}.$$

可以继续这样做下去，此方法称为雅可比迭代. 初始推测记作 $u_{j,l}^{(0)}$，第一次迭代为 $u_{j,l}^{(1)}$(由 $u_{j,l}^{(0)}$确定)，$u_{j,l}^{(2)}$ 为第二次迭代(由 $u_{j,l}^{(1)}$ 确定)，等等. 这样，第$(m+1)$次迭代满足

$$u_{j,l}^{(m+1)}=\frac{1}{4}\left(u_{j+1,l}^{(m)}+u_{j-1,l}^{(m)}+u_{j,l+1}^{(m)}+u_{j,l-1}^{(m)}\right). \tag{6.6.4}$$

如果这些迭代收敛，即如果

$$\lim_{m\to\infty}u_{j,l}^{(m+1)}=v_{j,l},$$

则(6.6.4)证明了 $v_{j,l}$满足离散拉普拉斯方程(6.6.3).

方程(6.6.4)很适合于计算机求解. 由于无法让 $m\to\infty$，在实际计算中，当 $u_{j,l}^{(m+1)}-u_{j,l}^{(m)}$(对所有的 j 与 l)小时，停止迭代. 此时 $u_{j,l}^{(m+1)}$是精确解 $v_{j,l}$相当不错的逼近. (记住 $v_{j,l}$本身仅是拉普拉斯方程的近似解.)

每次更新所出现的变化都可以通过将雅可比迭代写为

261

$$u_{j,l}^{(m+1)}=u_{j,l}^{(m)}+\frac{1}{4}\left(u_{j+1,l}^{(m)}+u_{j-1,l}^{(m)}+u_{j,l+1}^{(m)}+u_{j,l-1}^{(m)}-4u_{j,l}^{(m)}\right). \tag{6.6.5}$$

加以强调. 这样，雅可比迭代可以看作是二维扩散方程的标准离散化(空间中心差分与时间前向差分)：$\partial u/\partial t=k(\partial^2u/\partial x^2+\partial^2u/\partial y^2)$，其中 $s=k\Delta t/(\Delta x)^2=1/4$(见(6.4.4)). 每一迭代对应一个时间步长 $\Delta t=(\Delta x)^2/4k$. 前面计算 L 型区域(见6.4节)上热传导方程的例子就是一个雅可比迭代. 对于较大的 m 值，解趋向于与 m 无关的值. 解的空间分布就是(满足给定边界条件的)拉普拉斯方程离散形式的精确逼近.

尽管雅可比迭代收敛，但其收敛速度很慢. 为了粗略分析收敛速度，考察 $L\times L$ 方形区域$(\Delta x=\Delta y=L/N)$内空间振荡的衰减. 在(6.6.4)中，m 相当于时间$(t=m\Delta t)$，(6.6.4)相当于前面分析过的偏差分方程. 这样就有特殊形式的解

$$u_{j,l}^{(m)}=Q^m\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha x+\beta y)}, \tag{6.6.6}$$

其中 $\alpha=n_1\pi/L$，$\beta=n_2\pi/L$，$n_j=1, 2, \cdots, N-1$. 假设在边界上为 0 的边界条件. 当 $m\to\infty$ 时，解应当收敛到 0；要知道需要进行多少次迭代，就要确定收敛速度. 将(6.6.6)代入

(6.6.4)得到

$$Q=\frac{1}{4}(e^{i\alpha\Delta x}+e^{-i\alpha\Delta x}+e^{i\beta\Delta y}+e^{-i\beta\Delta y})=\frac{1}{2}(\cos\alpha\Delta x+\cos\beta\Delta y).$$

由于对任意 α 与 β，$-1<Q<1$，从(6.6.6)可得所要求的 $\lim\limits_{m\to\infty}u_{j,l}^{(m)}=0$. 不过收敛可能是很慢的. 最慢的收敛速度出现在 Q 最接近1时. 这发生在 α 与 β 取最小与最大值时，$\alpha=\beta=\pi/L$ 和 $\alpha=\beta=(N-1)\pi/L$,此时有

$$|Q|=\cos\frac{\pi\Delta x}{L}=\cos\frac{\pi}{N}\approx 1-\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{N^2},\tag{6.6.7}$$

因为 $\Delta x=L/N$ 且 N 大. 这样 $|Q|^m$ 近似等于$\left[1-\frac{1}{2}(\pi/N)^2\right]^m$. 这表示方形区域内最坏的空间振荡误差. 如果 N 大，这个误差缓慢地收敛到0. 例如，为了使误差减小到1/2倍，

$$\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{N}\right)^2\right]^m=\frac{1}{2}.$$

取自然对数求解 m 值，得到

$$m\log\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{N}\right)^2\right]=-\log 2.$$

由于 π/N 很小，可得到一个更简单的公式. 当 x 很小时，由泰勒级数，$\log(1-x)\approx -x$，因此，用雅可比迭代可得使误差减小1/2倍的迭代次数 m 约为

$$m=\frac{\log 2}{\frac{1}{2}(\pi/N)^2}=N^2\frac{2\log 2}{\pi^2},$$

262

所需迭代的次数也可能很大，(仅将误差减半)它与 N^2，即方形区域内的格点数同阶.

高斯-赛德尔迭代. 用雅可比迭代计算很费时间. 更重要的是，对拉普拉斯方程的离散形式，有既容易实现，又收敛更快的格式. 用雅可比迭代通常是先求左下角区域的更新温度 $u_{j,l}^{(m+1)}$. 然后，在(从左至右)更新下一行温度之前，就能够扫描整行网格点(仍是从左至右)，如图6.6.1所示. 例如，

$$u_{3,8}^{(m+1)}=\frac{1}{4}(u_{2,8}^{(m)}+u_{3,7}^{(m)}+u_{3,9}^{(m)}+u_{4,8}^{(m)}).$$

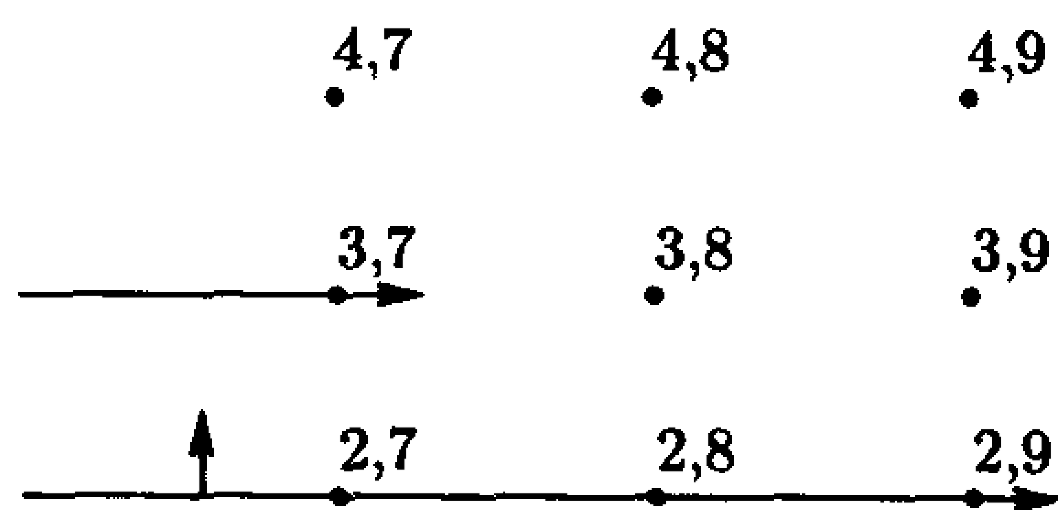


图6.6.1 高斯-赛德尔迭代

在雅可比迭代中，即使算出了新值 $u_{3,7}^{(m+1)}$ 与 $u_{3,8}^{(m+1)}$，仍要用旧值 $u_{2,8}^{(m)}$，$u_{3,7}^{(m)}$，$u_{3,9}^{(m)}$，$u_{4,8}^{(m)}$ 来计算. 在用计算机实现雅可比迭代时，就不能马上去掉旧值(如已经证明的即使算出了新值，有些旧值还是需要的).

如果算出新值就删除旧值，编程会更容易些. 因而要尽可能地使用更新温度. 例如

$$u_{3,8}^{(m+1)}=\frac{1}{4}(u_{2,8}^{(m+1)}+u_{4,8}^{(m)}+u_{3,7}^{(m+1)}+u_{3,9}^{(m)}).$$

一般可得

$$\boxed{u_{j,l}^{(m+1)}=\frac{1}{4}(u_{j-1,l}^{(m+1)}+u_{j+1,l}^{(m)}+u_{j,l-1}^{(m+1)}+u_{j,l+1}^{(m)}).}\tag{6.6.8}$$

称为高斯-赛德尔迭代. 如果这种格式收敛，解就满足拉普拉斯方程的离散形式.

现在还没有足够的理由相信这个格式比雅可比迭代收敛得快. 为了考察高斯-赛德尔迭代(在方形区域内)的收敛速度, 也将

263

$$u_{j,l}^{(m)} = Q^m e^{i(\alpha x+\beta y)} \tag{6.6.9}$$

代入(6.6.8). 其中

$$\alpha = \frac{n_1\pi}{L}, \beta = \frac{n_2\pi}{L}, n_i = 1,2,\cdots,N-1.$$

结果是

$$Q = \frac{1}{4}[e^{i\alpha\Delta x} + e^{i\beta\Delta y} + Q(e^{-i\alpha\Delta x} + e^{-i\beta\Delta y})]. \tag{6.6.10}$$

为了简化代数式, 令

$$z = \frac{e^{i\alpha\Delta x} + e^{i\beta\Delta y}}{4} = \xi + i\eta, \tag{6.6.11}$$

因而有 $Q = z/(1-\bar{z})$. Q 是复的, $Q = |Q|e^{i\theta}$, $u_{j,l}^{(m)} = |Q|^m e^{i\theta m} e^{i(\alpha x+\beta y)}$. 收敛速度由 $|Q|$ 确定,

$$|Q|^2 = \frac{z\bar{z}}{(1-\bar{z})(1-z)} = \frac{|z|^2}{1+|z|^2-2\mathrm{Re}(z)} = \frac{\xi^2+\eta^2}{1+\xi^2+\eta^2-2\xi} = \frac{\xi^2+\eta^2}{(1-\xi)^2+\eta^2}. \tag{6.6.12}$$

因为 $|z|<1/2$, 所以 $|\xi|<1/2$, 因而 $|Q|<1$, 就得到高斯-赛德尔迭代收敛. 然而, 若 $|Q|$ 接近 1 则收敛速度慢. (6.6.12)表明, 仅当 ξ 接近于 1/2 时, $|Q|$ 才接近于 1, 所以(6.6.11)就要求 α 与 β 尽可能小. 对方形区域, $\alpha = \pi/L$ 且 $\beta = \pi/L$, 这样

$$\xi = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi\Delta x}{L} \quad 与 \quad \eta = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi\Delta x}{L}.$$

因此

$$|Q|^2 = \frac{1}{5-4\cos\pi\Delta x/L} = \frac{1}{5-4\cos\pi/N} \approx \frac{1}{1+2(\pi/N)^2} \approx 1-2\left(\frac{\pi}{N}\right)^2,$$

这是因为 π/N 小. 于是

$$|Q| \approx 1-\left(\frac{\pi}{N}\right)^2.$$

与雅可比迭代(见(6.6.7))相比, 上式中 $|Q|$ 与 1 的距离是(6.6.7)中 $|Q|$ 与 1 距离的 2 倍. 重复以前的分析可知, 为了减少任一比例的误差, 就要减半迭代次数. 因此, 最好不要使用雅可比迭代, 因为高斯-赛德尔迭代是一种更可行更有效的替代方法.

S-O-R. 雅可比迭代和高斯-赛德尔迭代格式所要求的迭代次数都与 N^2 同阶, 其中 N 为(一维)区间内网格点的个数. 一个快得多的格式是逐次超松弛法, 简称 S-O-R.

高斯-赛德尔迭代法可改写成下述形式, 以强调每个迭代中发生的变化:

264

$$u_{j,l}^{(m+1)} = u_{j,l}^{(m)} + \frac{1}{4}\left[u_{j-1,l}^{(m)} + u_{j+1,l}^{(m+1)} + u_{j,l-1}^{(m)} + u_{j,l+1}^{(m+1)} - 4u_{j,l}^{(m)}\right].$$

括号中的项表示在由 $u_{j,l}^{(m)}$ 更新为 $u_{j,l}^{(m+1)}$ 的每步迭代后的变化. 历史上, 人们观察到引入较大或较小的变化都可能会收敛得更快. 具有松弛参数 ω 的高斯-赛德尔迭代给出了 S-O-R 迭代:

$$\boxed{u_{j,l}^{(m+1)} = u_{j,l}^{(m)} + \omega\left[u_{j-1,l}^{(m)} + u_{j+1,l}^{(m+1)} + u_{j,l-1}^{(m)} + u_{j,l+1}^{(m+1)} - 4u_{j,l}^{(m)}\right].} \tag{6.6.13}$$

若 $\omega=1/4$，这就简化为高斯－赛德尔迭代．如果 S-O-R 收敛，它明显地收敛于拉普拉斯方程的离散形式．下面要选取 ω 使得(6.6.13)收敛得尽可能快．

再次引入

$$u_{j,l}^{(m)}=Q^m e^{i(\alpha x+\beta y)}$$

来考察收敛速度，其中 $\alpha=n_1\pi/L$，$\beta=n_2\pi/L$，$n_i=1,2,\cdots,N-1$．得到

$$Q=1+\omega[e^{i\alpha\Delta x}+e^{i\beta\Delta y}+Q(e^{-i\alpha\Delta x}+e^{-i\beta\Delta y})-4].$$

这个表达式有些复杂，设 $z=\omega(e^{i\alpha\Delta x}+e^{i\beta\Delta y})=\xi+i\eta$ 可得 $Q=(1-4\omega+z)/(1-\bar{z})$．$Q$ 为复数，$|Q|$ 决定收敛速度，

$$|Q|^2=\frac{(1-4\omega+\xi)^2+\eta^2}{(1-\xi)^2+\eta^2}.$$

仍有 $|z|<2\omega$ 及 $|\xi|<2\omega$．在习题 6.6.1 中，将证明若 $\omega=1/2$，则 $|Q|<1$，就保证了 S-O-R 的收敛性．若 $\omega<1/2$，则仅当 ξ 接近于 2ω 时，$|Q|$ 接近于 1．仅当 α 与 β 尽可能小时，这种情况才会发生，(对于一个方形区域)$\alpha=\pi/L$ 且 $\beta=\pi/L$ 时有 $\xi=2\omega\cos\pi\Delta x/L$ 和 $\eta=2\omega\sin\pi\Delta x/L$．这样

$$|Q|^2=\frac{4\omega^2+(1-4\omega)^2+(1-4\omega)4\omega\cos(\pi/N)}{4\omega^2+1-4\omega\cos(\pi/N)}.$$

习题 6.6.1 证明，$|Q|^2$ 在 $\omega=\frac{1}{2}-(\sqrt{2}/2)\sqrt{1-\cos\pi/N}$ 处达到最小值．由于 N 大[⊖]，(对方形区域)使用 $\omega=\frac{1}{2}(1-\pi/N)$，此时

$$|Q|\approx 1-\frac{\pi}{2N};$$

参考习题 6.6.2．适当选择 ω 的值，$|Q|$ 虽仍接近于 1，但比雅可比迭代或高斯-赛德尔迭代距 1 的距离高出一个数量级．事实上(见习题 6.6.2)，在 S-O-R 中，当迭代次数的数量级为 N (不是 N^2)时，误差会减少 1/2.

在非方形区域中，难以求得 S-O-R 迭代的最优 ω 值．不过，现在已有计算机例程可计算 ω 的近似值．这样，S-O-R 通常是拉普拉斯方程的一种实用和收敛相对较快的迭代格式．

已经开发了其他的改进格式，这包括 20 世纪 50 年代中期由 Peaceman、Douglas 与 Rachford 设计的交替方向隐式(ADI)法．还有了一些更新的技术，希望将来会开发出更好的方法． 265

习题 6.6

6.6.1 (a)证明：若 S-O-R 迭代中的 $\omega<1/2$，则 $|Q|<1$.

(b)对于方形区域，通过最小化 $|Q|^2$ 确定 S-O-R 迭代的最优松弛参数 ω.

6.6.2 (a)在 S-O-R 迭代中，如果 $\omega=\frac{1}{2}(1-\pi/N)$，证明：$|Q|\approx 1-\pi/2N$(对于大 N).

(b)证明：若要将误差减半，则所需的迭代次数与 N(不是 N^2)有相同的数量级.

6.6.3 描述求解泊松方程的数值格式

$$\nabla^2 u=f(x,y),$$

⊖ 原书为 π/N. ——译者注

(设 $\Delta x=\Delta y$)要求该格式类似于

(a)雅可比迭代. (b)高斯-赛德尔迭代. (c)S-O-R.

6.6.4 描述(基于雅可比迭代)求解三维拉普拉斯方程的数值格式. 并估计将误差减半所需的迭代次数.

6.6.5 基于高斯-赛德尔迭代，重做习题6.6.4.

6.6.6 证明：适当选取 $\Delta x=\Delta y\to 0$ 和 $\Delta t\to 0$ 的方式而取极限，雅可比迭代就对应于二维扩散方程.

6.6.7 S-O-R迭代对应于什么偏微分方程?(提示：在按不同的方法让 $\Delta x=\Delta y\to 0$ 和 $\Delta t\to 0$ 时，取极限.)并对高斯-赛德尔迭代，令 $\omega=1/4$，给出相应的结果.

6.6.8 在方形区域 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 上，考虑拉普拉斯方程，其在三条边上满足 $u=0$，第四条边上满足 $u=1$.

(a)用雅可比迭代求解(设 $\Delta x=\Delta y=1/10$).

(b)用高斯-赛德尔迭代求解(设 $\Delta x=\Delta y=1/10$).

(c)用S-O-R迭代求解(设 $\Delta x=\Delta y=1/10$ 且 $\omega=\frac{1}{2}(1-\pi/10)$).

(d)用分离变量法求解，数值计算前10项或前20项的值.

266 (e)尽可能多地比较以上各部分所得的结论.

6.7 有限元法

在当今世界上，许多用偏微分方程表达的有趣物理问题用计算机(包括微机)求解. 有限差分方法可以通过巨大的差分方程组来逼近连续偏微分方程. 下面介绍另一种称为有限元法的方法，有关其更深入的解释可参阅Strang[1986].

6.7.1 非正交函数逼近

求解一个相对简单的偏微分方程，即齐次边界条件的二维泊松方程，

$$\nabla^2 u=f(x,y)\quad 在边界上\ u=0,\tag{6.7.1}$$

其中 $f(x,y)$ 是给定的. 如果该区域既不是矩形又不是圆形，分离变量法可能就难以或不能应用. 例如，考虑十边形，如图6.7.1所示.

可使用大量的检验函数 $T_i(x,y)$ 逼近解，这些函数与偏微分方程及其特征函数都没有任何关系. 不过，假设这些检验函数满足相应的齐次边界条件：

$$T_i(x,y)=0\quad 在边界上.\tag{6.7.2}$$

用这些检验函数(而不是特征函数)的级数(线性组合) $U(x,y)$ 逼近解 $u(x,y)$：

$$U(x,y)=\sum_{j=1}^{n}U_jT_j(x,y).\tag{6.7.3}$$

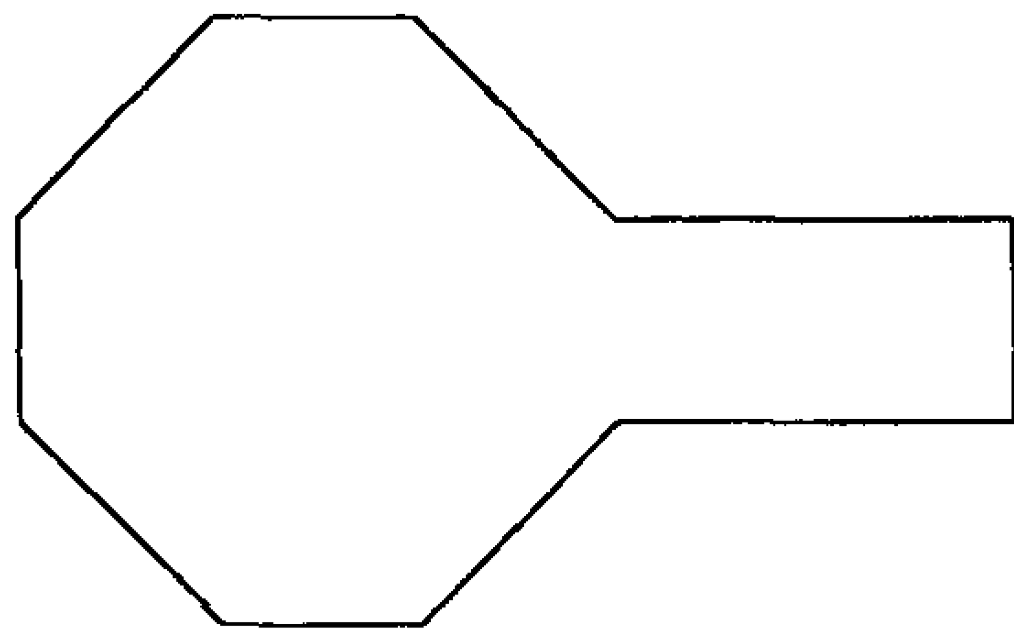


图6.7.1 区域(多边形例子)

267 在实际计算中，n 很大. 而对当今的计算机而言，n 往往达到数千.

这里不能坚持要求逼近满足偏微分方程(6.7.1)，而是要求逼近满足 n 个称为偏微分方程弱形式的条件，以便确定这 n 个常量. 要求偏微分方程(6.7.1)的两端乘以每个检验函数 $T_i(x,y)$，然后在整个区域上积分方程后有

$$\iint_R \nabla^2 u T_i \mathrm{d}A = \iint_R f T_i \mathrm{d}A, \tag{6.7.4}$$

其中 $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 进行分部积分可以简化左端. 利用$\nabla \cdot (T_i \nabla u) = T_i \nabla^2 u + \nabla T_i \cdot \nabla u$ 可得

$$\iint_R [\nabla \cdot (T_i \nabla u) - \nabla T_i \cdot \nabla u] \mathrm{d}A = \iint_R f T_i \mathrm{d}A. \tag{6.7.5}$$

再由(二维)散度定理$\left(\iint_R \nabla \cdot \vec{B} \mathrm{d}A = \oint \vec{B} \cdot \hat{n} \mathrm{d}s\text{,其中 d}s\text{ 是弧长微分}\right)$, 可得 $\iint_R \nabla T_i \cdot \nabla u \mathrm{d}A = \oint T_i \nabla u \cdot \hat{n} \mathrm{d}s - \iint_R f T_i \mathrm{d}A$. 由于边界的基值为0, $\oint T_i \nabla u \cdot \hat{n} \mathrm{d}s = 0$, 因为测试函数满足齐次边界条件(6.7.2), 就得到偏微分方程的(迦辽金)弱形式:

$$\iint_R \nabla T_i \cdot \nabla u \mathrm{d}A = -\iint_R f T_i \mathrm{d}A. \tag{6.7.6}$$

偏微分方程(6.7.1)的所有解 $u(x, y)$都满足弱形式(6.7.6). 要求逼近 $U(x, y)$(6.7.3)满足弱形式:

$$\sum_{j=1}^{n} U_j \iint_R \nabla T_i \cdot \nabla T_j \mathrm{d}A = -\iint_R f T_i \mathrm{d}A. \tag{6.7.7}$$

这是 n 个未知系数 U_i 的 n 个方程(每个检验函数对应一个方程).

引入满足 $K_{ij} = K_{ji}$的对称刚度矩阵 K:

$$K_{ij} = \iint_R \nabla T_i \cdot \nabla T_j \mathrm{d}A, \tag{6.7.8}$$

与向量 F, 其中分量 F_i 为

$$F_i = -\iint_R f T_i \mathrm{d}A. \tag{6.7.9}$$

(6.7.7)的 n 个方程为

$$\sum_{j=i}^{n} K_{ij} U_j = F_i, \tag{6.7.10}$$

268

它可以写成矩阵形式:

$$KU = F. \tag{6.7.11}$$

若给定检验函数, 则(6.7.11)右端是已知的. 解就是

$$U = K^{-1} F. \tag{6.7.12}$$

不过, 通常要获得计算解, 不必计算一个非常大的 $n \times n$ 阶矩阵 K 的逆.

二维正交特征函数. 如果边界非常简单, 可以用二维特征函数作为检验函数 $T_i(x, y) = \phi_i(x, y)$, 满足

$$\nabla^2 \phi_i = -\lambda_i \phi_i. \tag{6.7.13}$$

这些特征函数在二维意义下是正交的(见7.5节):

$$\iint_R \phi_i \phi_j \mathrm{d}A = 0 \qquad \text{若 } i \neq j. \tag{6.7.14}$$

在习题中将证明，不必使用分部积分法，直接从(6.7.4)由(6.7.13)导出刚度矩阵的另一个表达式：

$$K_{ij} = -\iint_R T_i \nabla^2 T_j \mathrm{d}A = -\iint_R \phi_i \nabla^2 \phi_j \mathrm{d}A = \lambda_j \iint_R \phi_i \phi_j \mathrm{d}A, \quad (6.7.15)$$

由特征函数的二维正交性(6.7.14)，可以看出刚度矩阵是对角的：

$$K_{ij} = 0 \qquad 若\ i \neq j. \quad (6.7.16)$$

(6.7.15)的对角元素是

$$K_{ii} = \lambda_i \iint_R \phi_i^2 \mathrm{d}A. \quad (6.7.17)$$

逼近解是有限级数(6.7.3)，其系数易由(6.7.11)或(6.7.12)确定(如果 $\lambda=0$ 不是特征值)：

$$U_i = \frac{F_i}{K_{ii}}, \quad (6.7.18)$$

其中(6.7.17)给定 K_{ii}. 这个逼近解是正交函数的无限级数截断. 有关此无限级数例子的讨论见8.6节.

269

频率(特征值)的迦辽金数值逼近. 假设要获得形状如图6.7.1所示的膜振动频率的数值逼近. 在7.2节证明了，振动膜满足二维波动方程 $\partial^2 u/\partial t^2 = c^2 \nabla^2 u$，在边界上 $u=0$. 在分离时间后，$u=\phi(x, y)h(t)$，振动频率 $c\sqrt{\lambda}$ 由下面的特征值问题确定：

$$\nabla^2 \phi = -\lambda \phi \quad (6.7.19)$$

在边界上 $\phi=0$. 由于(6.7.19)对应右端为 $f(x) = -\lambda\phi$ 的(6.7.1)，迦辽金方法可以用来逼近特征值与特征函数，特征函数可由检验函数(6.7.3)的级数 $\phi(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \phi_j T_j(x, y)$ 逼近. 利用偏微分方程(6.7.19)的弱形式(6.7.6)，(6.7.7)的左端仍可以写成刚度矩阵 K. 而用作(6.7.7)右端的 $f(x) = -\lambda\phi$ 包含一个不同的矩阵 M，因而矩阵形(6.7.11)为

$$K\phi = \lambda M \phi, \quad (6.7.20)$$

其中引入向量 ϕ，分量为 ϕ_j，而对称质量矩阵 M 的元素为

$$M_{ij} = \iint_R T_i T_j \mathrm{d}A. \quad (6.7.21)$$

(6.7.20)或 $M^{-1}K$ 的 n 个特征值逼近(6.7.19)的特征值. n 增大时，逼近会改进. Strang [1986]证明，利用质量矩阵 M 的楚列斯基分解会更好，而不用直接计算 $M^{-1}K$ 的特征值.

有限元. 由于使用的检验函数不是正交的，刚度矩阵就不是对角阵了. 不过，有限元会给出含有许多零元素的刚度矩阵，称为**稀疏矩阵**. 实际上，刚度矩阵非常大，利用一般方法计算(6.7.2)中的逆矩阵是不切实际的. 然而，由于刚度矩阵是稀疏的，所以就有求其逆矩阵的实用方法.

6.7.2 最简三角形有限元

逼近区域的最简单方法之一就是将区域划分为小三角形. 随着三角形个数的增加(最大三角形缩小)，逼近获得改善. 这里对多边形区域介绍这种方法. 有许多方法可将区域划分为三

角形(形成三角形网格). 开始时可以将区域随意地划分为三角形. [270]

先来说明(如图 6.7.1 所示的)十边形划分过程. 任取 4 个内点, 由此形成 16 个三角形(如图 6.7.2 所示). 一般地:

三角形个数 = 边界三角形个数 - 2 + 2(内点个数) (6.7.22)

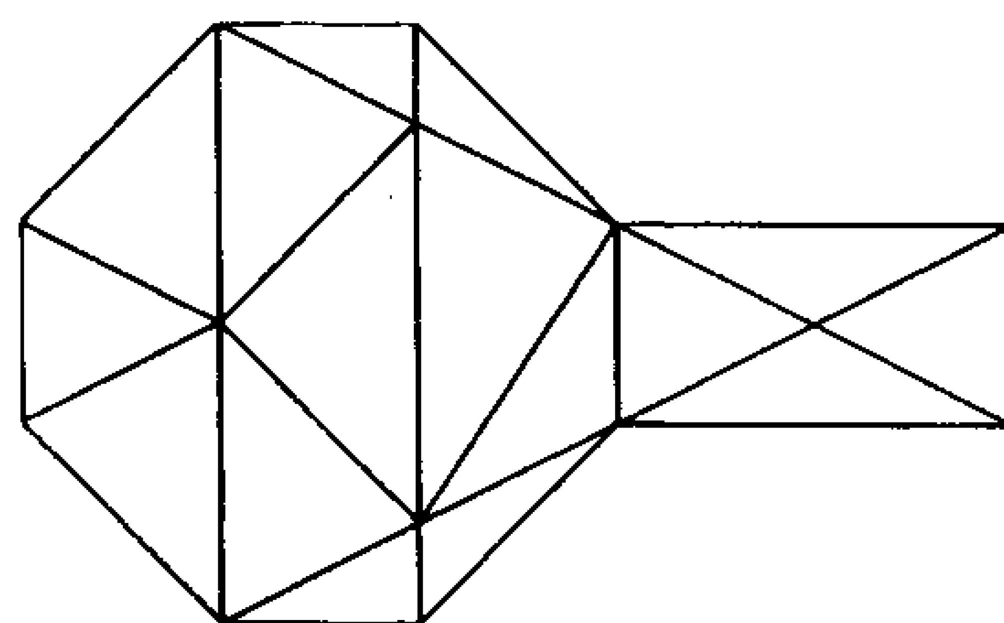


图 6.7.2 三角划分区域(不唯一)

这用不同的方式来数三角形的内角(180 × 三角形个数)都能看到. 每个内点完全被包围(360 × 内点个数), 而绕边界点的角是多边形的内角(180 × (边数 - 2)).

四个内点(x_i, y_i)给出四个未知量$U(x_i, y_i)$. 这形成了一个四维向量空间. 选择检验函数为这个四维向量空间最简单的基函数. 取检验函数$T_1(x, y)$满足$T_1(x_1, y_1)=1$, $T_1(x_2, y_2)=0$, $T_1(x_3, y_3)=0$, $T_1(x_4, y_4)=0$. 类似地, 检验函数$T_2(x, y)$满足$T_2(x_1, y_1)=0$, $T_2(x_2, y_2)=1$, $T_2(x_3, y_3)=0$, $T_2(x_4, y_4)=0$ 等. 这很容易推广到多于三个内点(检验函数)的情形.

对偏微分方程的逼近(6.7.3)是四个检验函数的线性组合,

$$U(x,y) = \sum_{j=1}^{4} U_j T_j(x,y).$$

注意它具有很好的以下特性:

$$\begin{aligned} U(x_1,y_1) &= U_1 \\ U(x_2,y_2) &= U_2 \\ U(x_3,y_3) &= U_3 \\ U(x_4,y_4) &= U_4. \end{aligned} \tag{6.7.23}$$

系数恰好是函数在第 n 个点的值. 因此用记号 U_j 表示系数. 这样得到差分方程组(6.7.10)或(6.7.11), 将证明其中的刚度矩阵是稀疏的. 由(6.7.23), 这些就表示 u 在每个内点值的差分方程. 所以, 由有限元方法导出的差分方程一般与用有限差分方法导出的差分方程是不同的. [271]

测试函数要处处有定义, 而不仅仅在内点. 有限元很多, 这里只讨论最简单的. 假设检验函数在每个三角形区域中都是线性的(将线看作一个简单的平面). 每个检验函数的峰值都会是 1, 在围绕这个顶点的三角形内线性地和持续地衰减到 0. 每个检验函数像座金字塔. 每个检验函数在那些与峰值顶点不相连的区域上为 0. 这个问题中的四个检验函数如图 6.7.3 所示. 当自由度(顶点, 检验函数)大时, 检验函数在大多数区域上为 0.

刚度矩阵的计算. 刚度矩阵

$$K_{ij} = \iint_R \nabla T_i \cdot \nabla T_j \mathrm{d}A \tag{6.7.24}$$

的计算方法是将每个小的三角形有限元的基值加(称为组装)起来. 刚度矩阵的元素不为零, 仅当是对角线元素或者是与相邻内顶点相对应的元素. 刚度矩阵对应于非相邻内顶点(由于检验函数大部分为 0)的元素为 0. 当有很多内点时, 刚度矩阵是稀疏的.

对应特定内顶点的刚度矩阵的对角线元素仅由围绕这个内顶点的那些三角形组装. 刚度矩阵对应相邻内顶点的元素为两个小三角形组装, 它们有一条连接两个相邻内顶点的公共边.

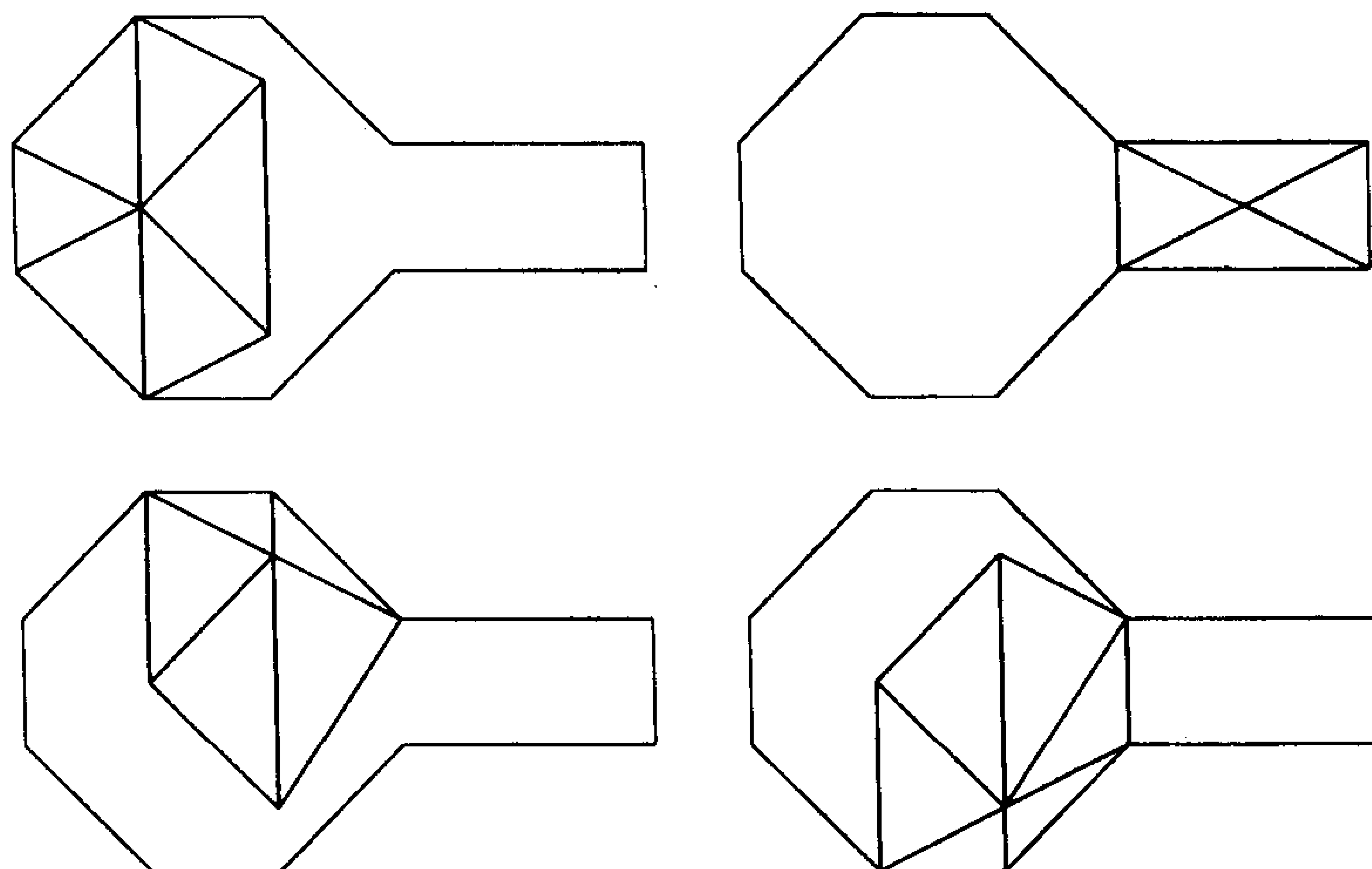


图 6.7.3 四个检验函数(每个对应一个内点)

对内角为 θ_i 的特定三角形，可以(在习题中)证明，对角线基值满足

$$k_{11} = K_{11} \text{ 中此三角形贡献的部分 } = \frac{1}{2\tan\theta_2} + \frac{1}{2\tan\theta_3}, \text{等等.}$$

相邻内顶点的基值为

$$k_{12} = K_{12} \text{ 中此三角形贡献的部分 } = -\frac{1}{2\tan\theta_3}, \text{等等.}$$

网格加细. 先从一个特定的网格开始(例如图 6.7.2 的四内点网格). 然后，一般以连接三角形各边中点对该三角形划分的方式获得加细网格. 这样，每个三角形变为四个相似的小三角形(见图 6.7.4). 在划分的过程中保持相似三角形会使数值计算容易一些，因为上面的公式表明，在第一次划分后，对刚度矩阵不再需要额外的计算.

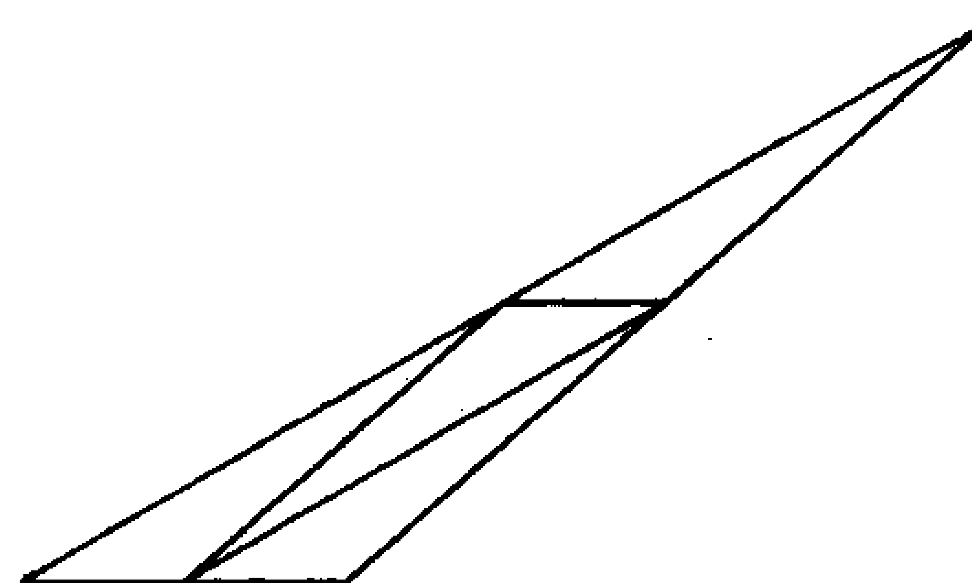


图 6.7.4 加细网格(每个三角形)

习题 6.7

6.7.1 考虑自选的多边形区域. 画出检验函数:

(a)两个内点的五边形. (b)三个内点的五边形.

(c)五个内点的五边形. (d)七个内点的五边形.

6.7.2 在习题 6.7.1 中有限元刚度矩阵的哪些项为 0?

6.7.3 从(6.7.4)导出 K_{ij} 的公式.

272 ~ 273

6.7.4 证明: $\int_R (\nabla U)^2 \mathrm{d}A = U^{\mathrm{T}}KU$. 这样，矩阵 K 能够等同于这个积分的计算.

6.7.5 (利用完全平方)证明:

$$\iint_R \left[\frac{1}{2}(\nabla U)^2 - f(x,y)U\right]\mathrm{d}A$$

的最小值出现在 $KU = F$ 时，其中 U 满足(6.7.3).

6.7.6 考虑(如图 6.7.5 所示的)三角形，其中 $P_1=(0,0)$，$P_2=(L,0)$，$P_3=(D,H)$，内角为 θ_i. 在三角形上，解是线性的，即 $U=a+bx+cy$.

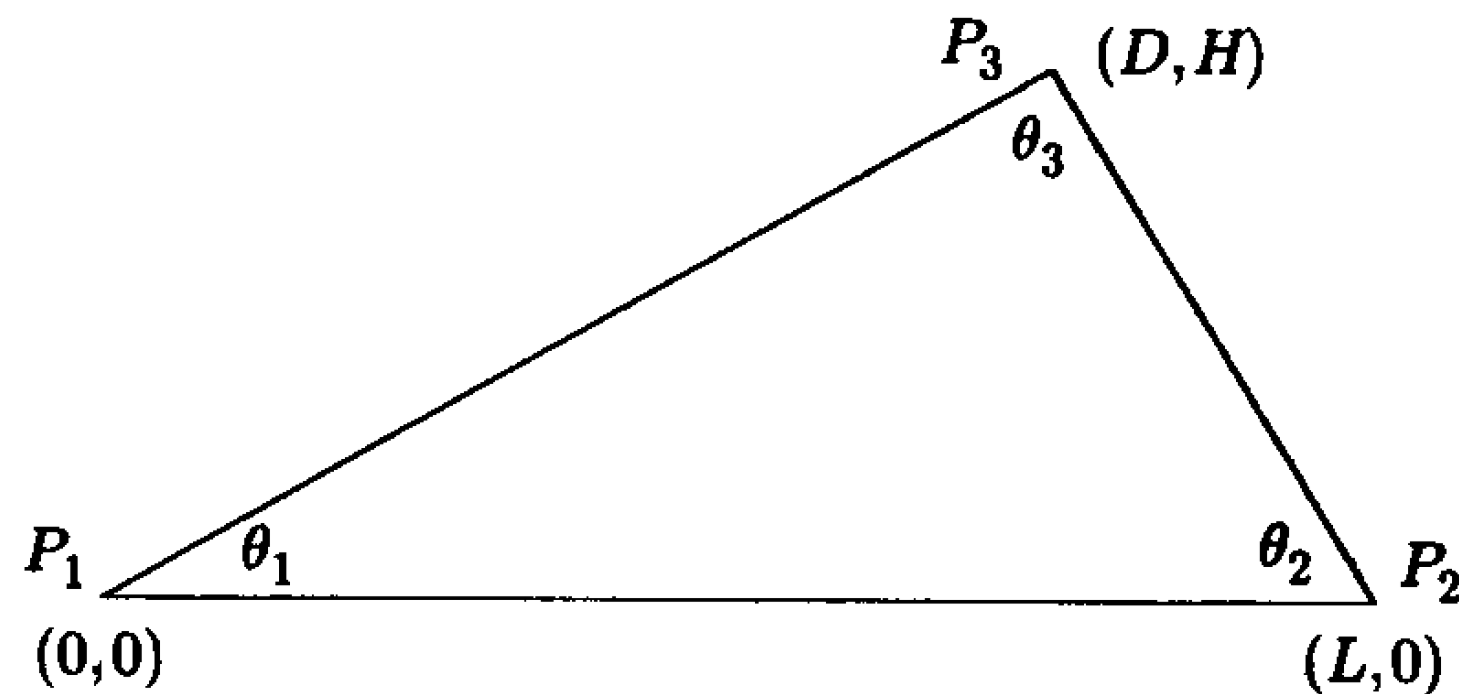


图 6.7.5 三角形有限元

(a) 证明 $\iint\limits_R (\nabla U)^2 \mathrm{d}A = (b^2+c^2)\frac{1}{2}LH$.

(b) 系数 a，b，c 由在三个顶点处的条件 $U(P_i)=U_i$ 来确定.

证明 $a=U_1$，$b=\dfrac{U_2-U_1}{L}$，$c=\dfrac{U_3-U_1-\frac{D}{L}(U_2-U_1)}{H}$.

(c) 证明 $\dfrac{1}{\tan\theta_1}=\dfrac{D}{H}$，$\dfrac{1}{\tan\theta_2}=\dfrac{L-D}{H}$，由 $\tan\theta_3=-\tan(\theta_1+\theta_2)=\dfrac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{\tan\theta_1\tan\theta_2-1}$ 证明 $\dfrac{1}{\tan\theta_3}=\dfrac{H}{L}-\dfrac{D}{H}+\dfrac{D^2}{HL}$.

(d) 利用习题 6.7.4 和上面的(a)、(b)、(c)部分证明这个三角形的基值 $K_{12}=-\dfrac{1}{2\tan\theta_3}$，并且刚度矩阵的其他元素也遵循这个规则.

6.7.7 继续做习题 6.7.6 的(d)部分，计算

(a) K_{11}　(b) K_{22}　(c) K_{33}　(d) K_{23}　(e) K_{13} 274

第7章 高维偏微分方程

7.1 引言

在前面对偏微分方程的讨论中，已经运用分离变量法解决了不少问题，但这些问题都只含有两个自变量：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)\qquad \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

在本章中，要说明如何把分离变量法推广到两个以上自变量的问题.

特别是针对各种物理区域和边界条件，讨论分析二维和三维常系数热传导方程的方法，

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\qquad (二维)\tag{7.1.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\qquad (三维)\tag{7.1.2}$$

还要分析三维定常热传导方程——拉普拉斯方程

275

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

在所有这些问题中，偏微分方程均至少要有三个自变量. 其他与热能流动无关的物理问题也可能包含两个以上的自变量. 例如，振动膜的垂直位移 u 满足二维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

还要提到，在声学中，扰动压力 u 满足三维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

这些都是要讨论和分析的问题.

7.2 时间变量的分离

我们将会看到类似的方法能够应用于各种问题. 先讨论任意形状的膜振动，再分析二维或三维区域内的热传导.

7.2.1 振动膜：任意形状

考虑任意形状膜振动的位移 u. 后面(7.3 节和 7.7 节)再专门讨论矩形和圆形膜的结果. 位移 $u(x, y, t)$满足二维波动方程：

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).} \tag{7.2.1}$$

初值条件为

$$u(x,y,0) = \alpha(x,y) \tag{7.2.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \beta(x,y), \tag{7.2.3}$$

与通常的做法一样，分离变量时先忽略这些初值条件. 在整个边界上给定齐次边界条件；在边界上 $u=0$ 是最常见的条件. 不过也有可能是，在一部分边界上位移为零，而在其余部分边界上"自由". 还有许多其他可能的边界条件.

下面应用分离变量法. 首先证明任意形状的膜问题能够通过寻求形式为 [276]

$$\boxed{u(x,y,t) = h(t)\phi(x,y)} \tag{7.2.4}$$

的乘积解，分离出时间变量. 其中 $\phi(x, y)$是变量 x，y 的未知函数. 这里不具体指明 $\phi(x, y)$的形式，因为可以期望 $\phi(x, y)$对不同区域或不同边界条件会有不同的结果. 后面会看到，对于矩形膜，$\phi(x, y)=F(x)G(y)$，而对圆形膜，$\phi(x, y)=F(r)G(\theta)$；这就是说，进一步所分离的形式依赖于区域. 正是这个原因，分析从(7.2.4)的一般形式入手. 事实上，对大多数几何上不如矩形或圆形简单的区域，$\phi(x, y)$是不能再分离的. 将(7.2.4)代入振动膜方程(7.2.1)，得到

$$\phi(x,y)\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2} = c^2 h(t)\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right). \tag{7.2.5}$$

想要按只有两个自变量的方式做，时间变量能够由对(7.2.5)两端除以 $h(t)\phi(x, y)$而分离出来(再用常数 c^2 除是方便的)：

$$\frac{1}{c^2}\frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{\phi}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) = -\lambda. \tag{7.2.6}$$

上式中第一个方程的左端仅是时间的函数，而右端仅是空间变量 x，y 的函数. 因此，(和前面一样)两者应该等于分离常数. 还要决定哪个符号表示分离常数方便，λ 还是 $-\lambda$. 由 $h(t)$的常微分方程可看出，$-\lambda$ 较为方便些(后面会解释). 于是得到两个方程，但与有两个自变量的情形不同，其中一个仍是偏微分方程：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2} = -\lambda c^2 h} \tag{7.2.7}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\lambda\phi.} \tag{7.2.8}$$

对分离常数选用 $-\lambda$ 的原因是，当 $\lambda>0$ 时，与时间相关的微分方程有振动解. 如果 $\lambda>0$，h 是 $\sin c\sqrt{\lambda}t$与 $\cos c\sqrt{\lambda}t$的线性组合；它以频率 $c\sqrt{\lambda}$振动. λ 的值决定振动膜的固有振动频率. [277] 然而，并不能保证 $\lambda>0$. 要证明 $\lambda>0$，必须分析特征值问题(7.2.8)，其中，ϕ 在整个边界上满足齐次边界条件(例如，在边界上 $\phi=0$). 此处的特征值问题本身就含有一个线性齐次偏微分方程. 简而言之，将通过引入适合(7.2.8)的瑞利商证明 $\lambda>0$. 在分析(7.2.8)之前，先来证明它也在其他一些问题中出现.

7.2.2 热传导：任意区域

下面分析二维区域中的热能流动问题. 对于二维热传导方程(7.1.1)，假设导热系数为常数且无热源，现在来寻求其乘积形式的解

$$\boxed{u(x,y,t) = h(t)\phi(x,y).} \tag{7.2.9}$$

把(7.2.9)代入(7.1.1)，然后除以 $kh(t)\phi(x, y)$，得到

$$\frac{1}{k}\frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\phi}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right). \tag{7.2.10}$$

引进 $-\lambda$ 形式的分离常数，以便乘积解的时间相关部分按预期的指数衰减(如果 $\lambda>0$)，而不是按指数增加. 这样，两个方程是

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= -\lambda kh \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} &= -\lambda\phi. \end{aligned}} \tag{7.2.11}$$

特征值 λ 与时间相关部分的衰减速度有关. 特征值 λ 是由边值问题决定的，这个边值问题包括偏微分方程(7.2.11)和在整个区域边界上的相应边值条件.

对于三维区域内的热能流动，方程(7.1.2)是合理的. 仍然要求如下形式的乘积解

$$\boxed{u(x,y,z,t) = h(t)\phi(x,y,z),} \tag{7.2.12}$$

278 分离变量之后，得到与(7.2.11)相似的方程，

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= -\lambda kh \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} &= -\lambda\phi. \end{aligned}} \tag{7.2.13}$$

特征值 λ 由寻求方程(7.2.13)在整个边界上满足齐次边界条件的非平凡解来确定.

7.2.3 小结

在本节的情形下，偏微分方程解的空间部分 $\phi(x, y)$ 或 $\phi(x, y, z)$ 满足由偏微分方程

$$\boxed{\nabla^2\phi = -\lambda\phi} \tag{7.2.14}$$

和 ϕ 满足的齐次边界条件组成的特征值问题，边值条件可以有形式[见(1.5.2)和(4.5.5)]

$$\alpha\phi + \beta\nabla\phi\cdot\hat{n} = 0, \tag{7.2.15}$$

其中 α 和 β 可以依赖 x，y 和 z. 若 $\beta=0$，(7.2.15)是固定边界条件. 若 $\alpha=0$，(7.2.15)是绝热或自由边界条件. 若 $\alpha\neq0$ 且 $\beta\neq0$，则(7.2.15)是牛顿冷却定律或弹性边界条件的高维形式. 在7.4节中将要叙述与通常一维施图姆-刘维尔特征值问题定理类似的二维或三维特征值问题的一般结果. 不过，要先介绍在 $\phi(x, y)$ 可进一步分解简单的二维特征值问题的解，它给出了两个一维特征值问题.

习题 7.2

7.2.1 对满足(7.2.1)的任意形状的振动膜，证明：在分离时间变量后，能够导出(7.2.14).

7.2.2 对满足(7.1.1)的任意二维区域内的热传导问题，证明在分离时间变量后，能够导出(7.2.14).

7.2.3 (a)假设在矩形的四条边上 $\phi=0$，试求方程(7.2.14)的乘积解 $\phi=f(x)g(y)$.（提示：可参阅 7.3 节.） 279

(b)利用上面(a)的结果，求解振动矩形膜的初值问题(所有的边固定).

(c)利用上面(a)的结果，在所有边上温度为零的条件下，求解二维区域上热传导方程的初值问题.

7.3 振动矩形膜

这一节要分析图 7.3.1 所示矩形膜的振动. 膜的垂直位移 $u(x,y,t)$ 满足二维波动方程：

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).} \tag{7.3.1}$$

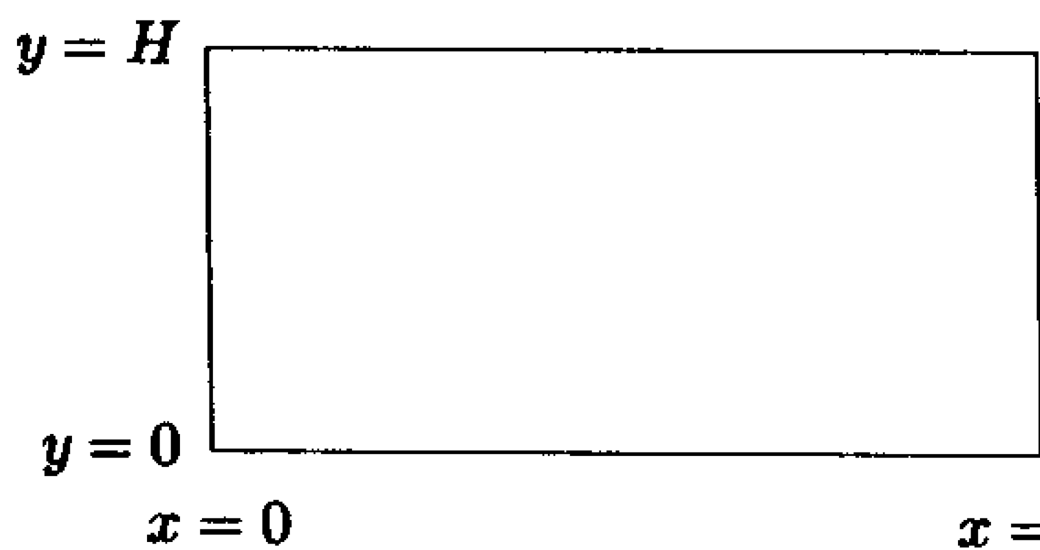


图 7.3.1 矩形膜

假设边界的四个边是固定的，位移是零：

$$u(0,y,t)=0 \qquad u(x,0,t)=0 \tag{7.3.2}$$

$$u(L,y,t)=0 \qquad u(x,H,t)=0. \tag{7.3.3}$$

要求的是膜在时刻 t 的位移，如果初始位置及速度是

$$u(x,y,0)=\alpha(x,y) \tag{7.3.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0)=\beta(x,y). \tag{7.3.5}$$

正如 7.2.1 节中所表明的，由于偏微分方程及边界条件是线性和齐次的，就可应用分离变量法. 首先，通过寻求乘积解

$$u(x,y,t)=h(t)\phi(x,y) \tag{7.3.6}$$

280

只分离时间变量. 依据前面的计算，能够引入分离常数 $-\lambda$ 及如下的两个方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2}=-\lambda c^2 h \tag{7.3.7}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}=-\lambda\phi. \tag{7.3.8}$$

后面会证明 $\lambda>0$，此时 $h(t)$ 是 $\operatorname{sinc}\sqrt{\lambda}t$ 与 $\operatorname{cosc}\sqrt{\lambda}t$ 的线性组合. 齐次边界条件给出的特征值问题是

$$\boxed{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}=-\lambda\phi} \tag{7.3.9}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll}\phi(0,y)=0 & \phi(x,0)=0\\ \phi(L,y)=0 & \phi(x,H)=0;\end{array}} \tag{7.3.10}$$

即沿整个边界 $\phi=0$. 称(7.3.9)～(7.3.10)为一个二维特征值问题.

特征值问题本身是一个有两个自变量的线性齐次偏微分方程和齐次边界条件. 这样(由于边界简单)，可以希望能在笛卡儿坐标系下用分离变量法求出(7.3.9)～(7.3.10)的解. 换句话说，要寻找方程(7.3.9)～(7.3.10)的如下乘积解：

$$\phi(x,y) = f(x)g(y). \tag{7.3.11}$$

在开始计算之前，由(7.3.6)就可以看出，(7.3.11)等价于每个自变量函数的乘积

$$u(x,y,t) = f(x)g(y)h(t). \tag{7.3.12}$$

在本节附录中将会证明：把(7.3.12)代入波动方程(7.3.1)中所得的结果与下面所得的结果是相同的，即把(7.3.11)代入到二维特征值问题(7.3.9)：

$$g(y)\frac{d^2f}{dx^2}+f(x)\frac{d^2g}{dy^2} = -\lambda f(x)g(y). \tag{7.3.13}$$

在等式(7.3.13)两端同除以$f(x)g(y)$就可以分离x和y，整理后得到

$$\frac{1}{f}\frac{d^2f}{dx^2} = -\lambda-\frac{1}{g}\frac{d^2g}{dy^2} = -\mu. \tag{7.3.14}$$

281 第一个表达式仅是x的函数，而第二个表达式仅是y的函数，因此引入了第二个分离常数. 取其为$-\mu$使得当$\mu>0$时，方程$d^2f/dx^2=-\mu f$有(所希望的)振动解. 这样，有两个自变量的偏微分方程变量就分离出两个常微分方程：

$$\boxed{\frac{d^2f}{dx^2} = -\mu f} \tag{7.3.15}$$

$$\boxed{\frac{d^2g}{dy^2} = -(\lambda-\mu)g.} \tag{7.3.16}$$

方程(7.3.15)和(7.3.16)包含两个要确定的分离常数λ和μ. 而$h(t)$满足常微分方程：

$$\boxed{\frac{d^2h}{dt^2} = -\lambda c^2h.} \tag{7.3.17}$$

当对含三个变量的偏微分方程分离变量$u(x, y, t)=f(x)g(y)h(t)$时，得到三个常微分方程，每个自变量函数一个方程. 不过将只会有两个分离常数.

为了确定分离常数，需要利用齐次边界条件(7.3.10). 乘积式(7.3.11)暗含着

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \quad f(L) = 0 \\ g(0) &= 0, \quad g(H) = 0. \end{aligned} \tag{7.3.18}$$

而三个常微分方程中，仅有两个是特征值问题. 有x和y的齐次边界条件. 因而，

$$\frac{d^2f}{dx^2} = -\mu f \quad 满足 \quad f(0) = 0 \text{ 和 } f(L) = 0 \tag{7.3.19}$$

是x变量的施图姆–刘维尔特征值问题，其中μ为特征值，$f(x)$是特征函数. 类似地，依赖y的问题是一个正则施图姆–刘维尔特征值问题：

$$\frac{d^2g}{dy^2} = -(\lambda-\mu)g \quad 满足 \quad g(0) = 0 \text{ 和 } g(H) = 0. \tag{7.3.20}$$

其中，λ为特征值，$g(y)$为相应的特征函数.

方程(7.3.19)与(7.3.20)不仅是施图姆–刘维尔特征值问题，而且还是读者相当熟悉的问题. 略去众所周知的的细节步骤，这些特征值是

282

$$\mu_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1,2,3,\cdots, \tag{7.3.21}$$

而对应的特征函数是

$$f_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{7.3.22}$$

这就确定了分离常数 μ_n 可取的值.

对于 μ_n 的每个值，(7.3.20)仍是个特征值问题. 对每个 n，都有无穷多个 λ 的值. 这样，λ 应该用双下标，λ_{nm}. 事实上，(7.3.20)的特征值是

$$\lambda_{nm} - \mu_n = \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2, m = 1,2,3,\cdots, \tag{7.3.23}$$

这里(对每个 n)，必须用不同的下标表示各个 y 特征值. 对应的特征函数是

$$g_{nm}(y) = \sin\frac{m\pi y}{H}. \tag{7.3.24}$$

现在，分离常数 λ_{nm}可由(7.3.23)确定：

$$\boxed{\lambda_{nm} = \mu_n + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2,} \tag{7.3.25}$$

其中，$n=1, 2, 3, \cdots$和 $m=1, 2, 3, \cdots$. 二维特征值问题(7.3.9)有(7.3.25)给出的特征值 λ_{nm}，对应的特征函数为两个一维特征函数的乘积. 符号 $\phi_{nm}(x, y)$表示对应特征值 λ_{nm}的二维特征函数，有

$$\boxed{\phi_{nm}(x,y) = \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{H},} \quad \begin{matrix} n = 1,2,3,\cdots \\ m = 1,2,3,\cdots \end{matrix} \tag{7.3.26}$$

显而易见齐次边界条件是多么容易满足.

由(7.3.25)就清楚地表明(对这个问题)所有的特征值都是正的. 因此，乘积解的时间相关部分(如前面所猜测)是 $\sin c\sqrt{\lambda_{nm}}t$ 和 $\cos c\sqrt{\lambda_{nm}}t$，固有频率振动是 $c\sqrt{\lambda_{nm}} = c\sqrt{(n\pi/L)^2 + (m\pi/H)^2}$，$n=1, 2, 3, \cdots$且 $m=1, 2, 3, \cdots$. 考虑位移 u 得到两个二重无穷乘积解族：$\sin n\pi x/L\sin m\pi y/H\sin c\sqrt{\lambda_{nm}}t$ 及 $\sin n\pi x/L\sin m\pi y/H\cos c\sqrt{\lambda_{nm}}t$. 与振动弦的情形一样，每个这种特定形式的乘积解叫做一个振动模式，在图 7.3.2 中表示出了其中的一些模式. 对每个固定的 t，虚线表示位移的等高线. 随时间变化，形状保持不变，只是振幅作周期性变化. 每个模式都是一个驻波. 在模式中位移始终为零的曲线称为*结点曲线*，它们画成实线. 明显地，胞腔与其相邻胞腔总处于不同的相位，即一个胞腔有正位移而相邻胞腔有负位移(用“+”和“-”表示). 283

叠加原理意味着应该考虑所有可能乘积解的线性组合，也就是包括两个解族，对 n 及 m 求和

$$\boxed{\begin{aligned} u(x,y,t) = &\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{nm}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{H}\cos c\sqrt{\lambda_{nm}}t \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{nm}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{H}\sin c\sqrt{\lambda_{nm}}t. \end{aligned}} \tag{7.3.27}$$

并希望两族系数 A_{nm}和 B_{nm}能够由两个初值条件确定. 例如，由 $u(x, y, 0) = \alpha(x, y)$得到

$$\alpha(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_{nm}\sin\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\frac{m\pi y}{H}. \tag{7.3.28}$$

级数(7.3.28)是一个二重傅里叶级数的例子. 这里不进行理论上的讨论，只给出用(7.3.28)

计算 A_{nm} 的方法(在7.4节中，将介绍一种更简单的方法)．对固定的 x，注意 $\sum_{n=1}^{\infty} A_{nm}\sin n\pi x/L$ 只与 m 有关；而且，它一定是 $\alpha(x,y)$ 在 $0<y<H$ 上关于 y 的傅里叶正弦级数的系数．因此，根据傅里叶正弦级数理论，对每个 m，容易确定系数：

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{nm}\sin\frac{n\pi x}{L} = \frac{2}{H}\int_0^H \alpha(x,y)\sin\frac{m\pi y}{H}\mathrm{d}y, \tag{7.3.29}$$

(7.3.29)式对所有的 x 都成立；等式右端是 x(不是 y，因为 y 已从0到 H 积去了)的函数．对每个 m，左端是关于 x 的傅里叶正弦级数；实际上是右端 $2/H\int_0^H \alpha(x,y)\sin m\pi y/H\mathrm{d}y$ 的傅里叶正弦级数．这个关于 x 的傅里叶正弦级数的系数很容易确定：

$$\boxed{A_{nm} = \frac{2}{L}\int_0^L\left[\frac{2}{H}\int_0^H \alpha(x,y)\sin\frac{m\pi y}{H}\mathrm{d}y\right]\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x.} \tag{7.3.30}$$

并可以简化为在整个矩形区域上的二重积分，而不是两个重叠的单积分．这样就由其中一个初值条件确定了一族系数．

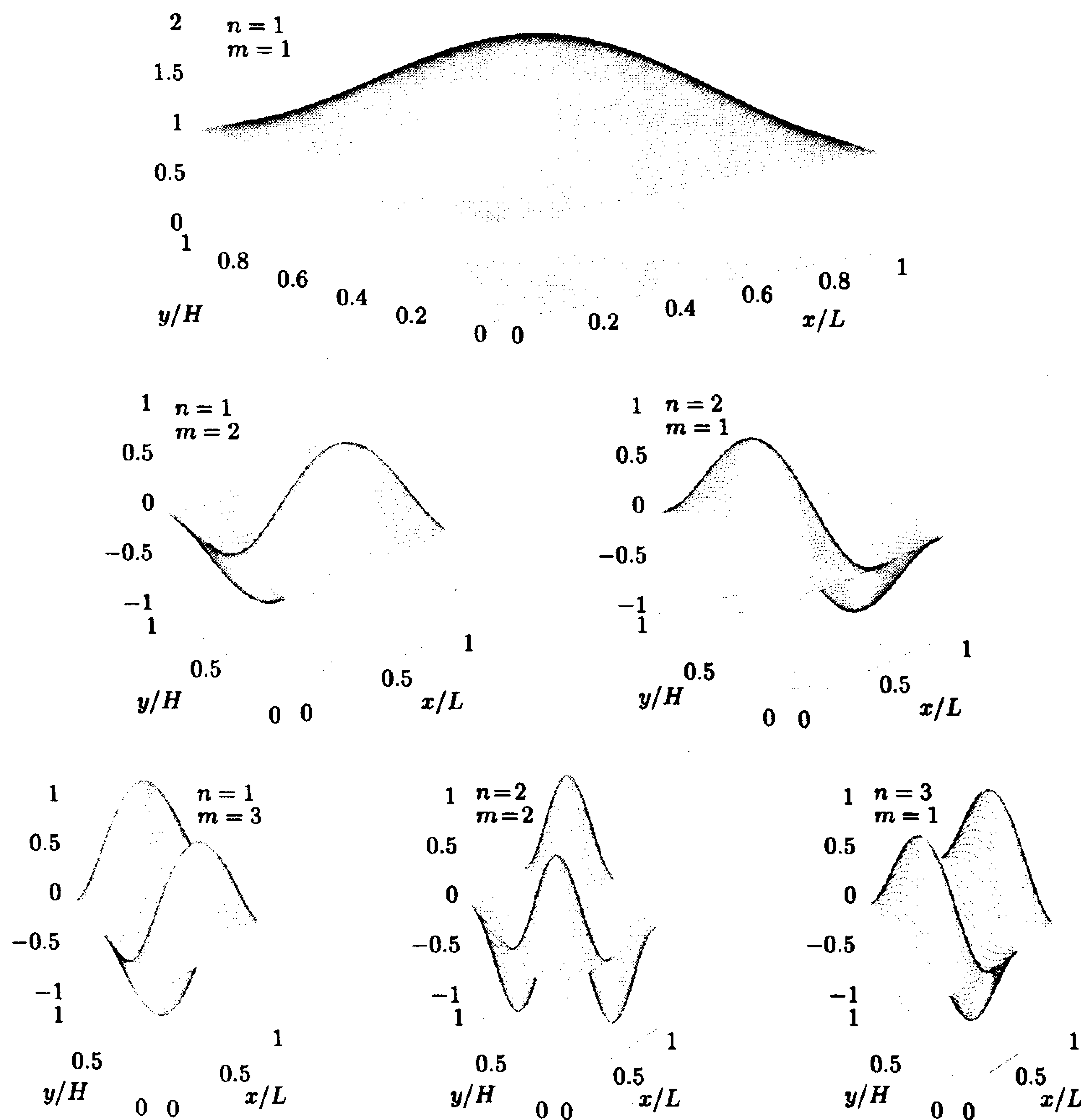


图7.3.2 矩形振动膜模式的结点曲线

另一族系数 B_{nm} 可以用相似的方法确定. 特别由(7.3.27)及 $\partial u/\partial t(x,\ y,\ 0)=\beta(x,\ y)$ 得到

$$\beta(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}c\sqrt{\lambda_{nm}}B_{nm}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{H}. \tag{7.3.31}$$

因此还是利用关于 y 的傅里叶正弦级数和关于 x 的傅里叶正弦级数，就得到

$$\boxed{c\sqrt{\lambda_{nm}}B_{nm}=\frac{4}{LH}\int_0^L\int_0^H\beta(x,y)\sin\frac{m\pi y}{H}\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}y\mathrm{d}x.} \tag{7.3.32}$$

初值问题的解是(7.3.27)给出的二重无穷级数，系数由(7.3.30)和(7.3.32)确定.

[284～285]

这就证明了，将偏微分方程的三个变量都分离时，得到三个常微分方程，其中两个是特征值问题. 一般地，完全分离 N 变量偏微分方程时，会有 N 个常微分方程，其中 $N-1$ 个是一维特征值问题(确定 $N-1$ 个分离常数). 对 $N=3$(本节)及 $N=2$ 已经证明了这一点.

习题 7.3

7.3.1 在二维矩形区域 $0<x<L$，$0<y<H$ 上考虑热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

其初始条件是

$$u(x,y,0)=f(x,y).$$

试求初值问题并分析在 $t\to\infty$ 时的温度，如果边界条件是

*(a) $u(0,\ y,\ t)=0$, $u(L,\ y,\ t)=0$, $u(x,\ 0,\ t)=0$, $u(x,\ H,\ t)=0$

(b) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ y,\ t)=0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L,\ y,\ t)=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,\ 0,\ t)=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,\ H,\ t)=0$

*(c) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ y,\ t)=0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L,\ y,\ t)=0$, $u(x,\ 0,\ t)=0$, $u(x,\ H,\ t)=0$

(d) $u(0,\ y,\ t)=0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L,\ y,\ t)=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,\ 0,\ t)=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,\ H,\ t)=0$

(e) $u(0,\ y,\ t)=0$, $u(L,\ y,\ t)=0$, $u(x,\ 0,\ t)=0$,

$\frac{\partial u}{\partial y}(x,\ H,\ t)+hu(x,\ H,\ t)=0$, $(h>0)$

7.3.2 在三维长方体区域 $0<x<L$，$0<y<H$，$0<z<W$ 上，考虑热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

其初始条件是

$$u(x,y,z,0)=f(x,y,z).$$

试求初值问题并分析在 $t\to\infty$ 时的温度，如果边界条件是

(a) $u(0,\ y,\ z,\ t)=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,\ 0,\ z,\ t)=0$, $\frac{\partial u}{\partial z}(x,\ y,\ 0,\ t)=0$,

$u(L,\ y,\ z,\ t)=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,\ H,\ z,\ t)=0$, $u(x,\ y,\ W,\ t)=0$

*(b) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ y,\ z,\ t)=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,\ 0,\ z,\ t)=0$, $\frac{\partial u}{\partial z}(x,\ y,\ 0,\ t)=0$,

$\frac{\partial u}{\partial x}(L,\ y,\ z,\ t)=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,\ H,\ z,\ t)=0$, $\frac{\partial u}{\partial z}(x,\ y,\ W,\ t)=0$

[286]

7.3.3 在矩形区域($0<x<L$, $0<y<H$)上，考虑方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+k_2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

求其满足条件

$$u(x,y,0)=f(x,y)\quad \begin{matrix} u(0,y,t)=0 & \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0,t)=0 \\ u(L,y,t)=0 & \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,H,t)=0 \end{matrix}$$

的解.

7.3.4 考虑振动矩形膜($0<x<L$, $0<y<H$)的波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

其初始条件是

$$u(x,y,0)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0)=f(x,y).$$

求解初值问题，如果下面条件成立：

(a) $u(0,y,t)=0$, $u(L,y,t)=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,0,t)=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,H,t)=0$

*(b) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,y,t)=0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L,y,t)=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,0,t)=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,H,t)=0$

7.3.5 考虑

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-k\frac{\partial u}{\partial t},\quad k>0.$$

(a) 简要解释这个方程的物理含义.

(b) 假设 $u(x,y,t)=f(x)g(y)h(t)$. 求 f, g 和 h 所满足的常微分方程.

7.3.6 在正柱体上，考虑拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

此柱体底的形状任意(见图7.3.3)，顶面是 $z=H$，底面是 $z=0$. 假设

$$\frac{\partial}{\partial z}u(x,y,0)=0$$

$$u(x,y,H)=f(x,y)$$

且在侧面上 $u=0$.

(a) 分离出变量 z.

*(b) 若区域是三维长方体区域 $0<x<L$, $0<y<W$, $0<z<H$，求解 $u(x,y,z)$.

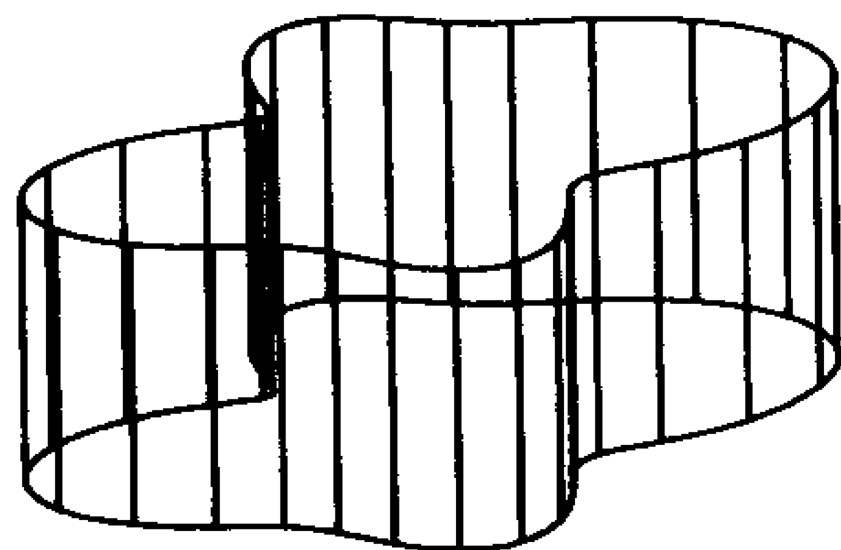


图 7.3.3

287

7.3.7 如可能，在三维长方体 $0<x<L$, $0<y<W$, $0<z<H$ 上求解拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

其边界条件是

(a) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,y,z)=0$, $u(x,0,z)=0$, $u(x,y,0)=f(x,y)$,

$\frac{\partial u}{\partial x}(L,y,z)=0$, $u(x,W,z)=0$, $u(x,y,H)=0$

(b) $u(0,y,z)=0$, $u(x,0,z)=0$, $u(x,y,0)=0$,

$u(L,y,z)=0$, $u(x,W,z)=f(x,z)$, $u(x,y,H)=0$

* (c) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y, z)=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, z)=0$, $\frac{\partial u}{\partial z}(x, y, 0)=0$,

$\frac{\partial u}{\partial x}(L, y, z)=f(y, z)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x, W, z)=0$, $\frac{\partial u}{\partial z}(x, y, H)=0$

* (d) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y, z)=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, z)=0$, $\frac{\partial u}{\partial z}(x, y, 0)=0$,

$u(L, y, z)=g(y, z)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x, W, z)=0$, $\frac{\partial u}{\partial z}(x, y, H)=0$

7.3 节附录：另一种分离变量法概要

对方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{7.3.33}$$

的另一种(等价的)分离变量法是假定乘积解为

$$u(x,y,t)=f(x)g(y)h(t). \tag{7.3.34}$$

将(7.3.34)代入(7.3.33)，然后两端除以 $c^2f(x)g(y)h(t)$，引入分离常数 $-\lambda$，得到

$$\frac{1}{c^2}\frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2}=\frac{1}{f}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2}=-\lambda, \tag{7.3.35}$$

288

由此给出

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2}=-\lambda c^2 h.} \tag{7.3.36}$$

进一步分离方程(7.3.35)：

$$\frac{1}{f}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}=-\lambda-\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2}=-\mu, \tag{7.3.37}$$

引入第二个分离常数 $-\mu$：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}=-\mu f} \tag{7.3.38}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2}=-(\lambda-\mu)g.} \tag{7.3.39}$$

这样就导出了同样的三个常微分方程(有两个分离常数).

7.4 特征值问题 $\nabla^2\phi+\lambda\phi=0$ 的定理叙述和说明

在二维或三维区域 R 上求解热传导方程和波动方程(物理特性不变，例如密度)时，我们证明了乘积解 $u(x, y, z, t)=\phi(x, y, z)h(t)$ 的空间部分 $\phi(x, y, z)$ 满足下面的多维特征值问题：

$$\boxed{\nabla^2\phi+\lambda\phi=0,} \tag{7.4.1}$$

在整个边界上有

$$a\phi+b\,\nabla\phi\cdot\hat{n}=0, \tag{7.4.2}$$

其中 a 和 b 依赖于 x，y 及 z. 方程(7.4.1)叫做亥姆霍兹方程.

方程(7.4.1)可以一般化为

289

$$\nabla\cdot(p\,\nabla\phi)+q\phi+\lambda\sigma\phi=0, \tag{7.4.3}$$

式中p，q和σ是x，y及z的函数. 这个特征值问题[边界条件为(7.4.2)]是一维正则施图姆-刘维尔特征值问题的直接相似问题. 下面讨论比较简单的情形(7.4.1)，此时$p=\sigma=1$，$q=0$. 把(7.4.3)的讨论放在(7.5节的)习题中.

只有在十分简单的几何区域(如7.3节的矩形区域、7.7节的圆域)上，方程(7.4.1)才能显式求解. 而在其他情形，可能要依靠数值法了. (7.4.1)的某些一般性质是相当有用的，都与一维施图姆-刘维尔特征值问题的结果类似. 类似的原因将在下一节讨论. 下面就简述(7.4.1)及(7.4.2)在二维情形的定理：

1. 所有特征值都是实值.
2. 存在无穷多个特征值，存在最小特征值，但没有最大特征值.
3. 对应同一个特征值的特征函数可以有多个(与正则施图姆-刘维尔特征值问题不同).
4. 特征函数$\phi(x,y)$形成"完全"集，即任何分段光滑函数$f(x,y)$均可用特征函数的广义傅里叶级数表示：
$$f(x,y)\sim\sum_{\lambda}a_{\lambda}\,\phi_{\lambda}(x,y) \tag{7.4.4}$$
这里$\sum_{\lambda}a_{\lambda}\,\phi_{\lambda}$表示所有特征函数的线性组合. 如果系数$a_{\lambda}$选取适当，级数平均收敛.
5. 属于不同特征值(λ_1和λ_2)的特征函数在R上关于权函数$\sigma(\sigma=1)$正交. 数学表示为
$$\iint_R\phi_{\lambda_1}\phi_{\lambda_2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\ 若\ \lambda_1\neq\lambda_2, \tag{7.4.5}$$
其中$\iint_R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$表示区域$R$上的积分. 另外，属于同一个特征值的不同特征函数可以用格拉姆-施密特方法(见7.5节)正交化. 因此，只要ϕ_{λ_1}与ϕ_{λ_2}独立，即使$\lambda_1=\lambda_2$，仍可假设(7.4.5)成立.
6. 特征值λ可以通过瑞利商与其特征函数相联系：
$$\lambda=\frac{-\oint\phi\,\nabla\phi\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}s+\iint_R|\nabla\phi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_R\phi^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}. \tag{7.4.6}$$

290

边界条件通常能简化边界积分.

其中，$\hat{n}$是单位外法向量，$\oint\mathrm{d}s$是在二维区域边界上的闭曲线积分，$\mathrm{d}s$是弧长微元. 三维的结果几乎一样，只是要把$\iint$换成$\iiint$，边界曲线积分$\oint\mathrm{d}s$换成边界曲面积分$\oiint\mathrm{d}s$，$\mathrm{d}s$是面积微元.

例. 在7.5节会证明上面定理的一些结果. 为了理解它们的含义，下面用7.3节的例子说明定理的大部分内容. 在零边界条件下，矩形($0<x<L$，$0<y<H$)膜振动的相关特征值问

题是

$$\boxed{\begin{array}{ll}\nabla^2\phi+\lambda\phi=0 & \\ \phi(0,y)=0 & \phi(x,0)=0 \\ \phi(L,y)=0 & \phi(x,H)=0.\end{array}} \tag{7.4.7}$$

其特征值和对应的特征函数是

$$\boxed{\lambda_{nm}=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2}\begin{array}{l}n=1,2,3,\cdots\\ m=1,2,3,\cdots\end{array}\quad \text{满足}\quad \boxed{\phi_{nm}(x,y)=\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{H}.} \tag{7.4.8}$$

1. **实特征值**. 计算(7.4.7)的特征值时，在特征函数以乘积形式存在的假设下，(7.4.8)证明了特征值为实的. 定理保证了特征值总是实的.

2. **特征值的排序**. 对(7.4.7)，有二重无限个特征值，即，$\lambda_{nm}=(n\pi/L)^2+(m\pi/H)^2$，$n=1$，2，3，$\cdots$和 $m=1$，2，3，$\cdots$. 最小的特征值是 $\lambda_{11}=(\pi/L)^2+(\pi/H)^2$，但没有最大特征值.

3. **多重特征值**. 对$\nabla^2\phi+\lambda\phi=0$，定理说，一般可能有多个特征函数对应同一个特征值. 为了说明这一点，在 $L=2H$ 的情形考虑(7.4.7)，那么

$$\lambda_{nm}=\frac{\pi^2}{4H^2}(n^2+4m^2) \tag{7.4.9}$$

且

$$\phi_{nm}=\sin\frac{n\pi x}{2H}\sin\frac{m\pi y}{H}. \tag{7.4.10}$$

可以看出，多个特征函数有可能对应同一个特征值. 例如，$n=4$，$m=1$ 与 $n=2$，$m=2$ 给出相同的特征值：

$$\lambda_{41}=\lambda_{22}=\frac{\pi^2}{4H^2}20.$$

291

对 $n=4$，$m=1$，特征函数 $\phi_{41}=\sin 4\pi x/2H\ \sin\pi y/H$，而对 $n=2$，$m=2$，特征函数 $\phi_{22}=\sin 2\pi x/2H\ \sin 2\pi y/H$. 这些特征函数的结点曲线见图 7.4.1，它们是对应相同特征值 $\lambda=\pi^2/4H^2 20$ 的不同特征函数. 有相同的特征值一点都不奇怪，原因是在这些模式中振动的膜有相同尺寸的区域：一个是 $H\times H/2$，另一个是 $H/2\times H$. 由对称性知，它们有相同的固有频率(因为固有频率是 $c\sqrt{\lambda}$，所以有相同的特征值). 事实上，一般由对称性[及公式(7.4.9)]，$\lambda_{(2n)m}=\lambda_{(2m)n}$.

不过，由与对称无关的原因而出现多个特征函数也是有可能的. 例如，$n=1$，$m=4$ 与 $n=7$，$m=2$ 时，有相同的特征值：$\lambda_{14}=\lambda_{72}=(\pi^2/4H^2)65$. 对应的特征函数是 $\phi_{14}=\sin\pi x/2H\ \sin 4\pi y/H$ 和 $\phi_{72}=\sin 7\pi x/2H\ \sin 2\pi y/H$. 这些特征函数的结点曲线见图 7.4.2. 这两种形状按相同的频率振动只是巧合. 在这种情形下，有可能二个特征函数对应同一个特征值. 甚至还可以找到更大的重数(或退化). 由 $\lambda_{14}=\lambda_{72}=(\pi^2/4H^2)65$，则 $\lambda_{28}=\lambda_{(14)4}=(\pi^2/4H^2)260$. 而由对称，$\lambda_{28}=\lambda_{(16)1}$及 $\lambda_{(14)4}=\lambda_{87}$. 这样，

$$\lambda_{28}=\lambda_{(16)1}=\lambda_{(14)4}=\lambda_{87}=\left(\frac{\pi^2}{4H^2}\right)260.$$

这就是四个特征函数对应于同一个特征值.

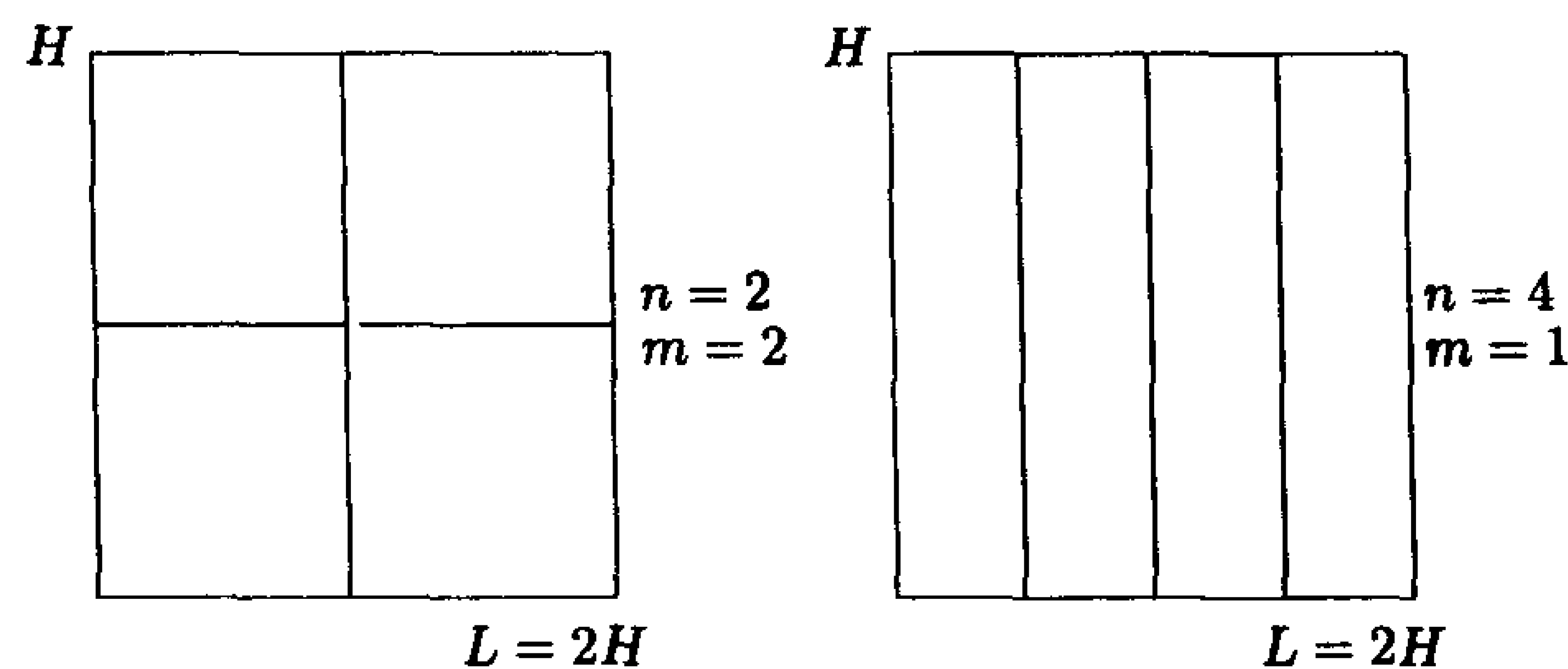


图 7.4.1 对应同一个特征值的特征函数的结点曲线(对称的)

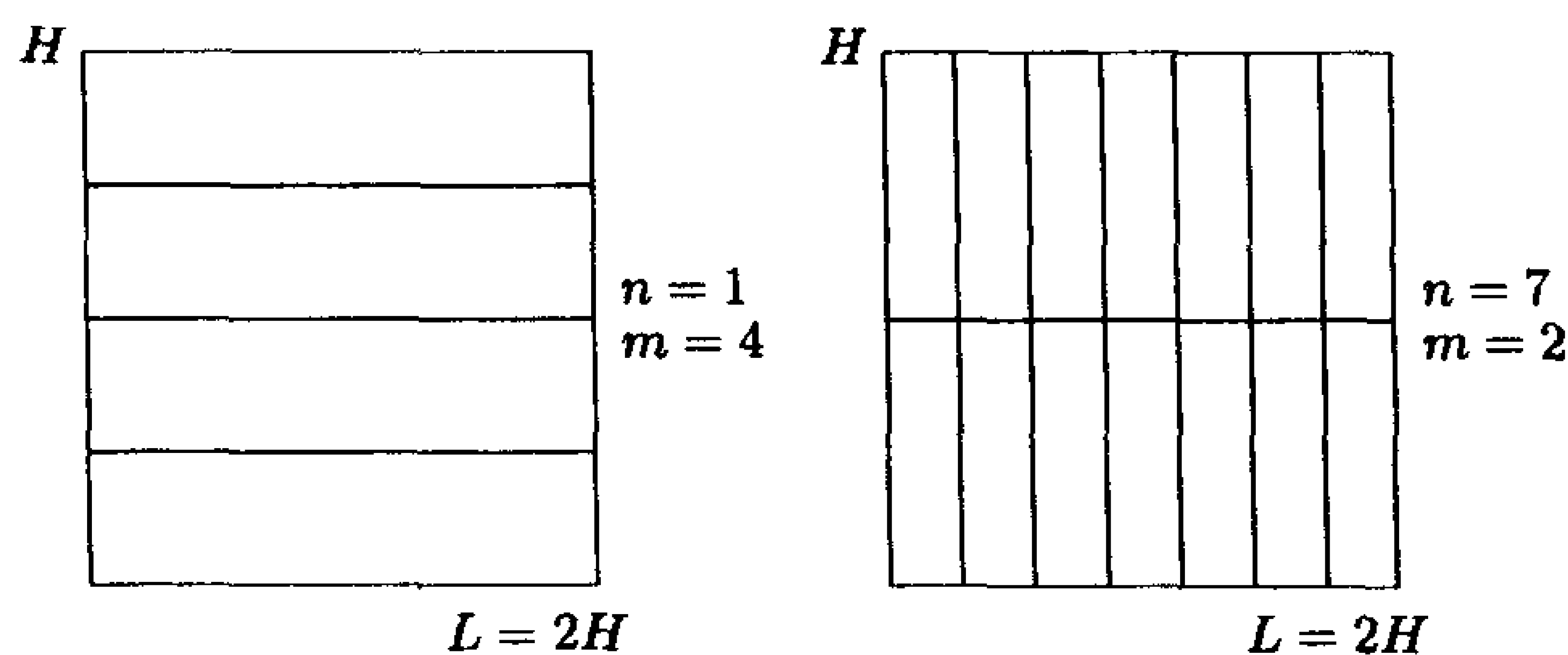


图 7.4.2 对应相同特征值的特征函数的结点曲线(不对称)

4a. **特征函数的级数**. 根据定理的(7.4.4)式, $\nabla^2\phi+\lambda\phi=0$ 的特征函数总能够表示任何分段光滑函数 $f(x,y)$. 这里 $\sum\limits_{\lambda}$ 为二重和

$$f(x,y)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{H}. \tag{7.4.11}$$

5. **特征函数的正交性**. 下面证明由(7.4.5)表述的两个不同特征函数的多维正交性, 它确定了(7.4.4)式中的广义傅里叶系数[⊖]. 这里的做法与一维施图姆-刘维尔特征函数展开的做法一样. 在表达式(7.4.4)两端乘以 ϕ_{λ_i}, 然后在区域 R 上积分:

$$\iint\limits_R f\phi_{\lambda_i}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{\lambda}a_{\lambda}\iint\limits_R\phi_{\lambda}\,\phi_{\lambda_i}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7.4.12}$$

既然特征函数相互正交(由于$\nabla^2\phi+\lambda\phi=0$, 权函数为1), 就有

$$\iint\limits_R f\phi_{\lambda_i}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a_{\lambda_i}\iint\limits_R\phi_{\lambda_i}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{7.4.13}$$

或等价地

$$\boxed{a_{\lambda_i}=\frac{\iint\limits_R f\phi_{\lambda_i}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_R\phi_{\lambda_i}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}.} \tag{7.4.14}$$

⊖ 如果对应同一特征值有多个特征函数, 则假设这些特征函数已经是正交的了(若必要可以用格拉姆-施密特方法).

因为(7.4.14)的分母是正的，所以由(7.4.13)得到(7.4.14)是没有困难的.

对零边界条件矩形的特殊情形(7.4.7)，由(7.4.14)确定的广义傅里叶系数 a_{nm} 是

$$a_{nm}=\frac{\int_0^H\int_0^L f(x,y)\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{H}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_0^H\int_0^L \sin^2\frac{n\pi x}{L}\sin^2\frac{m\pi y}{H}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}. \tag{7.4.15}$$

292～293

通过计算两个单积分，可得分母积分的值是$(L/2)(H/2)$；因此重新导出了(7.3.30). 此时，(7.4.11)的广义傅里叶系数 a_{nm}可以用两种等价的方法求得：

(a)用$\nabla^2\phi+\lambda\phi=0$ 特征函数的一个二维正交公式.

(b)用两个一维正交公式.

4b. **收敛性**. 与施图姆-刘维尔特征值问题(见5.10节)一样，$\nabla^2\phi+\lambda\phi=0$ 特征函数的有限级数可以逼近函数$f(x,y)$. 特别可以证明：如果用权函数为1的均方误差度量：

$$E\equiv\iint_R\left(f-\sum_\lambda a_\lambda\phi_\lambda\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{7.4.16}$$

那么按(7.4.14)来选择系数 a_λ(广义傅里叶系数)，则均方误差最小. 而逼近的精度随项数的增加而提高. 当包括了所有特征函数时 $E\to0$. 就说级数 $\sum_\lambda a_\lambda\phi_\lambda$ 平均收敛于f.

习题 7.4

7.4.1 考虑特征值问题

$$\nabla^2\phi+\lambda\phi=0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(0,y)=0\qquad \phi(x,0)=0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(L,y)=0\qquad \phi(x,H)=0.$$

*(a)证明存在二重无限特征值族.

(b)如果 $L=H$，证明大多数特征值有多个特征函数.

(c)用两个一维正交关系导出特征函数是二维正交的.

7.4.2 不用方程(7.4.7)的显式解，而由瑞利商(7.4.6)证明 $\lambda\geqslant0$.

7.4.3 如果需要，参考7.5节：

(a)导出 $\iint(u\nabla^2v-v\nabla^2u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint(u\nabla v-v\nabla u)\cdot\hat{n}\mathrm{d}s$.

(b)从(a)导出(7.4.5).

7.4.4 导出(7.4.6). 如果需要，参考7.6节. [提示：将(7.4.1)两端乘以 ϕ 然后积分.]

294

7.5 格林公式、自伴算子和多维特征值问题

引言. 这一节要证明多维特征值问题的一些性质. 这里考虑特征值问题：

$$\boxed{\nabla^2\phi+\lambda\phi=0,} \tag{7.5.1}$$

边界条件为

$$\boxed{\beta_1\phi+\beta_2\nabla\phi\cdot\hat{n}=0,} \tag{7.5.2}$$

其中 β_1 和 β_2 是空间位置的实函数. 与施图姆-刘维尔特征值问题一样，假定(7.5.1)及(7.5.2)有无穷多个特征值，且所得到的特征函数族是完全的. 但是有关这些的证明是困难的，超出了本书的范围. 而多维特征值问题其他性质的证明却相当类似地对应一维施图姆-刘维尔特征值问题中的证明. 记

$$L \equiv \nabla^2, \tag{7.5.3}$$

此时多维特征值问题记为

$$L(\phi) + \lambda\phi = 0. \tag{7.5.4}$$

将(7.5.4)与(7.4.3)作比较，可看出多维特征值问题的权函数应当是1.

多维格林公式. 一维施图姆-刘维尔特征值问题的证明依赖于 $uL(v) - vL(u)$ 是恰当微分(拉格朗日恒等式). 相应的积分形式(格林公式)也是需要的. 对拉普拉斯算子($L=\nabla^2$)导出与施图姆-刘维尔微分算子类似的恒等式. 要计算等式 $uL(v) - vL(u) = u\nabla^2 v - v\nabla^2 u$. 注意 $\nabla^2 u = \nabla\cdot(\nabla u)$ 及 $\nabla\cdot(aB) = a\nabla\cdot B + \nabla a\cdot B$(其中 a 是标量而 B 是向量). 于是,

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(u\nabla v) &= u\nabla^2 v + \nabla u\cdot\nabla v\\ \nabla\cdot(v\nabla u) &= v\nabla^2 u + \nabla v\cdot\nabla u.\end{aligned} \tag{7.5.5}$$

两式相减，得到

295

$$\boxed{u\nabla^2 v - v\nabla^2 u = \nabla\cdot(u\nabla v - v\nabla u).} \tag{7.5.6}$$

微分形式(7.5.6)是拉格朗日恒等式(5.5.7)的多维形式. 代替一维问题中求从 a 到 b 的积分，这里在整个二维区域上积分:

$$\iint_R (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\,dx dy = \iint_R \nabla\cdot(u\nabla v - v\nabla u)\,dx dy.$$

等式右端的表达式恰好能应用散度公式$\left(\iint_R \nabla\cdot A\,dx dy = \oint A\cdot\hat{n}\,ds\right)$. 就有

$$\boxed{\iint_R (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\,dx dy = \oint (u\nabla v - v\nabla u)\cdot\hat{n}\,ds.} \tag{7.5.7}$$

公式(7.5.7)是格林公式(5.5.8)的多维形式——第二格林公式[⊖]. 这里也叫格林公式.

已经证明了 $L=\nabla^2$ 是下面意义下的多维自伴算子:

> 如果 u 和 v 是任意两个函数，则
>
> $$\oint (u\nabla v - v\nabla u)\cdot\hat{n}\,ds = 0, \tag{7.5.8}$$
>
> 那么
>
> $$\iint_R [u\nabla^2 v - v\nabla^2 u]\,dx dy = 0. \tag{7.5.9}$$
>
> 其中 $L=\nabla^2$.

在许多问题中，指定的齐次边界条件会使边界项消失. 例如，若函数 u 和 v 在边界上变成零，则(7.5.8)和(7.5.9)成立. 另外，对三维情形，符号 $\iint$ 应该换成 $\iiint$，而符号 $\oint$ 应该换成 $\oiint$.

⊖ 第一格林公式由对(7.5.5)(而不是(7.5.6))积分和应用散度定理得到，其中 $v=u$.

特征函数的正交性. 与一维施图姆-刘维尔特征值问题一样，直接由格林公式(7.5.7)就能证明几个定理. 为了说明属于不同特征值的特征函数彼此正交，考虑对应特征值 λ_1 和 λ_2 的特征函数为 ϕ_1 和 ϕ_2:

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi_1 + \lambda_1\phi_1 = 0 \text{ 或 } L(\phi_1) + \lambda_1\phi_1 = 0\\ \nabla^2\phi_2 + \lambda_2\phi_2 = 0 \text{ 或 } L(\phi_2) + \lambda_2\phi_2 = 0.\end{aligned} \tag{7.5.10}$$

296

若 ϕ_1 和 ϕ_2 满足相同的齐次边界条件，则(7.5.8)成立，这样(7.5.9)也成立. 于是

$$\iint_R(-\phi_1\lambda_2\phi_2 + \phi_2\lambda_1\phi_1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (\lambda_1 - \lambda_2)\iint_R\phi_1\phi_2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

如果 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，那么

$$\iint_R\phi_1\phi_2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0, \tag{7.5.11}$$

也就是说对应不同特征值的特征函数相互正交(在多维意义下，权函数为 1). 如果有两个或更多特征函数对应于同一特征值，由本节附录中所证明的格拉姆-施密特方法，它们可以被正交化(其他特征值对应的特征函数也是如此).

现在就可以证明特征值是实的了. 由于该证明和一维施图姆-刘维尔问题的证明完全相同(见 5.5 节)，所以将其留作习题.

习题 7.5

7.5.1 不均匀膜的垂直位移满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

其中 c 依赖于 x, y. 假设在不规则膜的边界上 $u=0$.

(a) 若 $u(x, y, t) = \phi(x, y)h(t)$，证明可以分离出时间变量.

证明: $\phi(x, y)$ 满足特征值问题

$$\nabla^2\phi + \lambda\sigma(x,y)\phi = 0 \quad \text{在边界上 } \phi = 0. \tag{7.5.12}$$

那么 $\sigma(x, y)$ 是什么?

(b) 如果已知特征值(并且 $\lambda > 0$)，确定振动频率.

7.5.2 参看习题 7.5.1，考虑二维特征值问题(7.5.12).

(a) 证明: 属于不同特征值的特征函数是相互正交的(关于什么权函数?).

(b) 证明: 所有特征值都是实的.

(c) 做习题 7.6.1.

297

7.5.3 在如下边界条件下重做习题 7.5.2 .

(a) 在边界上 $\nabla\phi\cdot\hat{n}=0$.

(b) 在边界上 $\nabla\phi\cdot\hat{n}+h(x, y)\phi=0$.

(c) 在部分边界上 $\phi=0$，在其余边界上 $\nabla\phi\cdot\hat{n}=0$.

7.5.4 考虑三维无热源热传导方程，其系数不是常数

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla\cdot(K_0\nabla u),$$

其中 $c\rho$ 和 K_0 是 x, y, z 的函数. 假设在边界上 $u=0$. 证明: 由 $u(x, y, z, t) = \phi(x, y, z)h(t)$ 可以分离出时间变量. 证明 $\phi(x, y, z)$ 满足特征值问题

$$\nabla\cdot(p\nabla\phi) + \lambda\sigma(x,y,z)\phi = 0 \quad \text{在边界上 } \phi = 0. \tag{7.5.13}$$

$\sigma(x, y, z)$和$p(x, y, z)$是什么?

7.5.5 参看习题7.5.4，考虑三维特征值问题(7.5.13).

(a)证明属于不同特征值的特征函数是相互正交的.（关于什么权函数?）

(b)证明所有特征值都是实的.

(c)做习题7.6.3.

7.5.6 在二维区域R上推导出

$$\iint [uL(v) - vL(u)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的表达式，其中

$$L = \nabla^2 + q(x,y)[\text{即}, L(u) = \nabla^2 u + q(x,y)u].$$

7.5.7 对于三维区域R上的拉普拉斯方程$\nabla^2 u = 0$(u表示温度)，假设在边界上热通量已知(不必是常量).

(a)解释$\oiint \nabla u \cdot \hat{n}\mathrm{d}S = 0$的物理原因.

298

(b)从数学上证明上述表达式.

7.5.8 假设在三维区域R上

$$\nabla^2 \phi = f(x,y,z),$$

其中f已知，在边界上$\nabla\phi \cdot \hat{n} = 0$.

(a)从数学上证明(如果有解)

$$\iiint_R f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

(b)(应用热传导模型)从物理角度简要说明为什么条件(a)对解必须成立. 如果在热流问题中

$$\iiint_R f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z > 0,$$

那么对热流问题会有什么影响?

7.5.9 证明：如果u和v满足(7.5.2)，则边界项(7.5.8)为零：

(a)假设$\beta_2 \neq 0$.

(b)假设在部分边界上$\beta_2 = 0$.

7.5节附录：格拉姆-施密特方法

下面证明能够正交化对应同一特征值的特征函数. 这个过程称为格拉姆-施密特正交化方法. 设ϕ_1，ϕ_2，…，ϕ_n是对应同一特征值的无关[⊖]特征函数. 要由ϕ_1，ϕ_2，…，ϕ_n构造有n个特征函数的正交组ψ_1，ψ_2，…，ψ_n，虽然ϕ_1，ϕ_2，…，ϕ_n不一定是正交的. 设$\psi_1 = \phi_1$是一个特征函数. 特征函数的线性组合仍然是特征函数(因为它们满足同一个线性齐次微分方程和边界条件). 因此，$\psi_2 = \phi_2 + c\phi_1$也是一个特征函数(自然与$\psi_1$无关)，其中$c$是任意常数. 选取$c$使得$\psi_2 = \phi_2 + c\phi_1$与$\psi_1$正交：$\iint_R \psi_1\psi_2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$，即

$$\iint_R (\phi_2 + c\psi_1)\psi_1\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

这就唯一确定c为

⊖ 这里的无关在国内教科书中一般称为线性无关. ——译者注

$$c = \frac{-\iint_R \phi_2 \psi_1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_R \psi_1^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y}. \tag{7.5.14}$$

因为同一个特征值可能有不止两个特征函数，这就要继续这个过程.

第三个特征函数是 $\psi_3 = \phi_3 + c_1\psi_1 + c_2\psi_2$，选取 c_1 和 c_2 使 ψ_3 与前两个特征函数正交 $\iint_R \psi_3 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$. 即

299

$$\iint_R (\phi_3 + c_1\psi_1 + c_2\psi_2) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

不过，ψ_1 已经与 ψ_2 正交，因此，容易由

$$\iint_R \phi_3\psi_1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y + c_1 \iint_R \psi_1^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

$$\iint_R \phi_3\psi_2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y + c_2 \iint_R \psi_2^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

确定常数 c_1 和 c_2. 以此类推，这个过程就能够确定 n 个正交的函数. 一般地，

$$\psi_j = \phi_j - \sum_{i=1}^{j-1} \left(\frac{\iint_R \phi_j \psi_i \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_R \psi_i^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y} \right) \psi_i.$$

这就证明了即便在重特征值的情形，必要时通过格拉姆-施密特正交化过程，也能够只考虑正交的特征函数.

7.6 瑞利商和拉普拉斯方程

7.6.1 瑞利商

在 5.6 节得到了一维施图姆-刘维尔特征值问题的瑞利商. 获得结果的步骤是：用 ϕ 乘以微分方程、在整个区域上积分、解出 λ，最后用分部积分化简. 下面作类似的推导：对

$$\nabla^2\phi + \lambda\phi = 0 \tag{7.6.1}$$

两端乘以 ϕ、在整个二维区域上积分并解出 λ：

$$\lambda = \frac{-\iint_R \phi\, \nabla^2\phi \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_R \phi^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y}. \tag{7.6.2}$$

下面将分部积分推广到多维函数. 分部积分基于导数的乘法法则 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x(fg) = f\,\mathrm{d}g/\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$. 但这里不是利用导数，而是利用散度的乘法法则 $\nabla \cdot (fg) = f\nabla \cdot g + g \cdot \nabla f$，令 $f = \phi$，$g = \nabla\phi$，就得到 $\nabla \cdot (\phi\nabla\phi) = \phi\nabla \cdot (\nabla\phi) + \nabla\phi \cdot \nabla\phi$，由 $\nabla \cdot (\nabla\phi) = \nabla^2\phi$ 和 $\nabla\phi \cdot \nabla\phi = |\nabla\phi|^2$，

$$\phi\,\nabla^2\phi = \nabla \cdot (\phi\nabla\phi) - |\nabla\phi|^2. \tag{7.6.3}$$

在(7.6.2)中利用(7.6.3)就得到特征值的另一个表达式

$$\lambda = \frac{-\iint_R \nabla\cdot(\phi\,\nabla\phi)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_R |\nabla\phi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_R \phi^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}. \tag{7.6.4}$$

300

再次对(7.6.4)式分子的第一个积分使用散度定理. 由 $\iint_R \nabla\cdot A\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint A\cdot\hat{n}\mathrm{d}s$ 就得到

$$\boxed{\lambda = \frac{-\oint \phi\,\nabla\phi\cdot\hat{n}ds + \iint_R |\nabla\phi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_R \phi^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y},} \tag{7.6.5}$$

这就是瑞利商. 它与施图姆–刘维尔特征值问题的瑞利商相当类似. 注意它们各自的边界贡献: (5.6.3)是 $-p\phi\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x\Big|_a^b$, 而(7.6.5)是 $-\oint\phi\,\nabla\phi\cdot\hat{n}\mathrm{d}s$.

例. 考虑边界条件是 $\phi=0$ 的任意区域. 则 $\oint\phi\,\nabla\phi\cdot\hat{n}\mathrm{d}s=0$, 由(7.6.5)可得 $\lambda\geqslant 0$. 若 $\lambda=0$, 由(7.6.5)可得

$$0 = \iint_R |\nabla\phi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7.6.6}$$

因而区域内处处有

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} = 0. \tag{7.6.7}$$

由(7.6.7)可知, 区域内处处有 $\partial\phi/\partial x=0$ 及 $\partial\phi/\partial y=0$. 因此, ϕ 在区域内是常数, 这是因为在边界上 $\phi=0$, 所以处处 $\phi=0$. 但是处处 $\phi=0$ 不是一个特征函数, 这就证明了 $\lambda=0$ 不是特征值. 所以, $\lambda>0$.

7.6.2 依赖时间的热传导方程与拉普拉斯方程

依赖时间的热传导方程的平衡态解满足拉普拉斯方程. 在齐次边界条件下求解拉普拉斯方程 $\nabla^2\phi=0$ 对应的就是研究 $\lambda=0$ 是否为(7.6.1)的特征值.

零温度边界条件. 在边界条件 $\phi=0$ 下, 考虑 $\nabla^2\phi=0$. (7.6.6)给出在区域内处处有 $\phi=0$ (因为 $\lambda=0$ 不是特征值). 在整个边界上满足零温度边界条件的任何形状物体, 其定常(平衡)态的温度分布在物理上明显地是零. 对于依赖时间的热传导方程 $\partial u/\partial t=k\,\nabla^2u$, 分离变量给出的(7.6.1)且 $\lambda>0$(由瑞利商)证明了当 $t\to\infty$ 时, $u(x,y,t)\to 0$, 即在时间长时, 依赖时间的温度趋于稳态温度分布.

301

绝热边界条件. 在边界条件 $\nabla\phi\cdot\hat{n}=0$ 下, 考虑 $\nabla^2\phi=0$. (7.6.6)给出在区域内处处有 $\phi=c=$ 任意常数(因为 $\lambda=0$ 是特征值, $\phi=c$ 是其特征函数). 常数值平衡态解能够由依赖时间的扩散(热传导)方程 $\partial u/\partial t=k\,\nabla^2u$ 的初值确定. 用在整个区域上的基本积分守恒律(见1.5节)是 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint u\mathrm{d}x\mathrm{d}y = k\oint\nabla u\cdot\hat{n}\mathrm{d}s=0$, 其中用到了绝热边界条件. 因此, 总热能 $\iint u\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 随时间

不变，平衡值($t\to\infty$) $\iint c\mathrm{d}x\mathrm{d}y=cA$ 等于初值($t=0$)，$\iint f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 这样 $c=1/A\iint f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，即绝热边界条件下的常值平衡温度一定是初始温度分布的均值. 这里 A 是二维区域的面积. 对于满足绝热边界条件的依赖时间热传导方程，可以证明，当 $t\to\infty$ 时，$u(x,\ y,\ t)\to c=1/A\iint f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，因为 $\lambda\geqslant 0$(由瑞利商，对应 $\lambda=0$，$\phi=1$)(即时间长时，依赖时间的温度趋于平衡温度分布).

三维情形也有类似的结果.

习题 7.6

7.6.1 参看习题 7.5.1，设 $\sigma>0$，考虑二维特征值问题

$$\nabla^2\phi+\lambda\sigma(x,y)\phi=0 \quad 在边界上\ \phi=0.$$

(a) 证明 $\lambda\geqslant 0$.　　(b) $\lambda=0$ 是特征值吗？若是，特征函数是什么？

7.6.2 在下面的边界条件下，请重做习题 7.6.1.

(a) 在边界上 $\nabla\phi\cdot\hat{n}=0$.　　(b) 在边界上 $\nabla\phi\cdot\hat{n}+h(x,\ y)\phi=0$.

(c) 在部分边界上 $\phi=0$，在其余边界上 $\nabla\phi\cdot\hat{n}=0$.

7.6.3 请重做习题 7.6.1. 如果偏微分方程是

$$\nabla\cdot(p\,\nabla\phi)+\lambda\sigma(x,y,z)\phi=0,$$

边界条件是

(a) 在边界上 $\phi=0$.　　(b) 在边界上 $\nabla\phi\cdot\hat{n}=0$.

7.6.4 (a) 若 $\nabla^2\phi=0$，边界条件是 $\phi=0$，证明：处处 $\phi=0$. [提示：$\lambda=0$ 不是 $\nabla^2\phi=-\lambda\phi$ 的特征值.] 302

(b) 证明：边界条件为 $u=g(x,\ y,\ z)$ 时，方程 $\nabla^2u=f(x,\ y,\ z)$ 不能有两个相异的解. [提示：考虑 u_1-u_2 再用 (a) 的结果.]

7.7 振动圆形膜和贝塞尔函数

7.7.1 概述

一维(施图姆-刘维尔)和多维特征值问题的一项有趣应用是研究振动的圆形膜. 膜的垂直位移 u 满足二维波动方程，

$$\text{PDE:}\ \boxed{\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=c^2\nabla^2u.} \tag{7.7.1}$$

由区域的几何形状自然想到用极坐标系，此时 $u=u(r,\ \theta,\ t)$. 假设在圆边界 $r=a$ 上位移是零：

$$\text{BC:}\ \boxed{u(a,\theta,t)=0.} \tag{7.7.2}$$

初始位置和速度为

$$\text{IC:}\ \boxed{\begin{aligned} u(r,\theta,0)&=\alpha(r,\theta)\\ \frac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,0)&=\beta(r,\theta).\end{aligned}} \tag{7.7.3}$$

7.7.2 分离变量

通过寻求乘积解，先分离出时间变量

$$u(r,\theta,t) = \phi(r,\theta)h(t). \tag{7.7.4}$$

由前面的讨论，$h(t)$满足

303

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -\lambda c^2 h, \tag{7.7.5}$$

其中 λ 是分离常数．根据(7.7.5)，振动的固有频率是 $c\sqrt{\lambda}$(若 $\lambda>0$)．另外，$\phi(r,\theta)$满足二维特征值问题

$$\boxed{\nabla^2\phi + \lambda\phi = 0,} \tag{7.7.6}$$

在边界 $r=a$ 上，$\phi=0$：

$$\phi(a,\theta) = 0. \tag{7.7.7}$$

鉴于圆形膜为 $0<r<a$，$-\pi<\theta<\pi$，要求方程(7.7.6)在极坐标系下的乘积解

$$\phi(r,\theta) = f(r)g(\theta), \tag{7.7.8}$$

这与求波动方程各个自变量函数乘积形式的解 $u(r,\theta,t)=f(r)g(\theta)h(t)$等价．把(7.7.8)代入(7.7.6)；在极坐标系下，$\nabla^2\phi = 1/r\partial/\partial r(r\partial\phi/\partial r) + 1/r^2\partial^2\phi/\partial\theta^2$，于是$\nabla^2\phi+\lambda\phi=0$ 变为

$$\frac{g(\theta)}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) + \frac{f(r)}{r^2}\frac{d^2g}{d\theta^2} + \lambda f(r)g(\theta) = 0. \tag{7.7.9}$$

两端乘以 r^2 再除以$f(r)g(\theta)$，就可以把 r 和 θ 分离开来：

$$-\frac{1}{g}\frac{d^2g}{d\theta^2} = \frac{r}{f}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) + \lambda r^2 = \mu. \tag{7.7.10}$$

由前面关于圆形区域的经验(见 2.4.2 节和 2.5.2 节)，要满足周期性条件，$g(\theta)$必须是振荡的，因此引入第二个分离常数为μ．于是，有两个分离常量的三个偏微分方程是

$$\boxed{\frac{d^2h}{dt^2} = -\lambda c^2 h} \tag{7.7.11}$$

$$\boxed{\frac{d^2g}{d\theta^2} = -\mu g} \tag{7.7.12}$$

$$\boxed{r\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) + (\lambda r^2 - \mu)f = 0.} \tag{7.7.13}$$

其中的两个一定是特征值问题．然而，忽略初始条件后，由 $u(a,\theta,t)=0$ 或 $\phi(a,\theta)=0$ 得到的边界条件仅有$f(a)=0$．注意到 $-\pi<\theta<\pi$ 和 $0<r<a$．这样，r 和 θ 都定义在有限的区间上，在两端应该有边界条件．解对 θ 的周期性意味着

304

$$g(-\pi) = g(\pi) \tag{7.7.14}$$

$$\frac{dg}{d\theta}(-\pi) = \frac{dg}{d\theta}(\pi). \tag{7.7.15}$$

在 $r=a$ 已有了一个条件．极坐标在 $r=0$ 是奇异的，此处必定有一个奇异条件．既然位移一定是有限的，那么

$$|f(0)| < \infty.$$

7.7.3 特征值问题(一维情形)

分离变量后得到了两个特征值问题. θ 特征值问题(7.7.12)、(7.7.14)及(7.7.15)已经相当熟悉了，虽然它关于周期性边界条件不是正则施图姆-刘维尔问题，但已知其特征值为

$$\mu_m = m^2, m = 0,1,2,\cdots. \tag{7.7.16}$$

对应的两个特征值函数是

$$g(\theta) = \sin m\theta \quad 和 \quad g(\theta) = \cos m\theta, \tag{7.7.17}$$

虽然 $m=0$ 时，特征函数减少为一个(而不是 $m \neq 0$ 时的两个). 已经知道，这个特征值问题生成了关于 θ 的完全傅里叶级数. m 是 θ 方向的波峰数.

对每一个整数 m，(7.7.13)是关于 λ 的特征值问题：

$$\boxed{r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right) + (\lambda r^2 - m^2)f = 0} \tag{7.7.18}$$

$$\boxed{f(a) = 0} \tag{7.7.19}$$

$$\boxed{|f(0)| < \infty.} \tag{7.7.20}$$

由于方程式(7.7.18)的系数不是常数，因而对它的分析有些难度. 将其两端除以 r，可变为施图姆-刘维尔形式：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right) + \left(\lambda r - \frac{m^2}{r}\right)f = 0,} \tag{7.7.21}$$

305

或 $Lf + \lambda rf = 0$，其中 $L = \mathrm{d}/\mathrm{d}r(r\mathrm{d}/\mathrm{d}r) - m^2/r$，同一般的施图姆-刘维尔微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right] + q\phi + \lambda\sigma\phi = 0$$

比较，r 为自变量，有 $x = r$，$p(r) = r$，$\sigma(r) = r$ 和 $q(r) = -m^2/r$. 这不是正则施图姆-刘维尔问题，原因是其在原点($r=0$)处的性态：

1. 在 $r=0$ 处的边界条件(7.7.20)不具有所要的形式.
2. 在 $r=0$ 处，$p(r)=0$，$\sigma(r)=0$(不是处处为正).
3. 对 $m \neq 0$，$r \to 0$ 时，$q(r) \to \infty$ ($q(r)$不连续).

不过要指出：对于这个重要的奇异施图姆-刘维尔问题，所有关于正则施图姆-刘维尔问题的结论仍然适用. 先从(对每个 m)有无穷个特征值开始. 记特征值为 λ_{nm}，$m=0, 1, 2, \cdots$ 和 $n=1, 2, \cdots$，特征函数为 $f_{nm}(r)$. 由于在格林公式中边界项为零(见习题 5. 5. 1)，因此，对每个固定的 m，这些特征函数关于权函数 r 正交[见(7.7.21)]. 于是，

$$\int_0^a f_{mn_1} f_{mn_2} r\,\mathrm{d}r = 0, \quad 对\ n_1 \neq n_2. \tag{7.7.22}$$

下面将更明确地阐述这些特征函数的事实.

7.7.4 贝塞尔微分方程

依赖 r 的分离变量解满足一个"奇异"施图姆-刘维尔微分方程(7.7.21). 应用微分乘积法则和乘以 r，可得到(7.7.21)的另一种形式

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}r^2}+r\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}+(\lambda r^2-m^2)f=0. \tag{7.7.23}$$

对方程(7.7.23)再做些分析可知，它包含 m 和 λ 两个参数，已知 m 为一个整数，但不知道 λ 能取什么值(对 m 的不同整数值)．对各种 λ 值，数值求解(7.7.23)是相当繁杂的．但注意到用下面的简单尺度变换

306

$$z=\sqrt{\lambda}r, \tag{7.7.24}$$

就消去了微分方程对 λ 的依赖：

$$z^2\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}z^2}+z\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}+(z^2-m^2)f=0. \tag{7.7.25}$$

在7.6节中用多维瑞利商证明了，只要在边界上 $\phi=0$，那么(对于方程 $\nabla^2\phi+\lambda\phi=0$) $\lambda>0$，因此变量替换(7.7.24)是可行的[㊀]．也可以用(7.7.18)～(7.7.20)的一维瑞利商证明 $\lambda>0$(见习题7.7.13)．方程(7.7.25)的优点是不依赖 λ，因此求解(7.7.25)的必要步骤比(7.7.23)的要少．实际上，对 m 阶贝塞尔微分方程(7.7.25)的研究已经有150多年了．

7.7.5 奇异点和贝塞尔微分方程

这一小节将简要介绍贝塞尔微分方程的一些性质．方程(7.7.25)是二阶线性变系数微分方程，得不到(7.7.25)用初等函数所表示的精确封闭解．为了分析微分方程，首先要做的事情之一是寻找变量 z 可能引起某些困难的特殊值．$z=0$ 就是方程(7.7.25)的一个奇异点．

下面来定义微分方程的奇异点．考虑标准形式：

$$\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}z^2}+a(z)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}+b(z)f=0.$$

如果 $a(z)$ 和 $b(z)$ 及其导数在 $z=z_0$ 是有限的，就称 $z=z_0$ 为通常点．否则，$z=z_0$ 是奇异点．对贝塞尔微分方程，$a(z)=1/z$，$b(z)=1-m^2/z^2$．除 $z=0$ 外，全部有限[㊁]的 z 都是通常点．$z=0$ 为奇异点[因为 $a(0)$ 不存在]．

由微分方程理论可知，在通常点的邻域内，微分方程所有的解性态良好[即，$f(z)$ 及其所有导数在通常点都存在]．这样就确保了贝塞尔微分方程的所有解在除 $z=0$ 外的每个有限点性态良好．而只在 $z=0$ 的邻域内可能会遇到困难．因此要研究贝塞尔微分方程的解在 $z=0$ 的邻域内的性态．下面描述一个粗略(但重要)的近似情形．若 z 非常接近0，则 z^2f 比 m^2f[㊂]小得多，贝塞尔微分方程中的 z^2f 可以忽略不计．但不能忽略 $z^2\mathrm{d}^2f/\mathrm{d}z^2$ 或 $z\mathrm{d}f/\mathrm{d}z$，因为即使 z 很小，而 f 的导数却可能足够大，使得 $z\mathrm{d}f/\mathrm{d}z$ 与 $-m^2f$ 同样大．舍掉 z^2f 后给出

307

$$z^2\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}z^2}+z\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}-m^2f\approx0, \tag{7.7.26}$$

㊀ 在其他问题中，若 $\lambda=0$，变换(7.7.24)是无效的．不过 $\lambda=0$ 时，变换(7.2.24)是不必要的，因为此时(7.2.23)是等量纲方程，因而是可解的(参看2.5.2节)．

㊁ 若引人恰当的定义，可以证明 $z=\infty$ 对贝塞尔微分方程不是通常点．

㊂ 即使 $m=0$，在 $z=0$ 附近 z^2f 仍然是能够忽略的，其结果也是一个合理的近似．

这是在 $z=0$ 附近的一个有效近似. 这个近似的优点是它能够精确地解出来, 因为方程(7.7.26)是等量纲(也称柯西或欧拉)方程(见 2.5.2 节). 即通过寻求形式为

$$f \approx z^s \tag{7.7.27}$$

的解来解方程(7.7.26). 把(7.7.27)代入(7.7.26)得到 s 的一个二次方程

$$s(s-1)+s-m^2=0, \tag{7.7.28}$$

称为指标方程. 因此, $s^2=m^2$, 两个根是 $s=\pm m$. 若 $m\neq 0$(这里假定 $m>0$), 得到两个无关近似解

$$f \approx z^m \quad 和 \quad f \approx z^{-m}(m>0). \tag{7.7.29}$$

然而, 若 $m=0$, 仅得到一个无关解 $f\approx z^0=1$. 第二个解易从(7.7.26)中导出. 如果 $m=0$,

$$z^2\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}z^2}+z\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\approx 0 \quad 或 \quad z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)\approx 0.$$

因此 $z\mathrm{d}f/\mathrm{d}z$ 是常数, 除了 $f\approx 1$, 另一个解是 $f\approx \ln z$. 总之, 对于 $m=0$, 两个无关解在 $z=0$ 附近的预期性态是

$$f \approx 1 \quad 和 \quad f \approx \ln z(m=0). \tag{7.7.30}$$

贝塞尔微分方程的通解是两个无关解的线性组合, 这两个解在 $m\neq 0$ 时, 满足(7.7.29), 在 $m=0$ 时, 满足(7.7.30). 这里只得到了解在 $z=0$ 附近预期的近似性态, 更多的情形将在下一节讨论. 由于 $z=0$ 是奇异点, 因此方程的解在 $z=0$ 有可能性态不佳. 由(7.7.29)和(7.7.30)可见, 可以选一个贝塞尔微分方程的无关解在 $z=0$ 性态良好, 而另一个性态不佳[注意: 有一个解满足 $\lim\limits_{z\to 0}f(z)=\pm\infty$].

7.7.6 贝塞尔函数及其渐近性质(在 $z=0$ 附近)

下面继续讨论 m 阶贝塞尔微分方程

$$z^2\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}z^2}+z\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}+(z^2-m^2)f=0. \tag{7.7.31}$$

308

由前面的讨论可知, 有两种类型的解, 在 $z=0$ 附近性态良好的解和在 $z=0$ 点奇异的解. m 的不同值给出不同的微分方程, 其相应的解依赖于 m. 方程(7.7.31)的良好性态解的标准符号是 $J_m(z)$, 称为第一类 m 阶贝塞尔函数. 类似地, 贝塞尔微分方程奇异解的标准符号是 $Y_m(z)$, 称为第二类 m 阶贝塞尔函数. 运用贝塞尔微分方程可以解决很多问题, 只要知道: 当 $z\to 0$ 时, $Y_m(z)\to\pm\infty$ 就行了.

任何线性齐次二阶微分方程的通解都是两个无关解的线性组合. 于是, 贝塞尔微分方程(7.7.31)的通解是

$$\boxed{f=c_1J_m(z)+c_2Y_m(z).} \tag{7.7.32}$$

$J_m(z)$ 和 $Y_m(z)$ 的确切定义将在 7.8 节中给出. 不过就直接目的来说, 要注意到: 对于小 $z(z\to 0)$ 它们满足下述渐近性质:

$$
\begin{aligned}
J_m(z) &\sim \begin{cases} 1 & m=0 \\ \dfrac{1}{2^m m!}z^m & m>0 \end{cases} \\
Y_m(z) &\sim \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\ln z & m=0 \\ -\dfrac{2^m(m-1)!}{\pi}z^{-m} & m>0. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{7.7.33}
$$

应当看到，(7.7.33)与逼近(7.7.29)和(7.7.30)是一致的；当 $z\to 0$ 时，$J_m(z)$有界，而 $Y_m(z)$无界.

7.7.7 涉及贝塞尔函数的特征值问题

这一小节要确定下列奇异施图姆-刘维尔问题的特征值(固定 m)：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right)+\left(\lambda r-\frac{m^2}{r}\right)f=0 \tag{7.7.34}$$

$$f(a)=0 \tag{7.7.35}$$

309

$$|f(0)|<\infty. \tag{7.7.36}$$

由变量替换 $z=\sqrt{\lambda}r$，方程(7.7.34)化成贝塞尔微分方程

$$z^2\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}z^2}+z\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}+(z^2-m^2)f=0.$$

其通解是贝塞尔函数的线性组合：$f=c_1J_m(z)+c_2Y_m(z)$. 径向坐标 r 的形式是

$$f=c_1J_m(\sqrt{\lambda}r)+c_2Y_m(\sqrt{\lambda}r). \tag{7.7.37}$$

应用齐次边界条件(7.7.35)和(7.7.36)确定特征值. 由$f(0)$有限而 $Y_m(0)$无限. 于是 $c_2=0$,

$$f=c_1J_m(\sqrt{\lambda}r). \tag{7.7.38}$$

这样，条件$f(a)=0$确定了特征值：

$$J_m(\sqrt{\lambda}a)=0. \tag{7.7.39}$$

可以看出$\sqrt{\lambda}a$是贝塞尔函数 $J_m(z)$的零点. 在后面 7.8.1 节要证明，贝塞尔函数是一个衰减振荡. 每个贝塞尔函数 $J_m(z)$都有无穷多个零点. 用 z_{mn}表示 $J_m(z)$的第 n 个零点. 那么

$$\sqrt{\lambda}a=z_{mn}\quad 或\quad \lambda_{mn}=\left(\frac{z_{mn}}{a}\right)^2. \tag{7.7.40}$$

对于每个 m 都有无穷多个特征值，(7.7.40)与 $\lambda=(n\pi/L)^2$ 相类似，其中 $n\pi$ 是 $\sin x$ 的零点.

例. 考虑 $J_0(z)$，其细节见图 7.7.1，由数表可知 $J_0(z)$的第一个零点 $z=2.404\,825\,557\,7\cdots$. 其他的零点见图 7.7.1. 特征值是 $\lambda_{0n}=(z_{0n}/a)^2$. 还有单独的零点表. 可查阅 *Handbook of Mathematical Functions*(Abramowitz and Stegun [1974]). 或关于贝塞尔函数有 700 多页的专著 *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*(Watson [1995]).

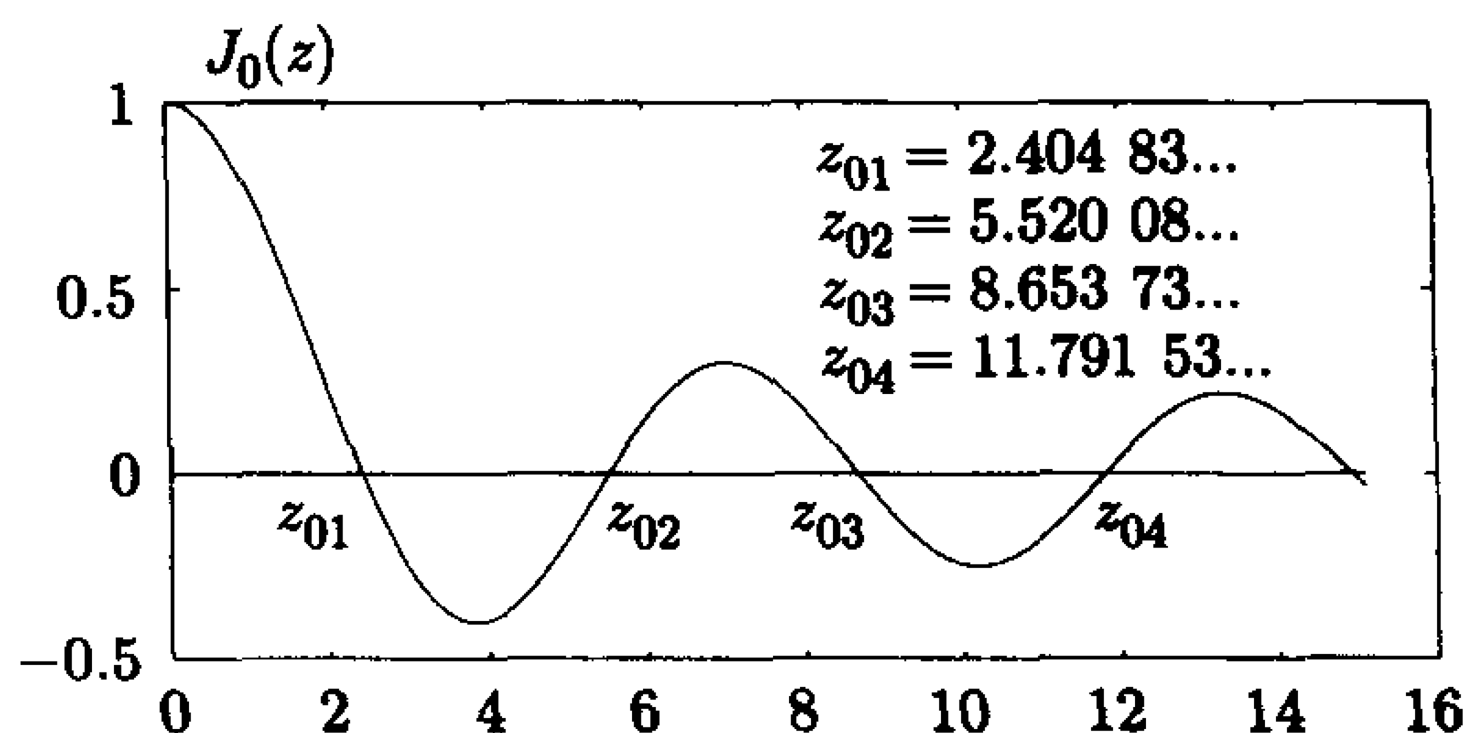


图 7.7.1 $J_0(z)$及其零点

特征函数. 这样，特征函数是

$$J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) = J_m\left(z_{mn}\frac{r}{a}\right), \tag{7.7.41}$$

$m=0, 1, 2, \cdots$ 和 $n=1, 2, \cdots$. 对于每一个 m，奇异施图姆-刘维尔问题(7.7.34)～(7.7.36)有一个特征函数的无穷族. 而对固定的 m，它们关于权函数 r 正交[已经讨论过了，见(7.7.22)]：

$$\int_0^a J_m(\sqrt{\lambda_{mp}}r)J_m(\sqrt{\lambda_{mq}}r)r\,\mathrm{d}r = 0, p \neq q. \tag{7.7.42}$$

310

已经知道，这个特征函数的无穷族(固定 m)是完全的. 于是，任何 r 的分段光滑函数都能表示为这些特征函数的广义傅里叶级数：

$$\alpha(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r), \tag{7.7.43}$$

其中 m 固定. 有时也叫做傅里叶-贝塞尔级数. 其系数由贝塞尔函数的正交性确定(权函数为 r)：

$$a_n = \frac{\int_0^a \alpha(r)J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r)r\mathrm{d}r}{\int_0^a J_m^2(\sqrt{\lambda_{mn}}r)r\mathrm{d}r}. \tag{7.7.44}$$

这说明了贝塞尔函数的一维正交性. 此处省略了标准化积分 $\int_0^a J_m^2(\sqrt{\lambda_{mn}}r)r\mathrm{d}r$ 的计算(对此可参看 Churchill[1972]和 Berg and McGregor[1966]).

7.7.8 振动圆形膜的初值问题

圆形膜的振动 $u=u(r, \theta, t)$ 由二维波动方程(7.7.1)描述，其中 u 在边界上不动(7.7.2)，满足初始条件(7.7.3). 分离变量后，得到四个乘积解族 $u(r, \theta, t)=f(r)g(\theta)h(t)$：

$$J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r)\begin{Bmatrix}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos c\sqrt{\lambda_{mn}}t\\ \sin c\sqrt{\lambda_{mn}}t\end{Bmatrix}. \tag{7.7.45}$$

为了简化计算，假定膜初始时是静止的，

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,0) = \beta(r,\theta) = 0.$$

于是，(7.7.45)中的 $\sin c\sqrt{\lambda_{mn}}t$ 项就没有了，根据叠加原理，要满足初值问题，考虑余下乘积 311

解的无穷线性组合：

$$u(r,\theta,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r)\cos m\theta\cos c\sqrt{\lambda_{mn}}t$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r)\sin m\theta\cos c\sqrt{\lambda_{mn}}t. \tag{7.7.46}$$

初始位置 $u(r,\ \theta,\ 0)=\alpha(r,\ \theta)$ 给出

$$\alpha(r,\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r)\right)\cos m\theta$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r)\right)\sin m\theta. \tag{7.7.47}$$

适当地排列(7.7.47)中的项，就看出它对 θ 是一个通常的傅里叶级数，其傅里叶系数是傅里叶-贝塞尔级数(注意 m 固定)．因此，这些系数可以由 $J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r)$ 关于权函数 r 的正交性确定[见(7.7.44)]．只要重复应用这种一维正交性就能确定这些系数．因为对 θ 的周期性使得两个特征函数对应一个特征值，这两组系数 A_{mn} 和 B_{mn}(包括 $m=0$)可以由一个初始条件确定．

然而，若用二维的正交方法确定这些系数会更容易些．回忆二维特征值问题

$$\nabla^2\phi+\lambda\phi=0$$

在半径为 a 的圆周上满足 $\phi=0$，其二维特征函数是二重无限组

$$\phi_\lambda(r,\theta)=J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r)\begin{Bmatrix}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{Bmatrix}.$$

因此

$$\alpha(r,\theta)=\sum_{\lambda}A_\lambda\,\phi_\lambda(r,\theta), \tag{7.7.48}$$

其中 $\sum_{\lambda}$ 表示对所有特征函数求和[这实际上是两个二重和，包括(7.7.47)中的 $\sin m\theta$ 及 $\cos m\theta$]．特征函数 $\phi_\lambda(r,\ \theta)$(在二维意义下)关于权函数 1 正交．这就算出了 A_λ(包括 A_{mn} 和 B_{mn})：

$$A_\lambda=\frac{\iint\alpha(r,\theta)\phi_\lambda(r,\theta)\,\mathrm{d}A}{\iint\phi_\lambda^2(r,\theta)\,\mathrm{d}A}, \tag{7.7.49}$$

其中 $\mathrm{d}A=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$．在二维条件下，权函数是常数，不过，由于几何的原因 $\mathrm{d}A=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$．因而，出现在贝塞尔函数一维正交性中的权函数 r 就是一个几何因子．

312

7.7.9 圆对称情形

作为例子，这一小节考虑圆形膜振动，它在圆形边界上满足 $u=0$ 并且初始条件是圆对称的(与 θ 无关)．可以把它看成是7.7.8节所分析的一般问题的特殊情形．也可以重新表述这个问题．这个问题包括初始条件在内的对称性暗含着，整个解都应该是圆对称的；不应该依赖角度 θ．因此，

$$u=u(r,t)\ \text{和}\ \nabla^2u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\qquad\text{由于}\quad\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=0.$$

数学形式是

$$\text{PDE:} \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)} \tag{7.7.50}$$

$$\text{BC:} \boxed{u(a,t) = 0} \tag{7.7.51}$$

$$\text{IC:} \boxed{\begin{aligned} u(r,0) &= \alpha(r) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(r,0) &= \beta(r). \end{aligned}} \tag{7.7.52}$$

上面的偏微分方程有两个自变量．这一章不必研究这个问题，本章要研究的是多变量问题．这个问题本可以在前面的章节中进行分析．然而，下面会看到，由于贝塞尔函数是径向依赖函数，把它放在这里讨论更自然些．

对(7.7.50)～(7.7.52)应用分离变量法．寻求乘积解

$$u(r,t) = \phi(r)h(t), \tag{7.7.53}$$

得到

$$\frac{1}{c^2}\frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{r\phi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\right) = -\lambda, \tag{7.7.54}$$

这里引入 $-\lambda$ 是因为猜想位移会随时间振荡．如果 $\lambda>0$，时间相关的方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2} = -\lambda c^2 h$$

313

的解是 $\operatorname{sinc}\sqrt{\lambda}r$ 和 $\operatorname{cosc}\sqrt{\lambda}r$．对分离常量的特征值问题是

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\right) + \lambda r\phi = 0} \tag{7.7.55}$$

$$\boxed{\phi(a) = 0} \tag{7.7.56}$$

$$\boxed{|\phi(0)| < \infty.} \tag{7.7.57}$$

因为(7.7.55)是施图姆–刘维尔问题，所以对应不同特征值的特征函数关于权函数 r 是正交的．

由瑞利商可以证明 $\lambda>0$，这样，用代换

$$z = \sqrt{\lambda}r, \tag{7.7.58}$$

方程(7.7.55)化成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(z\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}z}\right) + z\phi = 0 \quad 或 \quad z^2\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}z^2} + z\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}z} + z^2\phi = 0. \tag{7.7.59}$$

由于 m 阶贝塞尔微分方程

$$z^2\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}z^2} + z\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}z} + (z^2 - m^2)\phi = 0 \tag{7.7.60}$$

的解是 m 阶贝塞尔函数 $J_m(z)$ 和 $Y_m(z)$．因此，与(7.7.60)相比较可知，(7.7.59)是 0 阶贝塞尔微分方程．(7.7.59)的通解是径向变量表示的零阶贝塞尔函数的线性组合：

$$\phi = c_1 J_0(z) + c_2 Y_0(z) = c_1 J_0(\sqrt{\lambda} r) + c_2 Y_0(\sqrt{\lambda} r), \tag{7.7.61}$$

由于在 $r=0$ 处，$Y_0(\sqrt{\lambda} r)$有对数奇异性，(7.7.57)的奇异条件表明 $c_2=0$：

$$\phi = c_1 J_0(\sqrt{\lambda} r). \tag{7.7.62}$$

最后，特征值由在 $r=a$ 的条件(7.7.56)来确定：

$$J_0(\sqrt{\lambda} a) = 0. \tag{7.7.63}$$

314 于是，$\sqrt{\lambda} a$ 一定是零阶贝塞尔函数的零点. 这样就得到了无穷多个特征值，记为 λ_1，λ_2，….

我们得到乘积解的两个无穷解族

$$J_0(\sqrt{\lambda_n} r)\sin c\sqrt{\lambda_n} t \quad 和 \quad J_0(\sqrt{\lambda_n} r)\cos c\sqrt{\lambda_n} t.$$

由叠加原理，原问题(7.7.50)～(7.7.52)的解形式为

$$\boxed{u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\sqrt{\lambda_n} r)\cos c\sqrt{\lambda_n} t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n J_0(\sqrt{\lambda_n} r)\sin c\sqrt{\lambda_n} t.} \tag{7.7.64}$$

同前面一样，用初始条件确定系数 a_n 和 b_n. 由 $u(r, 0)=\alpha(r)$得到

$$\alpha(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\sqrt{\lambda_n} r). \tag{7.7.65}$$

系数 a_n 就是 $\alpha(r)$的傅里叶-贝塞尔系数(0 阶). 既然 $J_0(\sqrt{\lambda_n} r)$是关于权函数 r 的正交集，a_n 就容易确定了，

$$\boxed{a_n = \frac{\int_0^a \alpha(r) J_0(\sqrt{\lambda_n} r) r\mathrm{d}r}{\int_0^a J_0^2(\sqrt{\lambda_n} r) r\mathrm{d}r}.} \tag{7.7.66}$$

用相似的方式，由初始条件$\partial/\partial t u(r, 0)=\beta(r)$确定 b_n.

习题 7.7

*7.7.1 尽可能简单地求解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u,$$

其中 $u(a, \theta, t)=0$，$u(r, \theta, 0)=0$，$\partial u/\partial t(r, \theta, 0)=\alpha(r)\sin 3\theta$.

7.7.2 尽可能简单地求解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u \quad 满足 \quad \frac{\partial u}{\partial r}(a,\theta,t) = 0,$$

其初始条件为

(a) $u(r, \theta, 0)=0$ $\qquad \frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0)=\beta(r)\cos 5\theta$

(b) $u(r, \theta, 0)=0$ $\qquad \frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0)=\beta(r)$

(c) $u(r, \theta, 0)=\alpha(r, \theta)$ $\qquad \frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0)=0$

315 *(d) $u(r, \theta, 0)=0$ $\qquad \frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0)=\beta(r, \theta)$

7.7.3 考虑振动的四分之一圆($0<r<a$, $0<\theta<\pi/2$)膜，在边界上 $u=0$.

*(a)确定振动频率的表达式.

(b)求解出初值问题，其中

$$u(r,\theta,0)=g(r,\theta),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,0)=0.$$

7.7.4 考虑半径为 a(顶角为 60°)的"扇形膜"，其位移函数 $u=u(r,\theta,t)$ 满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\nabla^2 u.$$

如果 $\lambda>0$，确定振动的固有频率，其中边界条件为

(a) $u(r,0,t)=0$, $u(r,\pi/3,t)=0$, $\frac{\partial u}{\partial r}(a,\theta,t)=0$

(b) $u(r,0,t)=0$, $u(r,\pi/3,t)=0$, $u(a,\theta,t)=0$

*7.7.5 对于四分之一圆环面($a<r<b$, $0<\theta<\pi/2$)，膜振动的位移 $u=u(r,\theta,t)$，在边界上 $u=0$，求膜振动的固有频率.

7.7.6 假设圆形膜满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\nabla^2 u$$

和边界条件

$$u(a,\theta,t)=-\frac{\partial u}{\partial r}(a,\theta,t).$$

(a)证明这个膜仅仅振动.

(b)试求固有频率的表达式.

(c)求解初值问题，其中

$$u(r,\theta,0)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,0)=\alpha(r)\sin 3\theta.$$

7.7.7 在半径为 a 的圆内，求解热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\nabla^2 u,$$

其在整个边界上温度为零，初始条件为

$$u(r,\theta,0)=f(r,\theta).$$

简要地分析 $\lim_{t\to\infty}u(r,\theta,t)$. 并将这个结果与物理推断当 $t\to\infty$ 时的结果作比较.

316

*7.7.8 在绝热边界条件下重做习题 7.7.7.

7.7.9 在半径为 a 的半圆内，求解热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\nabla^2 u,$$

其中初始条件为

$$u(r,\theta,0)=f(r,\theta),$$

边界条件为

(a) $u(r,0,t)=0$, $u(r,\pi,t)=0$, $\frac{\partial u}{\partial r}(a,\theta,t)=0$

*(b) $\frac{\partial u}{\partial \theta}(r,0,t)=0$, $\frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\pi,t)=0$, $\frac{\partial u}{\partial r}(a,\theta,t)=0$

(c) $\frac{\partial u}{\partial \theta}(r,0,t)=0$, $\frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\pi,t)=0$, $u(a,\theta,t)=0$

(d) $u(r,0,t)=0$, $u(r,\pi,t)=0$, $u(a,\theta,t)=0$

并简要地分析 $\lim_{t\to\infty}u(r,\theta,t)$.

*7.7.10 求解 $u(r,t)$，并简要地分析 $\lim_{t\to\infty}u(r,t)$. 假设它满足圆对称热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

和条件

$$u(a,t)=0$$
$$u(r,0)=f(r).$$

7.7.11 重做习题7.7.10，其中边界条件为

$$\frac{\partial u}{\partial r}(a,t)=0.$$

7.7.12 在 $x=0$ 附近，下列微分方程所有解的预期近似性态是什么？

*(a) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+(x-6)y=0$

(b) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+\left(x^2+\frac{3}{16}\right)y=0$

*(c) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+(x+x^2)\frac{dy}{dx}+4y=0$

(d) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+(x+x^2)\frac{dy}{dx}-4y=0$

*(e) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-4x\frac{dy}{dx}+(6+x^3)y=0$

(f) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+\left(x+\frac{1}{4}\right)y=0$

[317] 7.7.13 利用一维瑞利商，证明(7.7.18)～(7.7.20)中的 $\lambda>0$.

7.8 贝塞尔函数的进一步讨论

7.8.1 贝塞尔函数的定性性质

概要了解一些贝塞尔函数的知识是有益的. 下面将贝塞尔微分方程重写成

$$\frac{d^2f}{dz^2}=-\left(1-\frac{m^2}{z^2}\right)f-\frac{1}{z}\frac{df}{dz},\tag{7.8.1}$$

这样可以将它与弹簧振子系统(单位质量，弹性常数 k 和摩擦系数 c)的运动方程

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-ky-c\frac{dy}{dt}$$

相比较，平衡解是 $y=0$. 于是，可以把贝塞尔微分方程看成是对随时间变化的摩擦力($c=1/t$)和对随时间变化的“恢复”力($k=1-t^2/m^2$)的描述. 仅当 $t>m(z>m)$时，后一个力才是变化的恢复力. 可以预期贝塞尔微分方程的解与有阻尼振动器类似(至少在 $z>m$ 时). z 越大，可变弹性常数 k 越趋向1，摩擦力越趋向0. 解以近似为1的频率振荡，但应当是慢慢地衰减的. 这与弱阻尼衰减的弹簧振子系统相似，但贝塞尔微分方程的解衰减得比任何指数阶都慢，原因是摩擦力趋向于0. 图7.8.1中贝塞尔微分方程的详细数值解就验证了这些说法，注意对小 z，

$$\begin{aligned}
J_0(z)&\approx 1 & Y_0(z)&\approx\frac{2}{\pi}\ln z\\
J_1(z)&\approx\frac{1}{2}z & Y_1(z)&\approx-\frac{2}{\pi}z^{-1}\\
J_2(z)&\approx\frac{1}{8}z^2 & Y_2(z)&\approx-\frac{4}{\pi}z^{-2}.
\end{aligned}\tag{7.8.2}$$

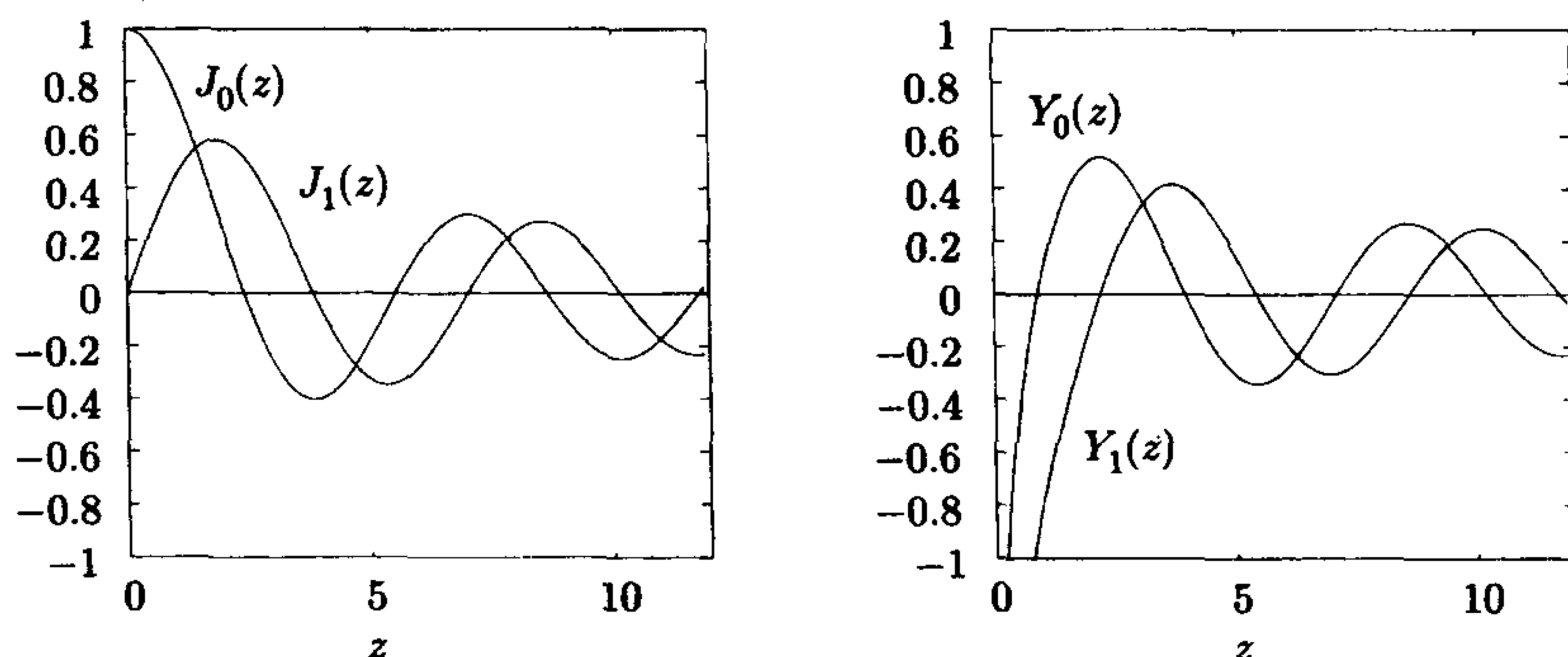


图 7.8.1 各种贝塞尔函数的图像

这些图生动地显现了值得记住的性质：第一类和第二类贝塞尔函数看起来像衰减的振荡. 事实上，当 z 大时，$J_m(z)$ 和 $Y_m(z)$ 可以被简单的代数衰减振动精确的近似：

$$\begin{aligned} J_m(z) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\pi}{4}-m\frac{\pi}{2}\right), \quad z\to\infty \\ Y_m(z) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z-\frac{\pi}{4}-m\frac{\pi}{2}\right), \quad z\to\infty. \end{aligned} \tag{7.8.3}$$

这就是渐近性公式，意指当 $z\to\infty$ 时，近似程度会不断地提高. 在 5.9 节中说明了，对于施图姆-刘维尔问题，当特征值 $\lambda\gg1$ 时，总有与(7.8.3)式类似的近似公式. 这里有 $\lambda\gg1$ 就有 $z\gg1$，因为 $z=\sqrt{\lambda}r$ 而 $0<r<a$(只要 r 不是太小). [318]

对(7.8.3)的推导所需要的知识超出了本书的范围. 不过有关(7.8.3)的参考资料有很多的⊖. 由(7.8.3)注意到，当 z 大时，所有对贝塞尔函数近似性态的仅有差别是准确相移. 还有，当 z 大时，频率近似为 1(周期为 2π)，这与摩擦消失和 $k\to1$ 的弹簧振子系统相一致. 而且，如前面的定性讨论，当 $z\to\infty$ 时，振幅 $\sqrt{2/\pi z}$ 的衰减要比弱阻尼振荡的指数衰减得慢.

7.8.2 特征值的渐近公式

特征函数 $J_m(z)$ 零点的近似值可以由渐近公式(7.8.3)获得. 例如，对 $m=0$，z 大时，

$$J_0(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right).$$

零点的近似值出现在 $z-\pi/4=-\pi/2+s\pi$，但 s 一定要大(为了 z 大). 这样大零点的近似值为

$$z\sim\pi\left(s-\frac{1}{4}\right), \tag{7.8.4}$$

其中 s 是大整数. 随着 n 增加，上式的估值会越来越精确. 事实上，当 $n=2$ 或 3 时，其估值 [319]

⊖ 对数学在科学和工程中的应用有浓厚兴趣的学生，推荐 M. Abramowitz 和 I. A. Stegun 编辑的 *Handbook of Mathematical Functions* 一书，原本由 National Bureau of Standards 在 1964 年出版，1974 年 Dover 重印了平装本.

已经相当精确(见表7.8.1)，也许计算比(7.8.4)更精确的零点是不必要的. 渐近公式的精度还表明前几个特征值的差已经接近 π(如对大特征值预测的那样).

表 7.8.1 $J_0(z)$的零点

n	z_{0n}	精确解	式(7.8.4)中的大 z	误差	误差百分比	$z_{0_n}-z_{0(n-1)}$
1	z_{01}	2.404 83…	2.356 19	0.048 64	2.0	-
2	z_{02}	5.520 08…	5.497 79	0.022 29	0.4	3.115 25
3	z_{03}	8.653 73…	8.639 38	0.014 35	0.2	3.133 65
4	z_{04}	11.791 53…	11.780 97	0.011 56	0.1	3.137 80

7.8.3 贝塞尔函数的零点和结点曲线

已经证明了特征函数是 $J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r)$，其中 $\lambda_{mn}=(z_{mn}/a)^2$，$z_{mn}$是 $J_m(z)$的第 n 个零点. 于是特征函数为

$$J_m(z_{mn}r/a).$$

例如，$m=0$ 时，特征函数是 $J_0(z_{0n}r/a)$，$J_0(z)$的图像见图7.8.2(已标出零点). r 从0到 a 取值，特征函数 $J_0(z_{0n}r/a)$的自变量从0到第 n 个零点 z_{0n}取值，在 $r=a$，$z=z_{0n}$为第 n 个零点. 这样第 n 个特征函数在内部有 $n-1$ 个零点. 虽然原来这是关于正则施图姆-刘维尔问题的陈述，但对于奇异问题也是适用的(如果特征函数存在).

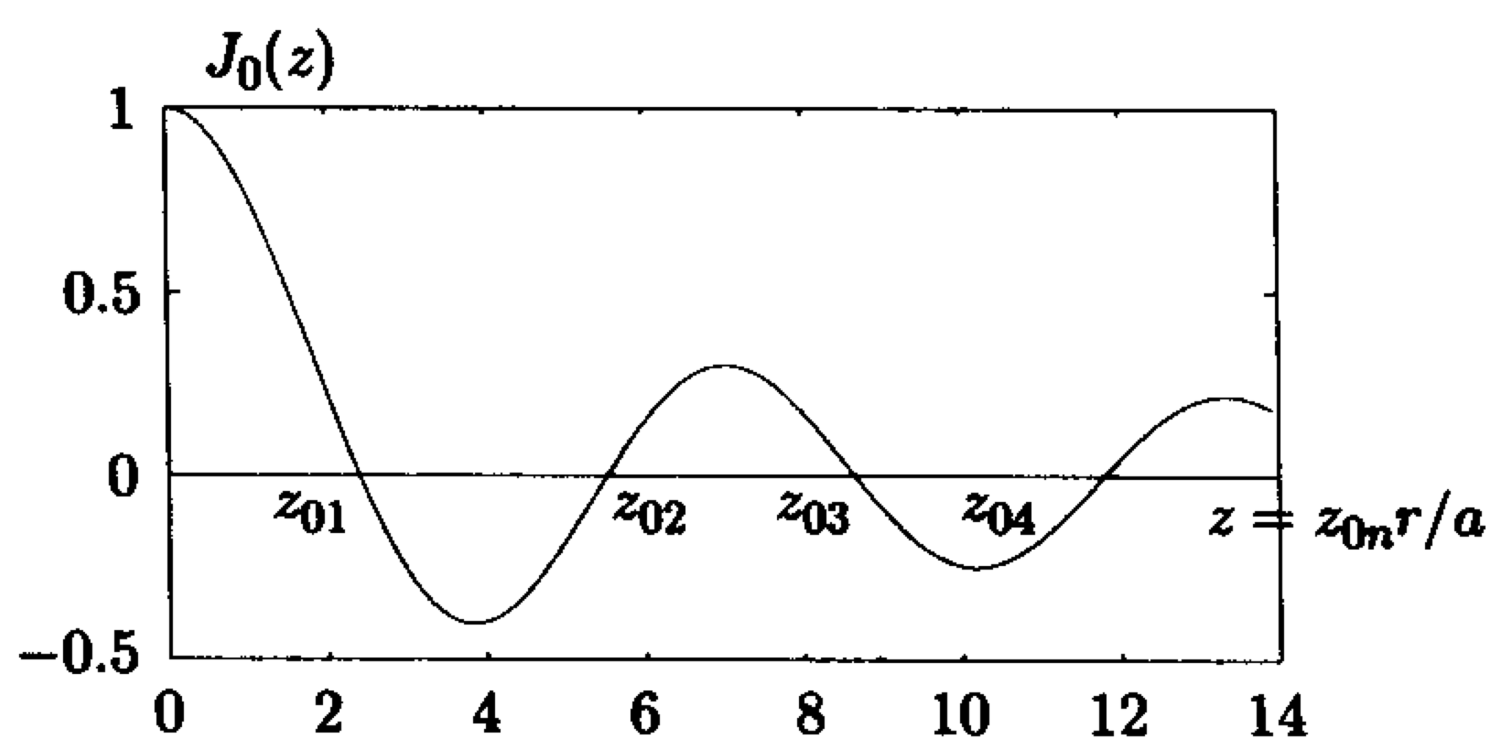


图 7.8.2 $J_0(z)$的图形和它的零点

波动方程的分离变量解是

320

$$u(r,\theta,t)=f(r)g(\theta)h(t),$$

其中

$$u(r,\theta,t)=J_m\left(z_{mn}\frac{r}{a}\right)\begin{Bmatrix}\sin m\theta\\ \cos m\theta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sin c\sqrt{\lambda_{mn}}t\\ \cos c\sqrt{\lambda_{mn}}t\end{Bmatrix}, \tag{7.8.5}$$

叫做振动的简正模式，图7.8.3是其固定 t 时的图像. $m\neq 0$ 时有四个解族($m=0$ 时有两个). 每个模式按一个特征固有频率 $c\sqrt{\lambda_{mn}}$振动. 在膜的称为结点曲线的位置，膜处于始终不受扰动状态(对于振动弦，称这些位置为结点). $\sin m\theta$ 模式的结点曲线由下式确定：

$$J_m\left(z_{mn}\frac{r}{a}\right)\sin m\theta=0. \tag{7.8.6}$$

结点曲线包含所有使得 $\sin m\theta=0$ 或 $J_m(z_{mn}r/a)=0$ 的点；$\sin m\theta$ 沿 $2m$ 条不同射线为零，$\theta=s\pi/m$，$s=1, 2, \cdots, 2m$. 为了使 $J_m(z_{mn}r/a)$对 $0<r<a$ 有零点，$z_{mn}r/a$ 必定是 $J_m(z)$在前面的零点，$z_{mn}r/a=z_{mp}$，$p=1, 2, \cdots, n-1$. 于是除了 $r=a$，沿着 $n-1$ 个圆，$J_m(z_{mn}r/a)=0$. 图7.8.3是 $m=3$，$n=2$ 的情形，其中的结点圆是由查表确定的.

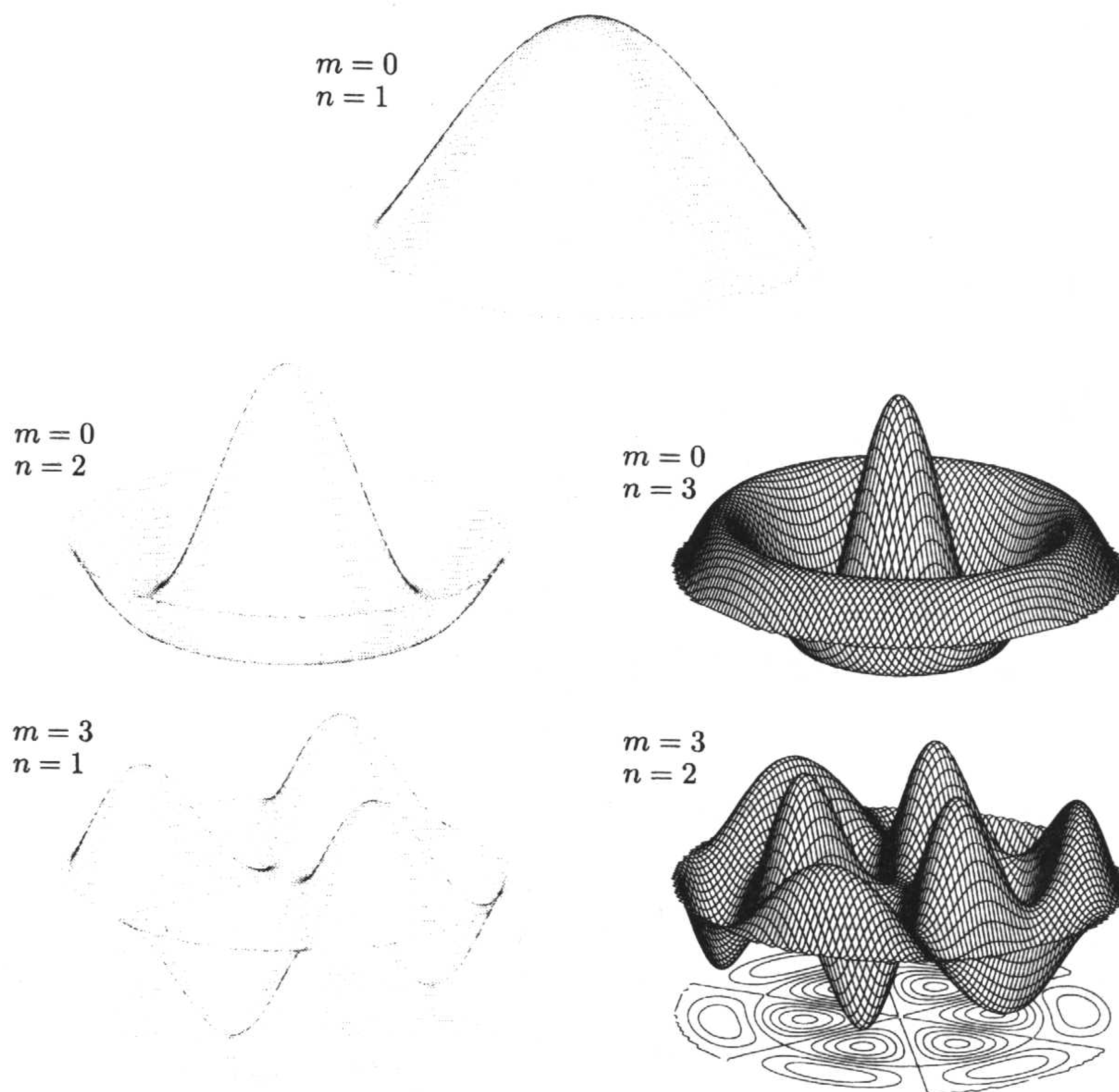


图 7.8.3　振动圆形膜的结点曲线及简正结点

7.8.4　贝塞尔函数的级数表示

讨论贝塞尔函数的通常方法是微分方程中的级数解法. 但在这方面得不到多少有用的信息. 不过，下面的公式会有些帮助的.

首先，复习一些在 $z=0$ 的邻域内，关于二阶线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}z^2}+a(z)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}+b(z)f=0 \tag{7.8.7}$$

级数解的结论. 如果 $a(z)$ 和 $b(z)$ 在 $z=0$ 附近有泰勒级数，$z=0$ 就是通常点. 此时，至少在 $z=0$ 的某个邻域内，所有的解都可以表示为收敛的泰勒级数：

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots,$$

如果 $z=0$ 不是通常点，称其为奇异点(例如，$z=0$ 是贝塞尔微分方程的奇异点). 如果 $z=0$ 是奇异点，就不能断定所有解在 $z=0$ 点都有泰勒级数. 不过，如果 $a(z)=R(z)/z$，$b(z)=S(z)/z^2$，其中 $R(z)$ 和 $S(z)$ 在 $z=0$ 点有泰勒级数，就能对微分方程的解有更多的了解. 这种情况称之为正则奇异点，此时系数 $a(z)$ 和 $b(z)$ 最差也能分别有简单极点和二阶极点. 系数

$a(z)$和$b(z)$有可能不是奇异点. 例如，如果$a(z)=1+z$和$b(z)=(1-z^3)/z^2$，那么$z=0$就是正则奇异点. (7.8.7)形式的贝塞尔微分方程是

$$\frac{d^2f}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{df}{dz}+\frac{z^2-m^2}{z^2}f=0.$$

这里$R(z)=1$和$S(z)=z^2-m^2$；都在$z=0$点有泰勒级数. 因此，$z=0$是贝塞尔微分方程的正则奇异点.

对于正则奇异点$z=0$，由弗罗贝尼乌斯方法微分方程至少有一个如下形式的解：

$$f=z^p\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n, \tag{7.8.8}$$

321 ~ 322

也就是z^p乘以泰勒级数，此处p是二次指标方程的一个解. 而获得指标方程的一个方法是把$f=z^p$代入对应的等量纲方程，它是由$R(0)$代替$R(z)$和$S(0)$代替$S(z)$得到的：

$$p(p-1)+R(0)p+S(0)=0.$$

如果(指标方程的根)p的两个值的差不是整数，那么就有两个(7.8.8)形式的无关解. 如果指标方程的两个根是相同的，那么只有一个(7.8.8)形式的解，而另一个解更复杂且总含有对数函数. 如果指标方程的根相差一个整数，那么有时两个解都有(7.8.8)的形式，而有时却只有较大的根p对应的解是(7.8.8)的形式，而较小的根对应的解必须引入含对数函数的修正. 弗罗贝尼乌斯方法的具体过程在大多数初级微分方程教材中都有所讨论.

对于贝塞尔微分方程，$R(0)=1$，$S(0)=-m^2$，其指标方程是

$$p(p-1)+p-m^2=0,$$

它的根是$\pm m$. 如果$m=0$，两个根相同. (7.8.8)只对一个解有效，另一个解一定含对数函数. 如果$m\neq0$，指标方程两个根的差为整数. 详细的计算表明一定需要引入对数函数. 下面的无穷级数可以代入方程进行验证，它们通常被看成$J_m(z)$和$Y_m(z)$的定义：

$$J_m(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z/2)^{2k+m}}{k!(k+m)!}, \tag{7.8.9}$$

$$\begin{aligned}Y_m(z)=\frac{2}{\pi}\Big[&\Big(\log\frac{z}{2}+\gamma\Big)J_m(z)-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m-k-1)!(z/2)^{2k-m}}{k!}\\&+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}[\varphi(k)+\varphi(k+m)]\frac{(z/2)^{2k+m}}{k!(m+k)!}\Big],\end{aligned} \tag{7.8.10}$$

其中

(i)$\varphi(k)=1+1/2+1/3+\cdots+1/k$，$\varphi(0)=0$.

(ii)$\gamma=\lim_{k\to\infty}[\varphi(k)-\ln k]=0.577\,215\,7\cdots$，称为欧拉常数.

(iii)如果$m=0$，$\sum_{k=0}^{m-1}\equiv0$.

这些都是从前面介绍的 Abramowitz 和 Stegun 编辑的手册中得到的.

习题 7.8

7.8.1 振动圆环膜 $1<r<2$ 的边值问题是

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)+\left(\lambda r-\frac{m^2}{r}\right)f=0,$$

其中 $f(1)=0$，$f(2)=0$，这里 $m=0$，1，2，….

323

(a)证明 $\lambda>0$.

*(b)得到确定特征值的表达式.

(c)m 取什么值时特征值最小?

*(d)得到确定最小特征值的上下界.

(e)运用测试函数，得到最小特征值的一个上界.

(f)运用贝塞尔函数表计算(b)中最小特征值的近似值，并与(d)和(e)比较.

7.8.2 假设半径为 a 的四分之一圆内的温度 $u(r,\theta,t)$ 满足方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\nabla^2 u$$

及条件

$$u(r,0,t)=0 \quad u(a,\theta,t)=0$$
$$u(r,\pi/2,t)=0 \quad u(r,\theta,0)=G(r,\theta).$$

(a)证明边值问题是

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)+\left(\lambda r-\frac{\mu}{r}\right)f=0,$$

其中 $f(a)=0$，且 $f(0)$ 有界.

(b)如果 $\mu\geqslant 0$，证明 $\lambda>0$.

(c)证明：对于每个 μ，当 $0<r<a$ 时，对应最小特征值的特征函数没有零点.

*(d)求解初值问题.

7.8.3 重做习题 7.8.2，其中边界条件为

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(r,0,t)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial \theta}\left(r,\frac{\pi}{2},t\right)=0,\quad u(a,\theta,t)=0.$$

7.8.4 考虑边值问题

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)+\left(\lambda r-\frac{m^2}{r}\right)f=0,$$

其中 $f(a)=0$，$f(0)$ 有界. 对于每个整数 m，证明：第 n 个特征函数在 $0<r<a$ 上有 $n-1$ 个零点.

7.8.5 利用在 $z\to 0$ 和 $z\to\infty$ 时，已知的渐近性态，画出下列函数的草图($z>0$).

(a)$J_4(z)$ (b)$Y_1(z)$ (c)$Y_0(z)$

(d)$J_0(z)$ (e)$Y_5(z)$ (f)$J_2(z)$

324

7.8.6 确定圆形膜大振动频率的近似值.

7.8.7 考虑贝塞尔微分方程

$$z^2\frac{d^2f}{dz^2}+z\frac{df}{dz}+(z^2-m^2)f=0.$$

设 $f=y/z^{1/2}$. 请导出

$$\frac{d^2y}{dz^2}+y\left(1+\frac{1}{4}z^{-2}-m^2z^{-2}\right)=0.$$

*7.8.8 利用习题 7.8.7，确定 $J_{1/2}(z)$ 和 $Y_{1/2}(z)$ 的准确表达式. 对其验证(7.8.3)和(7.7.33).

7.8.9 利用习题 7.8.7 的结论，若 z 大，尽可能多地验证(7.8.3).

7.8.10 利用习题 7.8.7 的结论，改进(7.8.3)：

(a)作代换 $y=e^{iz}w(z)$，证明

$$\frac{d^2w}{dz^2}+2i\frac{dw}{dz}+\frac{\gamma}{z^2}w=0,\quad \text{其中 } \gamma=\frac{1}{4}-m^2.$$

(b)作代换 $w=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n z^{-n}$. 确定 β_n 的最初几项(假设 $\beta_0=1$).

(c)利用(b)获得贝塞尔微分方程改进的渐近解. 要得到实解，取实部和虚部.

(d)寻求 β_n 的递推公式，证明级数发散. (不过，一个有限级数是非常有用的.)

7.8.11 为了"理解"贝塞尔微分方程在 $z\to\infty$ 时的性态，设 $x=1/z$. 证明 $x=0$ 是非正则奇异点. [习题 7.8.10 对非正则奇异点邻域内微分方程的渐近解作了不具有启发性的分析，更系统的分析可参阅渐近性或扰动法的高等教材(如 Bender and Orszag[1999]).]

7.8.12 对 $m=0$，(7.7.34) ~ (7.7.36)特征值的最小值是 $\lambda=(z_{01}/a)^2$. 利用瑞利商和测试函数来确定它一个精度合理的上界，并与精确的答案作比较.

325 7.8.13 请解释图 7.8.3 中结点曲线间隔几乎相等的原因.

7.9 圆柱体上的拉普拉斯方程

7.9.1 概述

拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u=0 \tag{7.9.1}$$

表示了(无热源)热传导方程的稳态. 我们已经在矩形区域(2.5.1 节)和圆形区域(2.5.2 节)上求解了拉普拉斯方程. 在这两种情形分离变量时，振荡只出现在一个方向. 长方体上的拉普拉斯方程也能够用分离变量法求解. 第 7 章的部分习题表明，三个自变量能给出两个有振荡解的特征值问题，而在一个方向上的解不振荡.

一个更有趣的问题是求解半径为 a 高为 H 圆柱体上的拉普拉斯方程. 采用柱面坐标

$$x=r\cos\theta$$
$$y=r\sin\theta$$
$$z=z,$$

拉普拉斯方程是

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{7.9.2}$$

在整个圆柱的边界上 u(也许是温度)满足:

顶部:$u(r,\theta,H)=\beta(r,\theta)$

底部:$u(r,\theta,0)=\alpha(r,\theta)$

侧面:$u(a,\theta,z)=\gamma(\theta,z)$

有三个非齐次边界条件. 一种方法是把问题分解成三个简单问题的和，每个问题都满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u_i=0,\quad i=1,2,3,$$

其中 $u=u_1+u_2+u_3$，如图 7.9.1 所示. 这样，每个问题都满足两个齐次边界条件，而它们的和满足所要的非齐次边界条件. 先对所有三种情形一起分离变量，再对三个问题各自求解.

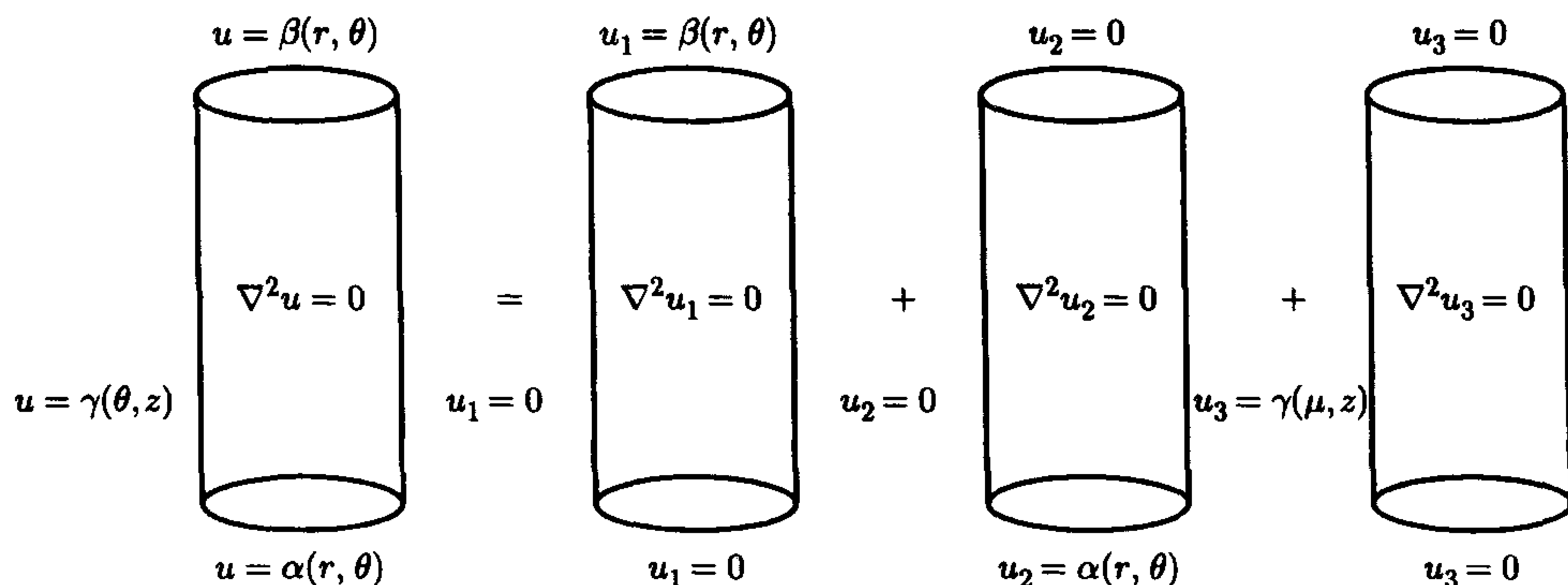


图 7.9.1 圆柱内的拉普拉斯方程

7.9.2 分离变量

先求拉普拉斯方程的乘积解

$$u(r,\theta,z) = f(r)g(\theta)h(z), \tag{7.9.3}$$

326

把(7.9.3)代入(7.9.2)，然后两端除以$f(r)g(\theta)h(z)$得到

$$\frac{1}{rf}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\theta^2}+\frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}z^2}=0. \tag{7.9.4}$$

直接就分离出自变量 z，

$$\frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}z^2}=\lambda. \tag{7.9.5}$$

那么在 z 方向上会有振动吗？由图 7.9.1 中看出，在 u_3 问题中，在 z 方向上会有振荡，而对于另外两个却不必要. 在 u_3 问题中可能有 $\lambda<0$，而在 u_1 和 u_2 问题中不会. 因此，目前不指定 λ. (7.9.4)的 r 和 θ 部分可以通过乘以 r^2 分离开来[用到了(7.9.5)]：

$$\frac{r}{f}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right)+\lambda r^2=-\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\theta^2}=\mu. \tag{7.9.6}$$

由于预计所有问题中在 θ 方向上都产生振荡，所以引入的第二个分离常量为 μ，希望 $\mu>0$. 事实上，关于 θ 的周期边界条件表明

$$\mu=m^2, \tag{7.9.7}$$

$g(\theta)$可以是 $\sin m\theta$ 或 $\cos m\theta$，m 为非负整数，$m=0, 1, 2, \cdots$，关于 θ 的傅里叶级数适合所有问题.

总之，对 θ 的依赖是 $\sin m\theta$ 或 $\cos m\theta$，剩下的两个微分方程是

$$\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}z^2}=\lambda h \tag{7.9.8}$$

$$r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right)+(\lambda r^2-m^2)f=0. \tag{7.9.9}$$

327

两个微分方程仅包含一个未指定参数 λ. 只有一个会成为特征值问题. 特征值问题需要两个齐次边界条件. 不同的问题 u_1，u_2 和 u_3 将产生不同的结果. u_3 的问题有两个 z 的齐次边界条件，因此(7.9.8)会成为一个特征值问题[而(7.9.9)会有非振荡解]. 不过，u_1 的和 u_2 的问题没有

两个 z 的齐次边界条件，而有两个 r 的齐次边界条件．一个在 $r=a$．另一个一定是在 $r=0$ 的奇异条件，这是由于极坐标(或柱面坐标)及方程(7.9.9)在 $r=0$ 的奇异性：

$$|f(0)|<\infty. \tag{7.9.10}$$

对于 u_1 的和 u_2 的问题，(7.9.9)是特征值问题．方程(7.9.9)的解振荡，而方程(7.9.8)的解不振荡．下面将具体详细地说明这三个问题．

7.9.3 侧面及顶部或底部为零温度的情形

u_1 的数学问题是

$$\boxed{\nabla^2 u_1=0} \tag{7.9.11}$$

$$\boxed{u_1(r,\theta,0)=0} \tag{7.9.12}$$

$$\boxed{u_1(r,\theta,H)=\beta(r,\theta)} \tag{7.9.13}$$

$$\boxed{u_1(a,\theta,z)=0.} \tag{7.9.14}$$

底部的温度为零．暂时忽略非齐次条件(7.9.13)，由分离变量 $u_1=f(r)g(\theta)h(z)$．已知 θ 部分等于 $\sin m\theta$ 和 $\cos m\theta$($m\geqslant 0$ 为整数)．依赖 z 的方程(7.9.8)只满足一个齐次条件 $h(0)=0$．依赖 r 的方程是一个确定分离常数 λ 的边值问题．两个齐次边界条件是

$$f(a)=0 \tag{7.9.15}$$

$$|f(0)|<\infty. \tag{7.9.16}$$

328 特征值问题(7.9.9)、(7.9.15)及(7.9.16)已在7.8节分析过了．其中证明了 $\lambda>0$(直接利用瑞利商)．进而得出了方程(7.9.9)的通解是变量为 $\sqrt{\lambda}r$ 的 m 阶贝塞尔函数的线性组合：

$$f(r)=c_1J_m(\sqrt{\lambda}r)+c_2Y_m(\sqrt{\lambda}r)=c_1J_m(\sqrt{\lambda}r), \tag{7.9.17}$$

其化简用到了奇异条件(7.9.16)．然后由齐次条件(7.9.15)确定 λ：

$$\boxed{J_m(\sqrt{\lambda}a)=0.} \tag{7.9.18}$$

$\sqrt{\lambda}a$ 一定是第 m 个贝塞尔函数的零点，对每个 m，符号 λ_{mn} 表示其无穷个特征值．特征函数 $J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r)$ 对 r 振荡．

由 $\lambda>0$，(7.9.8)满足 $h(0)=0$ 的解与下式成比例：

$$h(z)=\sinh\sqrt{\lambda}z. \tag{7.9.19}$$

在 z 方向上不出现振荡．这样就存在两个二重无穷乘积解族：

$$\sinh\sqrt{\lambda_{mn}}zJ_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r)\begin{Bmatrix}\sin m\theta\\ \cos m\theta\end{Bmatrix}, \tag{7.9.20}$$

它们在 r 和 θ 方向上振荡，而在 z 方向上没有．根据叠加原理，应当考虑

$$\boxed{\begin{aligned}u(r,\theta,z)=&\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\sinh\sqrt{\lambda_{mn}}zJ_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r)\cos m\theta\\&+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sinh\sqrt{\lambda_{mn}}zJ_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r)\sin m\theta.\end{aligned}} \tag{7.9.21}$$

非齐次边界条件(7.9.13)，$u_1(r,\theta,H)=\beta(r,\theta)$将确定系数$A_{mn}$和$B_{mn}$. 它包含一个关于$\theta$的傅里叶级数和一个关于$r$的傅里叶-贝塞尔级数. 这样，能够用两个一维正交性公式求得A_{mn}和B_{mn}. 另一种方法是用$J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r)\cos m\theta$和$J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r)\sin m\theta$的二维正交性(见7.8节)更容易计算系数$A_{mn}$和$B_{mn}$. 这里略去细节.

类似地，可以求得u_2，这个问题的求解留作习题. [329]

7.9.4 顶部和底部为零温度的情形

如果顶部和底部的温度为零，这个问题就同前面的有些不同. u_3的问题是

$$\boxed{\nabla^2 u_3=0} \tag{7.9.22}$$

$$\boxed{u_3(r,\theta,0)=0} \tag{7.9.23}$$

$$\boxed{u_3(r,\theta,H)=0} \tag{7.9.24}$$

$$\boxed{u_3(a,\theta,z)=\gamma(\theta,z).} \tag{7.9.25}$$

可以再次应用分离变量法. 周期性表明θ部分与傅里叶级数($\sin m\theta$和$\cos m\theta$)有关. 然而，与7.9.3节不同，z方程有两个齐次边界条件：

$$\boxed{\frac{d^2h}{dz^2}=\lambda h} \tag{7.9.26}$$

$$\boxed{h(0)=0} \tag{7.9.27}$$

$$\boxed{h(H)=0.} \tag{7.9.28}$$

这是最简单的施图姆-刘维尔特征值问题(形式上有点不同). 为了使$h(z)$振荡并满足(7.9.27)和(7.9.28)式，分离常量λ必须是负的. 事实上，应该发现

$$\lambda=-\left(\frac{n\pi}{H}\right)^2 \quad n=1,2,\cdots \tag{7.9.29}$$

$$h(z)=\sin\frac{n\pi z}{H}. \tag{7.9.30}$$

从顶部和底部的边界条件可以看出，这里将用z的通常傅里叶正弦级数. [330]

前面已经得到在z和θ方向上的振荡解. 依赖r的解不应当振荡；它们满足(7.9.9)，由(7.9.29)得到

$$\boxed{r\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)+\left(-\left(\frac{n\pi}{H}\right)^2r^2-m^2\right)f=0.} \tag{7.9.31}$$

在$r=0$的齐次条件是奇异性条件

$$|f(0)|<\infty, \tag{7.9.32}$$

但在$r=a$不是齐次条件.

方程(7.9.31)看起来像贝塞尔微分方程，但r^2项前面的符号却相反，利用实变换也不能把它变换成贝塞尔微分方程. 如果设

$$s = \mathrm{i}\left(\frac{n\pi}{H}\right)r, \tag{7.9.33}$$

其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，那么(7.9.31)变为

$$s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(s\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\right)+(s^2-m^2)f=0 \quad 或 \quad s^2\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}s^2}+s\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}+(s^2-m^2)f=0.$$

这正是贝塞尔微分方程，于是

$$f=c_1J_m(s)+c_2Y(s) \quad 或 \quad f=c_1J_m\left(\mathrm{i}\frac{n\pi}{H}r\right)+c_2Y_m\left(\mathrm{i}\frac{n\pi}{H}r\right). \tag{7.9.34}$$

因此，方程(7.9.31)的解可以表示成虚变量的贝塞尔函数. 但这用处不大，因为贝塞尔函数一般不按这种形式列表.

为此，介绍一种实变换，它消去微分方程中对 $n\pi/H$ 的依赖：

$$w=\frac{n\pi}{H}r.$$

方程(7.9.31)变为

$$\boxed{w^2\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}w^2}+w\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}w}+(-w^2-m^2)f=0.} \tag{7.9.35}$$

其中的符号与贝塞尔微分方程不同. 方程(7.9.35)是贝塞尔微分方程的变形，它的解被称为**变形贝塞尔函数**，已经对其制成了很好的函数表.

331 方程(7.9.35)与贝塞尔微分方程在 $w=0$ 处有同类型的奇异点. 这样，其奇异行为可以通过弗罗贝尼乌斯方法[⊖]确定. 这样，就能找到在 $w=0$ 有定义的一个解，称为**变形第一类 m 阶贝塞尔函数**，记为 $I_m(w)$. 另一个无关解在原点是奇异的，称为**变形第二类 m 阶贝塞尔函数**，记为 $K_m(w)$. $I_m(w)$ 和 $K_m(w)$ 都有很好的函数表. 所以对 $I_m(w)$ 和 $K_m(w)$ 不需要知道的太多. 于是，(7.9.31)的通解是

$$f=c_1K_m\left(\frac{n\pi}{H}r\right)+c_2I_m\left(\frac{n\pi}{H}r\right). \tag{7.9.36}$$

由于在 $r=0$，K_m 是奇异的，而 I_m 不是，就有 $c_1=0$ 和 $f(r)$ 与 $I_m(n\pi r/H)$ 成比例. 注意到 $w>0$ 时，$I_m(w)$ 和 $K_m(w)$ 都是非振荡的且不为零. 这些在7.9.5节中再做进一步讨论.

因此有两个二重无穷乘积解族：

$$I_m\left(\frac{n\pi}{H}r\right)\sin\frac{n\pi z}{H}\cos m\theta \quad 和 \quad I_m\left(\frac{n\pi}{H}r\right)\sin\frac{n\pi z}{H}\sin m\theta. \tag{7.9.37}$$

这些解对 z 和 θ 振荡，但对 r 不振荡. 与 z 的傅里叶正弦级数和 θ 的傅里叶级数等价的叠加原理给出

$$\boxed{\begin{aligned} u_3(r,\theta,z) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}E_{mn}I_m\left(\frac{n\pi}{H}r\right)\sin\frac{n\pi z}{H}\cos m\theta \\ &\quad+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}F_{mn}I_m\left(\frac{n\pi}{H}r\right)\sin\frac{n\pi z}{H}\sin m\theta. \end{aligned}} \tag{7.9.38}$$

⊖ 这里使用复变换(7.9.33)更容易. 这样贝塞尔函数的无穷级数表示对复变量仍然有效，避免了额外的计算.

系数 E_{mn} 和 F_{mn} 能够通过两个一维正交性或二维正交性由非齐次条件(7.9.25)确定[如果 $I_m(n\pi a/H)\neq 0$]. 下一节再更深入地讨论 $I_m(n\pi a/H)$ 的性质，包括它没有正零点的事实.

这样，只要在边界上给定任何温度分布，拉普拉斯方程在圆柱上的解就确定了.

7.9.5 修正贝塞尔函数

定义修正贝塞尔函数的微分方程是

$$w^2\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}w^2}+w\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}w}+(-w^2-m^2)f=0. \tag{7.9.39}$$

两个无关解记为 $K_m(w)$ 和 $I_m(w)$，其在奇异点 $w=0$ 邻域内的性态由指标方程的根 $\pm m$ 确定，在 $w=0$ 邻域内对应的近似解的形式为 $w^{\pm m}$($m\neq 0$ 时)和 w^0 及 $w^0\ln w$(在 $m=0$ 时). 可以选取两个无关解，一个在 $w=0$ 点性态好，一个奇异. [332]

对这些函数的良好理解源自对其 $w\to\infty$ 时的性态分析. 粗略地讲，对大 w，(7.9.39)可以改写为

$$\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}w^2}\approx-\frac{1}{w}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}w}+f. \tag{7.9.40}$$

把这看成受力质点的牛顿定律，弱阻尼力 $-1/w\mathrm{d}f/\mathrm{d}w$ 当 $w\to\infty$ 时趋于零. 可以预计，$w\to\infty$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}w^2}\approx f,$$

这表明解应当是指数增长项 e^{w} 和指数衰减项 e^{-w} 的线性组合. 事实上，弱阻尼是有影响的(如同对通常贝塞尔函数的作用一样). 下面介绍(不作证明)关于解的更进一步结果，即(7.9.39)的解在 w 大时的渐近性态近似是 $\mathrm{e}^{\pm w}/w^{1/2}$. 于是，$I_m(w)$ 和 $K_m(w)$ 都是这两部分的线性组合，一个呈指数增长而另一个呈指数衰减.

在 $w\to\infty$ 时，只有一个衰减的无关线性组合. 而有许多线性增长的组合. 定义 $K_m(w)$ 是 $w\to\infty$ 时衰减的解. 它一定与 $\mathrm{e}^{-w}/w^{1/2}$ 成比例. 并可以唯一地定义，若要求 $w\to\infty$ 时

$$\boxed{K_m(w)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^{-w}}{w^{1/2}},} \tag{7.9.41}$$

$K_m(w)$ 在 $w\to 0$ 时的性态是两个不同性态的某种线性组合(例如，w^m 和 w^{-m}，$m\neq 0$). 一般它就由这两部分组成，因而在 $w=0$ 点是奇异的. 更深刻的处理可以证明：当 $w\to 0$ 时，

$$\boxed{K_m(w)\sim\begin{cases}\ln w & m=0\\ \dfrac{1}{2}(m-1)!\left(\dfrac{1}{2}w\right)^{-m} & m\neq 0,\end{cases}} \tag{7.9.42}$$

关于这个函数最重要的事实是，当 $w\to\infty$ 时，$K_m(w)$ 呈指数衰减，但在 $w=0$ 点是奇异的.

由于 $K_m(w)$ 在 $w=0$ 处是奇异的，可以唯一地定义第二个在 $w=0$ 处不奇异的解 $I_m(w)$ 满足当 $w\to 0$ 时，

$$\boxed{I_m(w)\sim\frac{1}{m!}\left(\frac{1}{2}w\right)^m.} \tag{7.9.43}$$

[333]

当 $w\to\infty$ 时，$I_m(w)$ 的性态是两个不同渐近性态($\mathrm{e}^{\pm w}/w^{1/2}$)的某个线性组合. 它一般由这两部

分组成，因此，在 $w\to\infty$ 时，$I_m(w)$ 呈指数增长. 能够进一步证明：当 $w\to\infty$ 时，

$$\boxed{I_m(w)\ \sim\sqrt{\frac{1}{2\pi w}}\mathrm{e}^{w},} \tag{7.9.44}$$

而关于这个函数最重要的事实是，在 $w=0$ 处，$I_m(w)$ 性态良好，但在 $w\to\infty$ 时呈指数增长.

图 7.9.2 给出了一些修正贝塞尔函数的图像. 虽然没有给出证明，要注意到 $I_m(w)$ 和 $K_m(w)$ 在 $w>0$ 时都不为零.

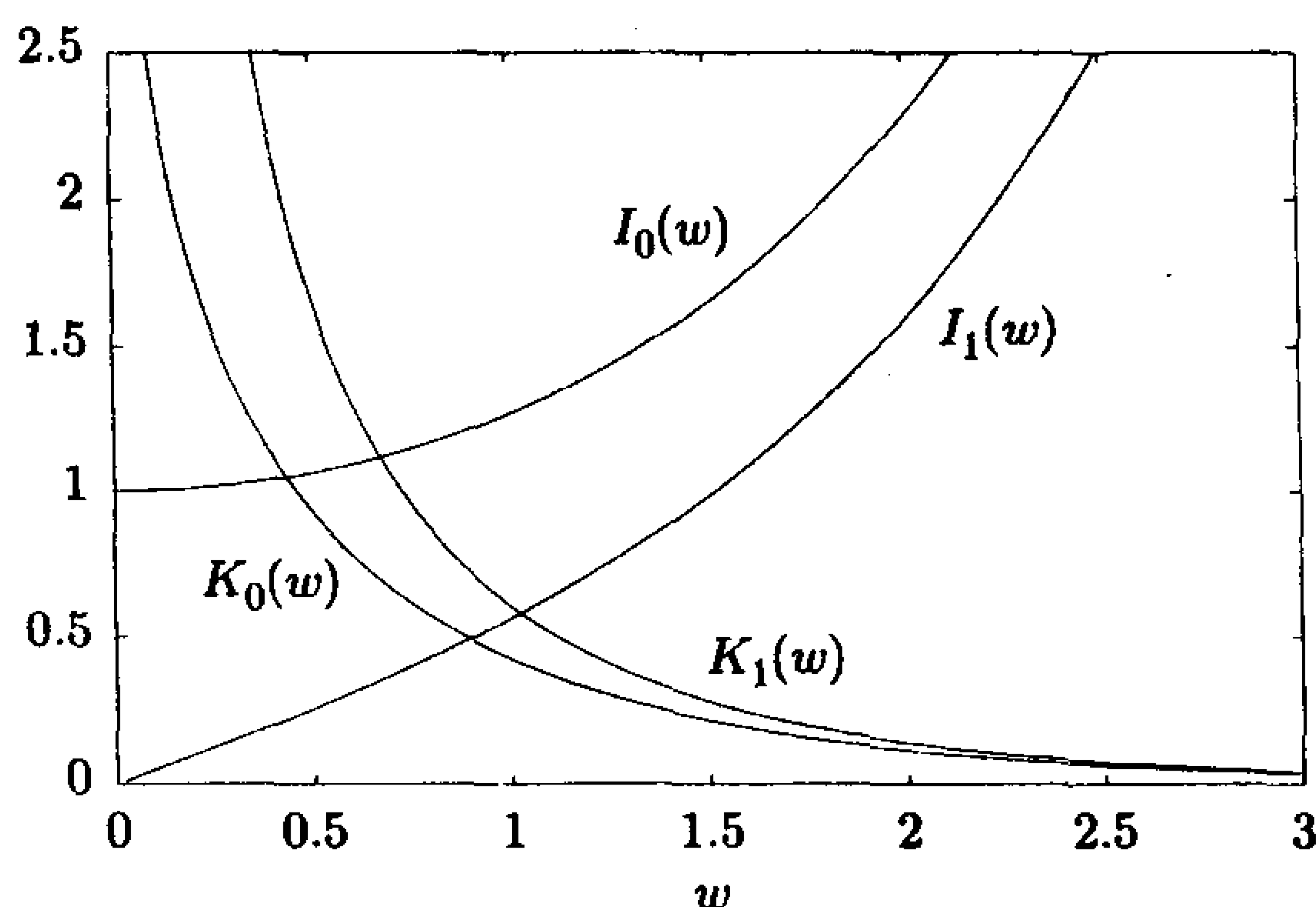


图 7.9.2 修正贝塞尔函数(出自 Abramowitz and Stegun [1974])

习题 7.9

7.9.1 在下述边界条件下，求解圆柱体上的拉普拉斯方程：

(a) $u(r,\theta,0)=\alpha(r,\theta)$, $\quad u(r,\theta,H)=0$, $\quad u(a,\theta,z)=0$

*(b) $u(r,\theta,0)=\alpha(r)\sin 7\theta$, $\quad u(r,\theta,H)=0$, $\quad u(a,\theta,z)=0$

(c) $u(r,\theta,0)=0$, $\quad u(r,\theta,H)=\beta(r)\cos 3\theta$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial r}(a,\theta,z)=0$

(d) $\dfrac{\partial u}{\partial z}(r,\theta,0)=\alpha(r)\sin 3\theta$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial z}(r,\theta,H)=0$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial r}(a,\theta,z)=0$

(e) $\dfrac{\partial u}{\partial z}(r,\theta,0)=\alpha(r,\theta)$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial z}(r,\theta,H)=0$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial r}(a,\theta,z)=0$

334

对于边界条件(e)，在什么条件下方程有解？

7.9.2 在下述边界条件下，求解半圆柱体上的拉普拉斯方程：

(a) $u(r,\theta,0)=0$, $\quad u(r,\theta,H)=\alpha(r,\theta)$, $\quad u(r,0,z)=0$,
$u(r,\pi,z)=0$, $\quad u(a,\theta,z)=0$

*(b) $u(r,\theta,0)=0$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial z}(r,\theta,H)=0$, $\quad u(r,0,z)=0$,
$u(r,\pi,z)=0$ $\quad u(a,\theta,z)=\beta(\theta,z)$

(c) $\dfrac{\partial}{\partial z}u(r,\theta,0)=0$, $\quad \dfrac{\partial}{\partial z}u(r,\theta,H)=0$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial\theta}(r,0,z)=0$,
$\dfrac{\partial u}{\partial\theta}(r,\pi,z)=0$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial r}(a,\theta,z)=\beta(\theta,z)$

(d) $u(r,\theta,0)=0$, $\quad u(r,0,z)=0$, $\quad u(a,\theta,z)=0$,

$u(r,\ \theta,\ H)=0,\qquad \dfrac{\partial u}{\partial\theta}(r,\ \pi,\ z)=\alpha(r,\ z)$

对于边界条件(c)，在什么条件下方程有解？

7.9.3 在四分之一圆柱体($0<\theta<\pi/2$，半径为 a，高为 H)上，求解热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\nabla^2 u,$$

其中初始条件为

$$u(r,\theta,z,0)=f(r,\theta,z),$$

边界条件为

(a) $u(r,\ \theta,\ 0)=0$，$u(r,\ \theta,\ H)=0$，$u(r,\ 0,\ z)=0$，$u(r,\ \pi/2,\ z)=0$，$u(a,\ \theta,\ z)=0$

* (b) $\dfrac{\partial u}{\partial z}(r,\ \theta,\ 0)=0$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}(r,\ \theta,\ H)=0$，$\dfrac{\partial u}{\partial\theta}(r,\ 0,\ z)=0$，$\dfrac{\partial u}{\partial\theta}(r,\ \pi/2,\ z)=0$，$\dfrac{\partial u}{\partial r}(a,\ \theta,\ z)=0$

(c) $u(r,\ \theta,\ 0)=0$，$u(r,\ \theta,\ H)=0$，$\dfrac{\partial u}{\partial\theta}(r,\ 0,\ z)=0$，$u(r,\ \pi/2,\ z)=0$，$\dfrac{\partial u}{\partial r}(a,\ \theta,\ z)=0$

请简要说明 $t\to\infty$ 时的温度分布.

7.9.4 在圆柱体(半径为 a，高为 H)上，求解热传导方程

335

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\nabla^2 u,$$

其中初始条件为

$$u(r,\theta,z,0)=f(r,z),$$

它与 θ 无关，边界条件为

* (a) $u(r,\ \theta,\ 0,\ t)=0$，$u(r,\ \theta,\ H,\ t)=0$，$u(a,\ \theta,\ z,\ t)=0$

(b) $\dfrac{\partial u}{\partial z}(r,\ \theta,\ 0,\ t)=0$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}(r,\ \theta,\ H,\ t)=0$，$\dfrac{\partial u}{\partial r}(a,\ \theta,\ z,\ t)=0$

(c) $u(r,\ \theta,\ 0,\ t)=0$，$u(r,\ \theta,\ H,\ t)=0$，$\dfrac{\partial u}{\partial r}(a,\ \theta,\ z,\ t)=0$

7.9.5 在球坐标系下，用分离变量确定拉普拉斯方程

$$0=\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial u}{\partial\phi}\right)+\frac{1}{\sin^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$$

的三个常微分方程.

7.10 球内的问题和勒让德多项式

7.10.1 概述

球形区域上的问题在许多应用中都受到很大的关注．在习题中，会考虑球形地球的三维热传导方程．现在先考虑描述地球振动的三维波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\nabla^2 u,\tag{7.10.1}$$

其中 u 是局部位移．在地球物理学中，地震和核试验的研究使得地球对点源的响应问题具有特别的兴趣．地球的固体振动比(7.10.1)复杂得多．先到达的压缩波 P 比随后到达的切变波 S

小，因为切变波 S 的传播速度比较小. 在强烈地震中，长周期(L)的表面波最具破坏性，原因是其能量都集中在接近地表面的薄层中. 因为地球内部的不均匀引起的散射，实际的地震波记录要更复杂. 测量振动经常用来确定地球的内部构造. 不仅地震学，而且地矿探测，例如石油工程都需要了解地球的内部构造. 所有的位移都满足波动方程. 简单的数学模型对于破坏性长波最有效，因为地球内部的变化平均为长波. 有关细节可参阅 Aki and Richards [1980] 所著的 *Quantitative Seismology*. 这里使用球坐标(ρ, θ, ϕ)，其中 ϕ 是极距角，θ 为柱角(与柱面标中的角度一致). 假设的边界条件是 $u(a,\ \theta,\ \phi,\ t)=0$，球体上的初始位移和速度分布为

336

$$u(r,\theta,\phi,0) = F(r,\theta,\phi) \tag{7.10.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,\phi,0) = G(r,\theta,\phi). \tag{7.10.3}$$

非齐次边界条件在第 8 章中讨论.

7.10.2 分离变量和一维特征值问题

还是用分离变量法. 先引入包括时间和空间的乘积解：

$$u(r,\theta,\phi,t) = w(r,\theta,\phi)h(t). \tag{7.10.4}$$

分离出了时间和空间，使得

$$\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2} = -\lambda c^2 h \tag{7.10.5}$$

$$\nabla^2 w + \lambda w = 0, \tag{7.10.6}$$

其中第一个分离常数 λ 满足在球面上为零的多维特征值问题(7.10.6). 球体振动频率是 $c\sqrt{\lambda}$.

根据拉普拉斯方程在球坐标系中的形式(参考第 1 章)，就有

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial w}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial w}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} + \lambda w = 0. \tag{7.10.7}$$

寻找乘积解：

$$w(r,\theta,\phi) = f(r)q(\theta)g(\phi). \tag{7.10.8}$$

由于(7.10.7)的系数不依赖变量 θ，对应周期边界条件的 θ 特征函数是 $\cos m\theta$ 和 $\sin m\theta$，而相关的级数是在区间 $-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$ 上 θ 的傅里叶级数. 为了减少些计算，将(7.10.7)中的 $\partial^2 w/\partial\theta^2$ 换成 $-m^2 w$. 再把(7.10.8)代入(7.10.7)，乘以 ρ^2 和除以 $f(\rho)g(\phi)$ 后，引入第三个(把 $-m^2$ 看成第二个)分离常数 μ：

$$\frac{1}{f}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho}\right) + \lambda\rho^2 = -\frac{1}{g\sin\phi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\left(\sin\phi\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\phi}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\phi} = \mu. \tag{7.10.9}$$

特征值问题以 ϕ 和 ρ 为变量的两个常微分方程为

337

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho}\right) + (\lambda\rho^2 - \mu)f = 0} \tag{7.10.10}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\left(\sin\phi\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\phi}\right) + \left(\mu\sin\phi - \frac{m^2}{\sin\phi}\right)g = 0.} \tag{7.10.11}$$

下面讨论(7.10.10)和(7.10.11)的齐次边界条件. 先解不依赖特征值 λ 的方程(7.10.11).

对于每个 m，方程(7.10.11)是特征值为 μ，坐标为角坐标 ϕ 的施图姆-刘维尔微分方程，

其权函数为 $\sin\phi$. 方程(7.10.11)定义在 $\phi=0$(北极)和 $\phi=\pi$(南极)之间. 不过，方程(7.10.11)不是正则施图姆-刘维尔问题，不然就要有 $p=\sin\phi>0$，但在两端 $\sin\phi=0$. 但在奇异端点处没有物理边界条件. 这里要求解在端点处都有界：$|g(0)|<\infty$ 且 $|g(\pi)|<\infty$. 要指出的是：有关特征值与特征函数的通常性质都有效. 特别是对每个固定的 m，有对应不同特征值 μ_{mn} 的特征函数的无限集，这些特征函数是关于权函数 $\sin\phi$ 的正交集.

对于每个 m 与 n，(7.10.10)是一个施图姆-刘维尔微分方程，其坐标是径向坐标为 ρ，特征值为 λ，权函数为 ρ^2. 一个齐次边界条件是 $f(a)=0$. (7.10.10)是一个奇异施图姆-刘维尔问题，因为在 $\rho=0$ 处，$\mathrm{d}f/\mathrm{d}\rho$ 前面的系数为零. 而且在 $\rho=0$ 处，球坐标是奇异的，施图姆-刘维尔微分方程的解在此处必须有界：$|f(0)|<\infty$. 要指出的是，这个奇异问题，对于每个固定的 m 与 n，也有对应不同特征值 λ_{kmn} 的特征函数的无限集，这些特征函数构成关于权函数 ρ^2 的正交集.

7.10.3 连带勒让德函数和勒让德多项式

一个(不显然的)变量替换简化了定义角度变量 ϕ 正交特征函数的微分方程的分析：

$$\boxed{x=\cos\phi.} \tag{7.10.12}$$

这是个一一变换，当 ϕ 由 0 到 π 时，x 由 1 到 -1. 会看到区间的两端仍是奇异点. 依据链式法则推导出，$\mathrm{d}/\mathrm{d}\phi=(\mathrm{d}x/\mathrm{d}\phi)(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)=-\sin\phi\,\mathrm{d}/\mathrm{d}\phi$. 因此将(7.10.11)两端除以 $\sin\phi$ 并利用 $\sin^2\phi=1-\cos^2\phi=1-x^2$，得到

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right]+\left(\mu-\frac{m^2}{1-x^2}\right)g=0.} \tag{7.10.13}$$

338

这也是施图姆-刘维尔方程，其特征函数对 x 关于权函数 1 正交. 这与关于 ϕ 的权函数 $\sin\phi$ 相对应，因为 $\mathrm{d}x=-\sin\phi\,\mathrm{d}\phi$. (7.10.13)在 $x=\pm1$ 处有奇异点. 可以证明它是正则奇异点(参看 7.8.4 节). 应用对应的初等等量纲(欧拉)方程，对理解每个奇异点附近的局部性态是有帮助的. 下面分析在点 $x=1$ 附近的方程(7.10.13)(由对称性，在 $x=-1$ 附近的局部性态是相同的). 方程中的麻烦系数 $1-x^2=(1-x)(1+x)$ 在点 $x=1$ 附近可以由 $-2(x-1)$ 近似代替. 由于只有与 g 相乘的奇异项是重要的，因此(7.10.13)在点 $x=1$ 附近可以被近似为

$$-2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x-1)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right]+\frac{m^2}{2(x-1)}g\approx0. \tag{7.10.14}$$

方程(7.10.14)是一个等量纲(欧拉)微分方程，代入 $g=(1-x)^p$ 得到 $p^2=m^2/4$ 或者 $p=\pm m/2$，由此求得了方程的精确解. 如果 $m\neq0$，在 $x=1$ 附近，一个无关解是有界的[由 $(x-1)^{m/2}$ 近似]，第二个无关解是无界的[由 $(x-1)^{-m/2}$ 近似].

既然要求解在点 $x=1$ 点有界，就只能用那个在 $x=1$ 点有界的解. 在 $x=-1$ 点计算这个解时(也许是数值的)，其性态必定是两个在点 $x=-1$ 附近局部性态的线性组合. 在 $x=1$ 有界的解一般在 $x=-1$ 是无界的. 只有对一些非常特殊的值 μ_{mn}(称为特征值)，(7.10.13)的解在 $x=\pm1$ 才都是有界的. 为了大大简化说明，这里不作解释而只给出这个神秘而漂亮的结果：解在 $x=\pm1$ 有界的那些 μ 的值是

$$\mu=n(n+1), \tag{7.10.15}$$

其中 n 是整数，它们满足下面会说明的一些限制. 值得注意的是，特征值 μ 不依赖于重要参数 m. 方程(7.10.13)一个是线性微分方程，它的两个无关解分别称为第一类和第二类连带勒让德函数(球面调和函数)$P_n^m(x)$，$Q_n^m(x)$. 对于整数 n，第一类在 $x=\pm1$ 是有界的，因而特征函数由 $g(x)=P_n^m(x)$ 给出.

$m=0$：勒让德多项式. $m=0$ 对应偏微分方程不依赖柱角 θ 的解. 此时微分方程(7.10.13)变为

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right]+n(n+1)g=0,} \tag{7.10.16}$$

[339] 可以证明其特征值满足(7.10.15). 用级数方法能够证明，只有当 $\mu=n(n+1)$ 时，在 $x=0$ 的泰勒级数解截断的(有限级数)，因此当 $\mu=n(n+1)$ 时，解在 $x=\pm1$ 是有界的. 可以证明(不容易)，如果 $\mu\neq n(n+1)$，微分方程的解在 $x=\pm1$ 都无界. 这些重要的有界解被称之为勒让德多项式，不难计算

$$\boxed{\begin{aligned}&n=0:P_0(x)=1\\&n=1:P_1(x)=x=\cos\phi\\&n=2:P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)=\frac{1}{4}(3\cos2\phi+1).\end{aligned}} \tag{7.10.17}$$

它们在 $x=1$(北极 $\phi=0$)点的值为 1. 可以证明勒让德多项式满足罗德里格斯公式：

$$\boxed{P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n.} \tag{7.10.18}$$

由于勒让德多项式关于权函数 1 正交，它们可以用格拉姆–施密特方法(见 7.5 节附录)获得. 在图 7.10.1 中按变量 x 和 ϕ 画出了前面几个特征函数(勒让德多项式)的图像. 可以证明勒让德多项式是一个多项式的完全集，因此没有除 $\mu=n(n+1)$ 之外的特征值.

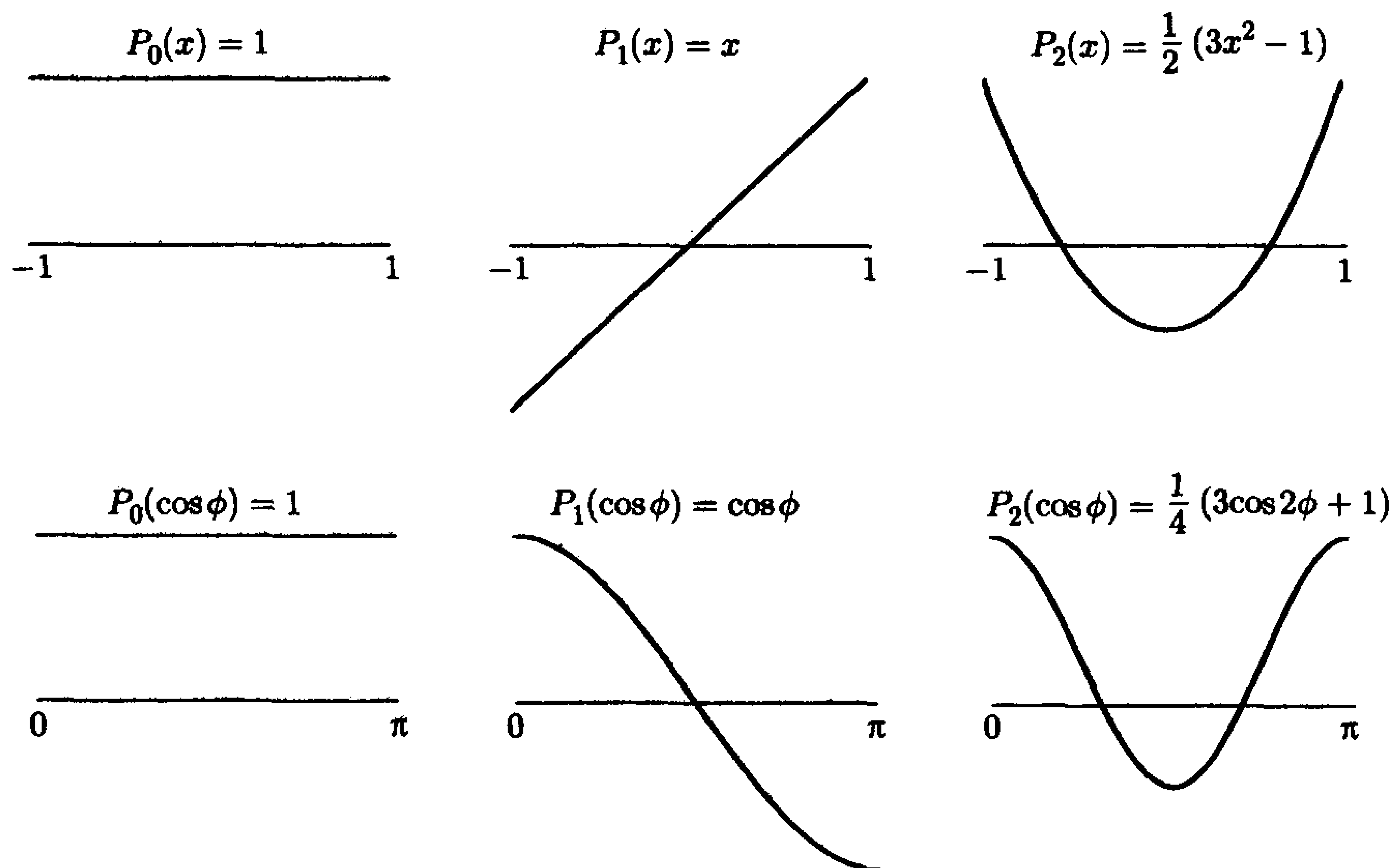


图 7.10.1 勒让德多项式

$m>0$：连带勒让德函数. 令人注目地，当 $m>0$ 时，特征值基本上与 $m=0$ 时由(7.10.15)式给出的相同. 更令人注目的是，当 $m>0$ 时，特征函数(称为连带勒让德函数)可以与 $m=0$ 时的特征函数(勒让德多项式)相联系：

$$\boxed{g(x) = P_n^m(x) = (x^2-1)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_n(x).} \tag{7.10.19}$$

这里 $P_n(x)$ 是 n 阶勒让德多项式. 若 $n<m$，其 m 阶导数为零. 因此，只有 $n \geqslant m$ 时特征函数才存在，特征值的确弱依赖于 m. 在 $n \geqslant m$ 的限制条件下，这无穷个特征值是

$$\boxed{\mu = n(n+1),} \tag{7.10.20}$$

这些公式对 $m=0$ 也成立；$m=0$ 的连带勒让德函数就是勒让德多项式，$P_n^0(x)=P_n(x)$.

7.10.4 径向特征值问题

$\mu=n(n+1)$ 的径向施图姆-刘维尔微分方程(7.10.10)对固定的 m，

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho}\right) + (\lambda\rho^2 - n(n+1))f = 0,} \tag{7.10.21}$$

要有限制条件 $n \geqslant m$. 边界条件是 $f(a)=0$ 和解在 $\rho=0$ 有界. 方程(7.10.21)与贝塞尔微分方程几乎相同. 用 $\sqrt{\lambda}\rho$ 作自变量可以消去参数 λ. 不过，得到的不完全是贝塞尔微分方程. 易证(见习题)，如果用 $Z_p(x)$ 满足 p 阶贝塞尔微分方程(7.7.25)，则称为球面贝塞尔函数的 $f(\rho)=\rho^{-1/2}Z_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}\rho)$ 满足方程(7.10.21). 由径向特征函数在 $\rho=0$ 有界，对 $n \geqslant m$，有

$$\boxed{f(\rho) = \rho^{-1/2}J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}\rho),} \tag{7.10.22}$$

[由贝塞尔函数在原点的性态(7.7.33)，可以验证这些解在原点有界. 事实上，除 $n=0$ 外，它们在原点都为零.] 特征值 λ 通过应用在 $\rho=a$ 处的齐次边界条件确定：

340 ~ 341

$$\boxed{J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a) = 0.} \tag{7.10.23}$$

这些特征值由 $n+1/2$ 阶贝塞尔函数的零点决定. 对每个 m 和 n，有无穷多个特征值. 注意到，对 $m \leqslant n$，振动的频率是相同的.

球面贝塞尔函数可与三角函数相联系：

$$\boxed{x^{-1/2}J_{n+\frac{1}{2}}(x) = x^n\left(-\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n\left(\frac{\sin x}{x}\right).} \tag{7.10.24}$$

7.10.5 乘积解、振动模式和初值问题

三维波动方程的乘积解是

$$u(r,\theta,\phi,t) = \cos c\sqrt{\lambda}t\sin c\sqrt{\lambda}t\rho^{-1/2}J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}\rho)\cos m\theta\sin m\theta P_n^m(\cos\phi),$$

其中振动频率由(7.10.23)确定. 角部分 $Y_n^m \equiv \cos m\theta\sin m\theta P_n^m(\cos\phi)$ 称为第一类球面调和函数. 初值问题的求解是通过对 m 和 n 求和的无穷模式的叠加，其无穷多个径向特征函数由贝塞尔函数的零点来刻画. 三个一维正交性的权函数给出 $\mathrm{d}\theta$，$\sin\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\phi$，$\rho^2\mathrm{d}\rho$，它们等价于关于权函数 1 的三维正交性，因为球坐标的体积微元是 $\mathrm{d}V=\rho^2\sin\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta$. 由坐标变换满足 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$

$J\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta$，上面的说法可以由雅可比式 J 和

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\phi} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\phi} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\phi} & \frac{\partial z}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta\\ \sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta\\ \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0\end{vmatrix}=\rho^2\sin\phi$$

来检验. 连带勒让德函数的标准化积分可以在 Abramowitz and Stegun 的书中找到：

$$\int_{-1}^{1}[P_n^m(x)]^2\mathrm{d}x=\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-1}(n+m)!/(n-m)! \tag{7.10.25}$$

例. 对纯径向模式 $n=0$（仅当 $m=0$ 时），由(7.10.24)，振动频率满足 $\sin(\sqrt{\lambda}a)=0$ 使得

342

$$\text{圆频率}=c\sqrt{\lambda}=\frac{j\pi c}{a},$$

其中 a 是地球的半径，例如. 基本模态 $j=1$ 有圆频率 $\pi c/a$ 赫兹（周期每秒）或每秒 $c/2a$ 频率或每 $2a/c$ 秒一周期. 对地球取 $a=6000\text{km}$，$c=5\text{km/s}$，则周期是 $=12\,000/5=2400$ 秒或 40 分钟.

7.10.6 球内部的拉普拉斯方程

在静电学中，需要在球内部求解拉普拉斯方程，其中在边界 $\rho=a$ 上给定电势 u

$$\boxed{\nabla^2u=0} \tag{7.10.26}$$

$$\boxed{u(a,\theta,\phi)=F(\theta,\phi).} \tag{7.10.27}$$

这对应于在给定球面导体上的电势分布后，确定电势. 因此可以利用前面分离变量法的结果. θ 和 ϕ 的方程及其解是相同的，对 θ 的是包含 $\cos m\theta$ 和 $\sin m\theta$ 的傅里叶级数，对 ϕ 的是包含连带勒让德函数 $P_n^m(\cos\phi)$ 的广义傅里叶级数. 不过必有 $\lambda=0$，这样径向方程(7.10.21)就不同了，也不会是特征值问题：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho}\right)-n(n+1))f=0. \tag{7.10.28}$$

上面是一个等量纲方程，可以用代换 $f=\rho^r$ 精确求解. 由代换得到 $r(r+1)-n(n+1)=0$，有两个不同根的二次方程，由 n 为整数，这两个不同的根是 $r=n$ 及 $r=-n-1$. 因为电势在中心 $\rho=0$ 处有界，所以就舍去无界解 ρ^{-n-1}. 拉普拉斯方程的乘积解是

$$\rho^n\cos m\theta\sin m\theta P_n^m(\cos\phi), \tag{7.10.29}$$

所以拉普拉斯方程解的形式是

$$\boxed{u(r,\theta,\phi)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\rho^n[A_{mn}\cos m\theta+B_{mn}\sin m\theta]P_n^m(\cos\phi).} \tag{7.10.30}$$

非齐次边界条件给出

343

$$F(\theta,\phi)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}a^n[A_{mn}\cos m\theta+B_{mn}\sin m\theta]P_n^m(\cos\phi). \tag{7.10.31}$$

例如，由正交性

$$\boxed{a^n B_{mn} = \frac{\iint F(\theta,\phi)\sin m\theta P_n^m(\cos\phi)\sin\phi\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta}{\iint \sin^2 m\theta[P_n^m(\cos\phi)]^2\sin\phi\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta}.} \tag{7.10.32}$$

对 A_{mn} 有相似的表达式.

例. 在静电学中，需要确定：在各个半球为不同电势的条件下，确定球形导体里的电势. 这可以在实验中完成，方法是用一个可以忽略不计的小绝缘环来分开两个半球. 为方便起见，设上半球处于电势 $+V$，下半球处于电势 $-V$. 在 $\rho=a$ 的边界条件是圆柱(方位)对称的；也就与 θ 无关. 这样既可以在这个简化条件下求解拉普拉斯方程，也可以利用前面求得的一般解. 下面就按照后一种方式做. 由于与 θ 无关，在等式(7.10.30)中，除 $m=0$ 项外，θ 的傅里叶级数项为零. 这样，圆柱对称的拉普拉斯方程的解就表示成包含勒让德多项式的级数：

$$u(r,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \rho^n P_n(\cos\phi). \tag{7.10.33}$$

边界条件为

$$\left.\begin{array}{l} V,\ 对\ 0<\phi<\pi/2(0<x<1) \\ -V,\ 对\ \pi/2<\phi<\pi(-1<x<0) \end{array}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos\phi). \tag{7.10.34}$$

由于 n 为偶数时，$P_n(x)$ 为偶函数；n 为奇数时，$P_n(x)$ 为奇函数，球面上的电势为 x 的奇函数，利用关于权函数 1 的正交性(关于 $x=\cos\phi$)可得

$$\begin{aligned} A_n a^n &= \frac{\int_{-1}^{0} -VP_n(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 VP_n(x)\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2\mathrm{d}x} \\ &= \begin{cases} 0, & n\ 为偶数 \\ 2\int_0^1 VP_n(x)\mathrm{d}x \Big/ \int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2\mathrm{d}x, & n\ 为奇数 \end{cases} \end{aligned} \tag{7.10.35}$$

用标准化积分(7.10.25)作为分母，勒让德多项式的罗德里格斯公式(7.10.18)作为分子，可以得到

$$u(r,\phi) = V\left[\frac{3}{2}\frac{\rho}{a}P_1(\cos\phi) - \frac{7}{8}\left(\frac{\rho}{a}\right)^3 P_3(\cos\phi) + \frac{11}{16}\left(\frac{\rho}{a}\right)^5 P_5(\cos\phi) + \cdots\right]. \tag{7.10.36}$$

关于它的详细讨论，请参阅 Jackson[1998]，*Classical Electrodynamics*. 344

习题 7.10

7.10.1 在半径为 a 的球体内，求解波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\nabla^2 u$ 的初值问题，其边界条件为 $u(a,\theta,\phi,t)=0$，初始条件为

(a) $u(\rho,\theta,\phi,0)=F(\rho,\theta,\phi)$ 和 $\frac{\partial u}{\partial t}(\rho,\theta,\phi,0)=0$

(b) $u(\rho,\theta,\phi,0)=0$ 和 $\frac{\partial u}{\partial t}(\rho,\theta,\phi,0)=G(\rho,\theta,\phi)$

(c) $u(\rho,\theta,\phi,0)=F(\rho,\theta)$ 和 $\frac{\partial u}{\partial t}(\rho,\theta,\phi,0)=0$

(d) $u(\rho, \theta, \phi, 0)=0$ 和 $\frac{\partial u}{\partial t}(\rho, \theta, \phi, 0)=G(\rho, \theta)$

(e) $u(\rho, \theta, \phi, 0)=F(\rho, \theta)\cos 3\theta$ 和 $\frac{\partial u}{\partial t}(\rho, \theta, \phi, 0)=0$

(f) $u(\rho, \theta, \phi, 0)=F(\rho)\sin 2\theta$ 和 $\frac{\partial u}{\partial t}(\rho, \theta, \phi, 0)=0$

(g) $u(\rho, \theta, \phi, 0)=F(\rho)$ 和 $\frac{\partial u}{\partial t}(\rho, \theta, \phi, 0)=0$

(h) $u(\rho, \theta, \phi, 0)=0$ 和 $\frac{\partial u}{\partial t}(\rho, \theta, \phi, 0)=G(\rho)$

7.10.2 在半径为 a 的球体内，求解热传导方程 $\frac{\partial u}{\partial t}=k\nabla^2 u$ 的初值问题，其边界条件为 $u(a, \theta, \phi, t)=0$，初始条件为

(a) $u(\rho, \theta, \phi, 0)=F(\rho, \theta, \phi)$
(b) $u(\rho, \theta, \phi, 0)=F(\rho, \theta)$
(c) $u(\rho, \theta, \phi, 0)=F(\rho, \theta)\cos\theta$
(d) $u(\rho, \theta, \phi, 0)=F(\rho)$

7.10.3 在半径为 a 的球体内，求解热传导方程 $\frac{\partial u}{\partial t}=k\nabla^2 u$ 的初值问题，其边界条件为 $\frac{\partial u}{\partial \rho}(a, \theta, \phi, t)=0$，初始条件为

(a) $u(\rho, \theta, \phi, 0)=F(\rho, \theta, \phi)$
(b) $u(\rho, \theta, \phi, 0)=F(\rho, \phi)$
(c) $u(\rho, \theta, \phi, 0)=F(\rho, \phi)\sin 3\theta$
(d) $u(\rho, \theta, \phi, 0)=F(\rho)$

7.10.4 利用一维瑞利商证明(7.10.11)中的 $\mu\geqslant 0$(若 $m\geqslant 0$). 并说明在什么条件下 $\mu=0$?

7.10.5 利用一维瑞利商证明(7.10.13)中的 $\mu\geqslant 0$(若 $m\geqslant 0$). 并说明在什么条件下 $\mu=0$?

7.10.6 利用一维瑞利商证明(7.10.6)中的 $\lambda\geqslant 0$(若 $n\geqslant 0$)，其中边界条件为 $f(a)=0$. $\lambda=0$ 能成立吗?

345

7.10.7 利用三维瑞利商证明(7.10.11)中的 $\lambda\geqslant 0$，其中边界条件为 $u(a, \theta, \phi, t)=0$. $\lambda=0$ 能成立吗?

7.10.8 与贝塞尔微分方程相关的微分方程. 由此证明 $x^a e^{bx} Z_p(dx)$ 是方程

$$x^2\frac{d^2 f}{dx^2}+x(1-2a-2bx)\frac{df}{dx}+[a^2-p^2+(2a-1)bx+(d^2+b^2)x^2]f=0 \quad (7.10.37)$$

的解，其中 $Z_p(x)$ 满足贝塞尔微分方程(7.7.25). 将(7.10.21)和(7.7.37)作比较，就有 $a=-1/2$，$b=0$，$1/4-p^2=-n(n+1)$ 及 $d^2=\lambda$. 这样可看出 $p=n+1/2$.

7.10.9 在球 $\rho<a$ 内，求解拉普拉斯方程. 其中球面上的边界条件为

(a) $u(a, \theta, \phi)=F(\phi)\cos 4\theta$
(b) $u(a, \theta, \phi)=F(\phi)$
(c) $\frac{\partial u}{\partial \rho}(a, \theta, \phi)=F(\phi)\cos 4\theta$
(d) $\frac{\partial u}{\partial \rho}(a, \theta, \phi)=F(\phi)$，$\int_0^{\pi}F(\phi)\sin\phi d\phi=0$
(e) $\frac{\partial u}{\partial \rho}(a, \theta, \phi)=F(\theta, \phi)$，$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}F(\theta, \phi)\sin\phi d\theta d\phi=0$

7.10.10 在球 $\rho>a$ 外，求解拉普拉斯方程. 其在球面上的电势为

(a) $u(a, \theta, \phi)=F(\theta, \phi)$.
(b) $u(a, \theta, \phi)=F(\phi)$，柱面(方位)对称.
(c) 在上半球面 $u(a, \theta, \phi)=V$，下半球面 $u(a, \theta, \phi)=-V$(不用化简，也不用算积分).

7.10.11 在球中满足 $\rho<a$ 和 $0<\theta<\pi/2$ 的部分内，求解拉普拉斯方程，有关条件是：$u(\rho, 0, \phi)=0$，$u(\rho, \pi/2, \phi)=0$，球面上的电势为 $u(a, \theta, \phi)=F(\theta, \phi)$.

7.10.12 在半球内，$\rho>a$，$z>0$，求解拉普拉斯方程，有关条件是：在 $z=0$ 处，$u=0$；半球面上的电势为 $u(a, \theta, \phi)=F(\theta, \phi)$. [提示：用对称性来求解另一个问题，球面在下半球面上有反对称的电势.]

7.10.13 证明：$n=0$，$n=1$ 和 $n=2$ 的勒让德多项式满足罗德里格斯公式.

7.10.14 证明：罗德里格斯公式满足勒让德多项式的微分方程.

346

7.10.15 用(7.10.35)、(7.10.18)和(7.10.25)导出(7.10.36).

第8章　非齐次问题

8.1　引言

在前几章中，仅仅展开讲解了求解偏微分方程的一种方法：分离变量法．为了应用分离变量法，要求(n个自变量的)偏微分方程必须是线性的和齐次的．另外，还必须要使得边界条件对$n-1$个变量是线性的和齐次的．然而，一些最基本的物理问题其实并没有齐次条件．

8.2　有源热流与非齐次边界条件

与时间无关的边界条件．举一个非齐次问题的简单例子，考虑长度为L的均匀棒内的(无源)热流，其两端温度固定，左端为$A°$，右端为$B°$．如果给定初始条件，则温度$u(x,t)$的数学问题是

$$\text{PDE}: \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \tag{8.2.1}$$

$$\text{BC1}: \boxed{u(0,t) = A} \tag{8.2.2}$$

$$\text{BC2}: \boxed{u(L,t) = B} \tag{8.2.3}$$

347

$$\text{IC}: \boxed{u(x,0) = f(x).} \tag{8.2.4}$$

但是却无法直接应用分离变量法，因为这个简单问题的边界条件不是齐次的．

平衡温度．为了分析这个问题，首先要获得平衡温度分布$u_E(x)$．如果存在这样的温度分布，它一定满足稳态(与时间无关)的热传导方程，

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 u_E}{\mathrm{d}x^2} = 0,} \tag{8.2.5}$$

以及给定的与时间无关的边界条件

$$u_E(0) = A \tag{8.2.6}$$

$$u_E(L) = B. \tag{8.2.7}$$

在确定平衡温度分布时可以不计初始条件．如1.4节所证明的，(8.2.5)表明温度分布是线性的，而且唯一满足(8.2.2)与(8.2.3)的分布可以几何地或代数地确定：

$$\boxed{u_E(x) = A + \frac{B-A}{L}x,} \tag{8.2.8}$$

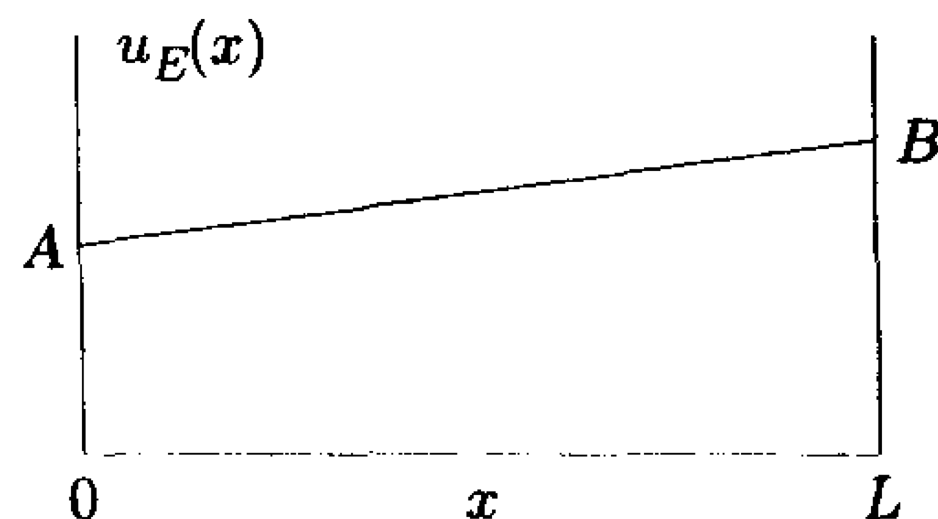


图8.2.1　平衡温度分布

如图8.2.1所示．由于仅当$f(x) = A + [(B-A)/L]x$时，$u_E(x)$才满足初始条件(8.2.4)，所以它通常不是所要求的与时间相关的解．

关于平衡的位移．对于更一般的初始条件，考虑关于平衡

温度的温度位移，

348

$$\boxed{v(x,t) \equiv u(x,t) - u_E(x).} \tag{8.2.9}$$

先确定 $v(x, t)$，而不求 $u(x, t)$. 由于$\partial v/\partial t = \partial u/\partial t$ 和$\partial^2 v/\partial x^2 = \partial^2 u/\partial x^2$(注意 $u_E(x)$关于 x 是线性的)，可得 $v(x, t)$同样满足热传导方程

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \tag{8.2.10}$$

并且 $u(x, t)$与 $u_E(x)$在 $x=0$ 处都等于 A，在 $x=L$ 处都等于 B，因而在 $x=0$ 与 $x=L$ 处，它们的差为 0：

$$v(0,t) = 0 \tag{8.2.11}$$

$$v(L,t) = 0. \tag{8.2.12}$$

在初始时刻，$v(x, t)$等于给定的初始温度与平衡温度的差，

$$v(x,0) = f(x) - u_E(x). \tag{8.2.13}$$

有幸的是 $v(x, t)$的数学问题是带线性齐次边界条件的线性齐次偏微分方程. 这样 $v(x, t)$就可以由分离变量法来确定. 事实上，这是已经遇到过的问题. 因此，有

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}, \tag{8.2.14}$$

其中初始条件给出

$$f(x) - u_E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{8.2.15}$$

于是 a_n 等于$f(x) - u_E(x)$的傅里叶正弦系数：

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L [f(x) - u_E(x)]\sin\frac{n\pi x}{L}dx. \tag{8.2.16}$$

从(8.2.9)，很容易就获得了所要求的温度 $u(x, t) = u_E(x) + v(x, t)$. 因而

$$\boxed{u(x,t) = u_E(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t},} \tag{8.2.17}$$

其中 a_n 由(8.2.16)给出，$u_E(x)$由(8.2.8)给出. 不受初始条件影响，当 $t\to\infty$ 时，$u(x, t)\to$

349

$u_E(x)$. 因此，对于任意的初始条件，温度都趋于其平衡分布.

定常非齐次项. 前面所用的方法也适用于热能存在定常热源的情形：

$$\text{PDE:}\ \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x)} \tag{8.2.18}$$

$$\text{BC:}\ \boxed{\begin{aligned} u(0,t) &= A \\ u(L,t) &= B \end{aligned}} \tag{8.2.19}$$

$$\text{IC:}\ \boxed{u(x,0) = f(x).} \tag{8.2.20}$$

如果存在平衡解(参看习题 1.4.6，一个没有平衡解的例子)，要求之，也要考虑关于平衡温度的位移，

$$v(x,t) = u(x,t) - u_E(x).$$

可以证明，$v(x, t)$满足线性齐次偏微分方程(8.2.10)和线性齐次边界条件(8.2.11)与

(8.2.12). 因而又有，当 $t\to\infty$ 时，$u(x, t)\to u_E(x)$.

非定常非齐次项. 不巧的是，非齐次问题并不总像前面的例子那样容易求解. 为了澄清情况，再次考虑长度为 L 的均匀棒内的热流问题. 但要做两个重大改变. 首先，在棒内引入给定的与温度无关的热源分布. 因而温度要满足下列非齐次偏微分方程：

$$\text{PDE:}\ \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t).} \tag{8.2.21}$$

其中热源 $Q(x, t)$ 对空间与时间都变化. 还允许端点温度随时间变化. 这就给出了非定常非齐次线性边界条件，

$$\text{BC:}\ \boxed{\begin{aligned} u(0,t) &= A(t)\\ u(L,t) &= B(t)\end{aligned}} \tag{8.2.22}$$

[350]

而不是定常边界条件(8.2.2)与(8.2.3). 初始温度分布还是给定为

$$\text{IC:}\ \boxed{u(x,0) = f(x).} \tag{8.2.23}$$

由(8.2.21)至(8.2.23)定义的数学问题包含了非齐次偏微分方程和非齐次边界条件.

相应齐次边界条件. 并不总可能像本节第一个例子那样，将这个问题简化为带齐次边界条件的齐次偏微分方程. 不过会看到，总可以把这个问题化成带齐次边界条件的问题，尽管一般偏微分方程仍为非齐次的. 考虑(越简单越好的)满足给定非齐次边界条件的参考温度分布 $r(x, t)$. 在这个例中为

$$r(0,t) = A(t)$$
$$r(L,t) = B(t).$$

通常并不难得到 $r(x, t)$ 的多个选择. 也许最简单的就是

$$r(x,t) = A(t) + \frac{x}{L}[B(t) - A(t)], \tag{8.2.24}$$

尽管有许多其他的选择[⊖]. 再次利用要求的解 $u(x, t)$ 与所选函数 $r(x, t)$ (此时不必为平衡解)之间的差：

$$v(x,t) \equiv u(x,t) - r(x,t). \tag{8.2.25}$$

在 $x=0$ 与 $x=L$ 处，$u(x, t)$ 与 $r(x, t)$ 满足同样的线性(尽管非齐次的)边界条件，因而 $v(x, t)$ 满足相应齐次边界条件：

$$v(0,t) = 0 \tag{8.2.26}$$

$$v(L,t) = 0. \tag{8.2.27}$$

$v(x, t)$ 所满足的偏微分方程由将

$$u(x,t) = v(x,t) + r(x,t)$$

代入有源热传导方程(8.2.21)得到. 这样

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left[Q(x,t) - \frac{\partial r}{\partial t} + k\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\right] \equiv k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \bar{Q}. \tag{8.2.28}$$

[351]

一般地，$v(x, t)$ 的偏微分方程与 $u(x, t)$ 的是同类型的，但非齐次项不同，这是由于 $r(x, t)$ 通常不满足齐次热传导方程. 而且初始条件通常也变了：

⊖ 选择其他的 $r(x, t)$ 给出原非齐次问题的等价解.

$$v(x,0)=f(x)-r(x,0)=f(x)-A(0)-\frac{x}{L}[B(0)-A(0)]\equiv g(x). \quad (8.2.29)$$

由此可见，一般仅仅是把边界条件给齐次了. 在8.3节中，将讨论分析带齐次边界条件非齐次问题的一种方法.

习题 8.2

8.2.1 求解热源和边界条件都定常的热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Q(x)$$

$$u(x,0)=f(x).$$

如果有平衡解，分析 $t\to\infty$ 时的极限. 若没有平衡解，说明原因并将该问题化简为带齐次边界条件的问题(不必求解). 假设

* (a) $Q(x)=0$,　　$u(0,t)=A$,　　$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=B$

(b) $Q(x)=0$,　　$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$,　　$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=B\neq 0$

(c) $Q(x)=0$,　　$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=A\neq 0$,　　$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=A$

* (d) $Q(x)=k$,　　$u(0,t)=A$,　　$u(L,t)=B$

(e) $Q(x)=k$,　　$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$,　　$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0$

(f) $Q(x)=\sin\frac{2\pi x}{L}$,　　$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$,　　$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0$

8.2.2 考虑具有如下非定常热源和边界条件的热传导方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Q(x,t)$$

$$u(x,0)=f(x).$$

将其化简为具有齐次边界条件的问题. 如果

* (a) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=A(t)$　　和　　$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=B(t)$

(b) $u(0,t)=A(t)$　　和　　$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=B(t)$

* (c) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=A(t)$　　和　　$u(L,t)=B(t)$

(d) $u(0,t)=0$　　和　　$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)+h(u(L,t)-B(t))=0$

(e) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$　　和　　$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)+h(u(L,t)-B(t))=0$

352

8.2.3 求解(在圆内)具有圆对称定常热源、边界条件及初始条件的二维热传导方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+Q(r),$$

其中

$$u(r,0)=f(r) \quad 及 \quad u(a,t)=T.$$

8.2.4 求解具有定常边界条件的二维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

满足边界条件

$$u(0,y,t)=0 \quad \frac{\partial}{\partial y}u(x,0,t)=0$$
$$u(L,y,t)=0 \quad u(x,H,t)=g(x)$$

与初始条件

$$u(x,y,0)=f(x,y).$$

并分析 $t\to\infty$ 时的极限.

8.2.5 在圆内(半径为 a)求解具有定常边界条件初值问题的二维热传导方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\nabla^2 u$$
$$u(a,\theta,t)=g(\theta)$$
$$u(r,\theta,0)=f(r,\theta).$$

8.2.6 求解具有定常源的波动方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Q(x)$$
$$u(x,0)=f(x)$$
$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0)=g(x),$$

若存在"平衡解", 分析 t 大时的性态. 若不存在平衡解, 解释原因, 并将其化简为具有齐次边界条件的问题. 假设

* (a) $Q(x)=0$, $u(0,t)=A$, $u(L,t)=B$

(b) $Q(x)=1$, $u(0,t)=0$, $u(L,t)=0$

(c) $Q(x)=1$, $u(0,t)=A$, $u(L,t)=B$

[提示: 将问题(a)和(b)相加.]

* (d) $Q(x)=\sin\frac{\pi x}{L}$, $u(0,t)=0$, $u(L,t)=0$

353

8.3 带齐次边界条件的特征函数展开法(微分特征函数的级数)

在 8.2 节中讲解了如何得到带齐次边界条件的问题, 即便原本的问题有非齐次边界条件. 为此这里研究带齐次边界条件的非齐次线性偏微分方程. 例如考虑

$$\text{PDE:}\ \boxed{\frac{\partial v}{\partial t}=k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\bar{Q}(x,t)} \tag{8.3.1}$$

$$\text{BC:}\ \boxed{\begin{aligned} v(0,t)&=0\\ v(L,t)&=0\end{aligned}} \tag{8.3.2}$$

$$\text{IC:}\ \boxed{v(x,0)=g(x).} \tag{8.3.3}$$

将用特征函数展开法来解这个问题. 考虑相应齐次问题的特征函数. 相应齐次问题是

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{8.3.4}$$
$$u(0,t)=0$$
$$u(L,t)=0.$$

其特征函数满足

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}+\lambda\phi=0$$
$$\phi(0)=0 \tag{8.3.5}$$
$$\phi(L)=0.$$

已知特征值为 $\lambda_n=(n\pi/L)^2$，$n=1, 2, \cdots$，对应的特征函数为 $\phi_n(x)=\sin n\pi x/L$. 不过对其他的问题，特征函数会是不同的. 特征函数展开法也并不仅限于这个例子. 因此，下面将作一般性的讨论. 假设已知(相应齐次问题的)特征函数，记为 $\phi_n(x)$. 这些特征函数满足一个施图姆-刘维尔特征值问题且是完全的(分段连续函数可展成这些特征函数的一个级数). 求解带齐次边界问题(8.3.2)的非齐次问题(8.3.1)的特征函数展开法，包括将未知解 $v(x, t)$ 展成相应齐次特征函数的级数：

354

$$\boxed{v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\phi_n(x).} \tag{8.3.6}$$

对于固定的 t，$v(x, t)$ 是 x 的函数，因而 $v(x, t)$ 有广义傅里叶级数. 在本例中，$\phi_n(x)=\sin n\pi x/L$，这个级数是通常的傅里叶正弦级数. 该广义傅里叶系数为 a_n，但它随着 t 变化. 因而广义傅里叶系数是时间的函数 $a_n(t)$. 初看展开式(8.3.6)似乎与齐次问题所进行的分离变量类似，然而，(8.3.6)与其大不相同. 这里，$a_n(t)$ 不是依赖时间的分离解 $e^{-k(n\pi/L)^2t}$，而 $a_n(t)$ 正是 $v(x, t)$ 的广义傅里叶系数. 下面要确定 $a_n(t)$，并证明一般 $a_n(t)$ 不与 $e^{-k(n\pi/L)^2t}$ 成比例.

(8.3.6)自动满足齐次边界条件，这是由于 $v(x, t)$ 与 $\phi_n(x)$ 满足相同的齐次边界条件. 要满足初始条件，

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(0)\phi_n(x).$$

由特征函数(关于权函数1，由(8.3.5)为常系数)的正交性，可以确定广义傅里叶系数的初值：

$$a_n(0)=\frac{\int_0^L g(x)\phi_n(x)\,dx}{\int_0^L \phi_n^2(x)\,dx}. \tag{8.3.7}$$

"所有"剩下的是确定 $a_n(t)$，使得(8.3.6)满足非齐次偏微分方程(8.3.1). 将用两种不同的方法证明：为了使(8.3.6)满足(8.3.1)，$a_n(t)$ 须满足一个一阶微分方程.

确定 $a_n(t)$ 的一个方法是直接代入. 这容易做，但要计算 $\partial v/\partial t$ 与 $\partial^2 v/\partial x^2$. 由于 $v(x, t)$ 是一个无穷级数，求导会是个很精细的过程. 这里就在较一般的条件下给出结果：如果 v 与 $\partial v/\partial x$ 连续，并且如果 $v(x, t)$ 满足与 $\phi_n(x)$ 同样的齐次边界条件，则必需的逐项微分是可行的. 对于傅里叶正弦与余弦级数，3.4节对这些级数的逐项微分性质已作了较细致的研究，并证明了这个结论. 对于一般情形，这里省略证明. 不过，8.4节中利用另一种方法也得到了同样的解，因此就验证了这一节的简单方法. 对 $v(x, t)$ 逐项微分：

355

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{da_n(t)}{dt}\phi_n(x)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\frac{d^2\phi_n(x)}{dx^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\lambda_n\phi_n(x),$$

因为 $\phi_n(x)$满足 $d^2\phi_n/dx^2 + \lambda_n\phi_n = 0$. 将这些结果代入(8.3.1)得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{da_n}{dt} + \lambda_n k a_n\right]\phi_n(x) = \bar{Q}(x,t). \tag{8.3.8}$$

左端是$\bar{Q}(x, t)$的广义傅里叶级数，由 $\phi_n(x)$的正交性，得到 $a_n(t)$的一阶微分方程：

$$\frac{da_n}{dt} + \lambda_n k a_n = \frac{\int_0^L \bar{Q}(x,t)\phi_n(x)dx}{\int_0 \phi_n^2(x)dx} \equiv \bar{q}_n(t). \tag{8.3.9}$$

右端是时间(与 n)的已知函数，即$\bar{Q}(x, t)$的傅里叶系数：

$$\bar{Q}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\bar{q}_n(t)\phi_n(x).$$

方程(8.3.9)需要一个初始条件，而 $a_n(0)$肯定等于初始条件的广义傅里叶系数.（见(8.3.7).）

方程(8.3.9)是一阶非齐次线性方程. 也许求解的最简单方法[⊖]（除非$\bar{q}_n(t)$特别简单）就是乘以积分因子 $e^{\lambda_n kt}$，因而有

$$e^{\lambda_n kt}\left(\frac{da_n}{dt} + \lambda_n k a_n\right) = \frac{d}{dt}(a_n e^{\lambda_n kt}) = \bar{q}_n e^{\lambda_n kt}.$$

求从 0 到 t 的积分得到

$$a_n(t)e^{\lambda_n kt} - a_n(0) = \int_0^t \bar{q}_n(\tau)e^{\lambda_n k\tau}d\tau.$$

求解出 $a_n(t)$就有

$$\boxed{a_n(t) = a_n(0)e^{-\lambda_n kt} + e^{-\lambda_n kt}\int_0^t \bar{q}_n(\tau)e^{\lambda_n k\tau}d\tau.} \tag{8.3.10}$$

注意 $a_n(t)$的形式是常量 $a_n(0)$乘以齐次解 $e^{-\lambda_n kt}$，再加上一个特解. 这就是特征函数展开法. 356 这样带齐次边界条件的非齐次偏微分方程的解就是

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\phi_n(x),$$

其中 $\phi_n(x) = \sin n\pi x/L$，$\lambda_n = (n\pi/L)^2$，$a_n(t)$由(8.3.10)给定，$\bar{q}_n(\tau)$由(8.3.9)给定，$a_n(0)$由(8.3.7)给定. 这个解是相当复杂的.

检验一下，如果问题是齐次的，即 $Q(x, t) = 0$，解就简化为

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\phi_n(x),$$

其中

$$a_n(t) = a_n(0)e^{-\lambda_n kt}$$

且 $a_n(0)$由(8.3.7)给定，与通过分离变量法所求的结果完全一致.

⊖ 另一种方法是参数变易法.

例. 举个简单例子，假设对于 $0<x<\pi$(即 $L=\pi$)，

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin 3x\mathrm{e}^{-t}\quad \text{其解满足}\begin{cases}u(0,t)=0\\ u(\pi,t)=1\\ u(x,0)=f(x).\end{cases}$$

为了使边界条件齐次，引入关于平衡温度的位移 $v(x,t)=u(x,t)-x/\pi$，此时有

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\sin 3x\mathrm{e}^{-t}\quad \text{其解满足}\begin{cases}v(0,t)=0\\ v(\pi,t)=0\\ v(x,0)=f(x)-\dfrac{x}{\pi}.\end{cases}$$

特征函数是 $\sin n\pi x/L=\sin nx$(由于 $L=\pi$)，因而有

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\sin nx,\tag{8.3.11}$$

将特征函数展开式代入方程，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{d}a_n}{\mathrm{d}t}+n^2a_n\right)\sin nx=\sin 3x\mathrm{e}^{-t}.$$

这样，未知傅里叶正弦系数满足

357

$$\frac{\mathrm{d}a_n}{\mathrm{d}t}+n^2a_n=\begin{cases}0 & n\neq 3\\ \mathrm{e}^{-t} & n=3.\end{cases}$$

它的解不必套用公式(8.3.10)就能得到

$$a_n(t)=\begin{cases}a_n(0)\mathrm{e}^{-n^2t} & n\neq 3\\ \dfrac{1}{8}\mathrm{e}^{-t}+\left[a_3(0)-\dfrac{1}{8}\right]\mathrm{e}^{-9t} & n=3,\end{cases}\tag{8.3.12}$$

其中

$$a_n(0)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x)-\frac{x}{\pi}\right]\sin nx\mathrm{d}x.\tag{8.3.13}$$

原非齐次问题的解是 $u(x,t)=v(x,t)+x/\pi$，其中 v 满足(8.3.11)，$a_n(t)$ 由(8.3.12)与(8.3.13)确定.

习题 8.3

8.3.1 求解带非定常热源热传导方程的初值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Q(x,t)$$
$$u(x,0)=f(x),$$

使其满足下列边界条件：

(a) $u(0,t)=0,\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0$

(b) $u(0,t)=0,\quad u(L,t)+2\dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0$

*(c) $u(0,t)=A(t),\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0$

(d) $u(0,t)=A\neq 0,\ u(L,t)=0$

(e) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t)=A(t),\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t)=B(t)$

*(f) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0,\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0$

(g)在(f)中取 $Q(x,t)=Q(x)$(与 t 无关)，满足 $\int_0^L Q(x)\mathrm{d}x\neq 0$. 在此情形下，证明不存在定常解.

当 $t\to\infty$ 时，非定常解又会怎样？请作简要解释.

8.3.2 考虑有定常热源的热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Q(x),$$

满足这一节的初始条件和边界条件：

$$u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0\quad 及\quad u(x,0)=f(x).$$

通过特征函数展开法求解. 并证明这个解趋于定常解.

*8.3.3 求解初值问题

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)+qu+f(x,t),$$

358

其中 c，ρ，K_0 与 q 仅是 x 的函数，满足条件

$$u(0,t)=0,u(L,t)=0\quad 及\quad u(x,0)=g(x).$$

假设已知特征函数. $\left[提示：设\ L\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(K_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)+q.\right]$

8.3.4 考虑

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{\sigma(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left[K_0(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]\quad(K_0>0,\sigma>0),$$

满足边界条件与初始条件：

$$u(x,0)=g(x),u(0,t)=A\quad 且\quad u(L,t)=B.$$

*(a)求定常解 $u_0(x)$.

(b)证明 $\lim\limits_{t\to\infty}u(x,t)=f(x)$ 与初始条件无关. [证明 $f(x)=u_0(x)$.]

*8.3.5 在圆内($r<a$)求解

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\nabla^2 u+f(r,t),$$

其中在 $r=a$，$u=0$；在初始时刻 $u=0$.

8.3.6 求解

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin 5x e^{-2t},$$

其中 $u(0,t)=1$，$u(\pi,t)=0$，$u(x,0)=0$.

*8.3.7 求解

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

其中 $u(0,t)=0$，$u(L,t)=t$，$u(x,0)=0$.

8.4 利用格林公式的特征函数展开法(带或不带齐次边界条件)

这一节重新研究带非齐次边界条件的问题. 还是用特征函数展开法. 例如，考虑

359

$$\text{PDE:}\ \boxed{\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Q(x,t)}\tag{8.4.1}$$

$$\text{BC:}\ \boxed{\begin{aligned}u(0,t)&=A(t)\\u(L,t)&=B(t)\end{aligned}}\tag{8.4.2}$$

$$\text{IC:}\ \boxed{u(x,0)=f(x).}\tag{8.4.3}$$

已知相应齐次问题

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi_n}{\mathrm{d}x^2}+\lambda_n\phi_n=0 \tag{8.4.4}$$

$$\phi_n(0)=0 \tag{8.4.5}$$

$$\phi_n(L)=0, \tag{8.4.6}$$

对应于特征值 $\lambda_n=(n\pi/L)^2$ 的特征函数为 $\phi_n(x)=\sin n\pi x/L$. 任何分段光滑的函数都可以由这些特征函数展开. 这样，即使 $u(x, t)$满足非齐次边界条件，仍然有

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(t)\phi_n(x).} \tag{8.4.7}$$

事实上，在 $x=0$ 和 $x=L$ 时，(8.4.7)中的等号不成立，因为 $\phi_n(x)$满足齐次边界条件，而 $u(x, t)$不满足. 尽管如此，这里仍使用了 = 号，但要记住“~”号是更合适的. 将(8.4.7)代入(8.4.1)来确定 $b_n(t)$是困难的；由于 $u(x, t)$与 $\phi_n(x)$并不满足相同的齐次边界条件 $\left[\partial^2u/\partial x^2 \neq \sum_{n=1}^{\infty}b_n(t)\mathrm{d}^2\phi_n/\mathrm{d}x^2\right]$，因而所需的对 x 的逐项微分是不正确的. 然而，在 3.4 节中证明了对时间的逐项求导是有效的：

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}b_n}{\mathrm{d}t}\phi_n(x).} \tag{8.4.8}$$

下面要确定 $b_n(t)$的一阶微分方程. 与 8.3 节所述不同，这里不必计算特征函数无穷级数的空间导数，就得到了一阶微分方程. 从(8.4.8)得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}b_n}{\mathrm{d}t}\phi_n(x)=k\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+Q(x,t),$$

这样

$$\frac{\mathrm{d}b_n}{\mathrm{d}t}=\frac{\int_0^L\left[k\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+Q(x,t)\right]\phi_n(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^L\phi_n^2\,\mathrm{d}x}. \tag{8.4.9}$$

360

(8.4.9)使得偏微分方程得到满足. 要注意到 $Q(x, t)$的广义傅里叶级数的重要性：

$$Q(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}q_n(t)\phi_n(x),\quad 其中\quad q_n(t)=\frac{\int_0^L Q(x,t)\phi_n(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^L\phi_n^2\,\mathrm{d}x}.$$

这样(8.4.9)化简为

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}b_n}{\mathrm{d}t}=q_n(t)+\frac{\int_0^L k\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\phi_n(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^L\phi_n^2\,\mathrm{d}x}.} \tag{8.4.10}$$

下面要说明如何用 $b_n(t)$表示(8.4.10)中的积分，并给出一阶微分方程.

如果对 $\int_0^L\partial^2u/\partial x^2\phi_n(x)\,\mathrm{d}x$ 作两次分部积分，就会得到所要的结果. 不过这样很费力气.

有一种更好的办法，前面已经在一般条件下作了分部积分，回忆算子记号 $L\equiv\partial^2/\partial x^2$ 和相关的结果. 由 $L=\partial^2/\partial x^2$，

$$\int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\phi_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^L \phi_n L(u)\,\mathrm{d}x.$$

用格林公式(在 5.5 节中通过重复积分导出)可作化简. 先重温格林公式：

$$\boxed{\int_0^L [uL(v) - vL(u)]\,\mathrm{d}x = p\left(u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\Bigg|_0^L,} \tag{8.4.11}$$

其中 L 为施图姆-刘维尔算子($L\equiv\mathrm{d}/\mathrm{d}x(p\mathrm{d}/\mathrm{d}x)+q$). 这里 $L=\partial^2/\partial x^2$(即 $p=1$, $q=0$). 由于 t 固定，$\partial/\partial x=\mathrm{d}/\mathrm{d}x$，对偏导数也成立. 于是

$$\boxed{\int_0^L\left(u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x = \left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_0^L.} \tag{8.4.12}$$

这里取 $v=\phi_n(x)$. 通常 u 与 ϕ_n 满足同样的齐次边界条件，其右端为 0. 现在 $\phi_n(x)=\sin n\pi x/L$ [361] 满足齐次边界条件，而 $u(x,t)$ 不满足($u(0,t)=A(t)$, $u(L,t)=B(t)$). 由 $\mathrm{d}\phi_n/\mathrm{d}x=(n\pi/L)\cos n\pi x/L$，(8.4.12)的右端为 $(n\pi/L)[B(t)(-1)^n-A(t)]$. 另外，$\int_0^L u\mathrm{d}^2\phi_n/\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x=-\lambda_n\int_0^L u\phi_n\mathrm{d}x$，因为 $\mathrm{d}^2\phi_n/\mathrm{d}x^2+\lambda_n\phi_n=0$. 因而(8.4.12)变为

$$\int_0^L \phi_n\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}x = -\lambda_n\int_0^L u\phi_n\mathrm{d}x - \frac{n\pi}{L}[B(t)(-1)^n - A(t)].$$

由 $b_n(t)$ 是 $u(x,t)$ 的广义傅里叶系数，可知

$$b_n(t) = \frac{\int_0^L u\phi_n\mathrm{d}x}{\int_0^L \phi_n^2\mathrm{d}x}.$$

最后，(8.4.10)化简为 $b_n(t)$ 的一阶微分方程：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}b_n}{\mathrm{d}t} + k\lambda_n b_n = q_n(t) + \frac{k(n\pi/L)[A(t) - (-1)^n B(t)]}{\int_0^L \phi_n^2(x)\,\mathrm{d}x}.} \tag{8.4.13}$$

其中非齐次项有两个来源，$q_n(t)$ 是源自偏微分方程中的源项，而包含 $A(t)$ 与 $B(t)$ 的项源自 $x=0$ 与 $x=L$ 处的非齐次边界条件. 再次用积分因子 $\mathrm{e}^{k\lambda_n t}$ 求解(8.4.13). $b_n(t)$ 的初始条件来自所给的初始条件 $u(x,0)=f(x)$：

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0)\phi_n(x)$$

$$b_n(0) = \frac{\int_0^L f(x)\phi_n(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^L \phi_n^2\mathrm{d}x}.$$

有趣的是，带非齐次边界条件问题的系数 $b_n(t)$ 的微分方程，与前面带齐次边界条件问题的系数的方程极其相似，仅仅是改变了非齐次项.

如果边界条件是齐次的，即 $u(0, t)=0$，$u(L, t)=0$，则(8.4.13)可归结为上一节导出的微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}b_n}{\mathrm{d}t}+k\lambda_n b_n = q_n(t),$$

362 使用格林公式是另一种导出特征函数展开式的方法. 对齐次边界条件就能使用. 事实上，就是这个推导方法证明了8.3节中特征函数的无穷级数微分的合理性.

现在有两种求解带非齐次边界条件的非齐次偏微分方程的方法. 一种是减去任意满足非齐次边界条件的函数，用特征函数展开法求解带齐次边界条件的相关问题. 另一种是直接用特征函数展开法求解带非齐次边界条件的初值问题. 这两种方法都需要某个函数 $w(x, t)$ 的特征函数展开式：

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\phi_n(x).$$

如果 $w(x, t)$ 与 $\phi_n(x)$ 满足相同的齐次边界条件，则这个级数收敛得相当快. 然而，如果 $w(x, t)$ 满足非齐次边界条件，那么这个级数不仅(在 $x=0$ 与 $x=L$ 处)不满足边界条件，而且处处都收敛得比较慢. 因而，将问题简化为齐次边界问题的优点是相应级数收敛得比较快.

习题 8.4

8.4.1 在下面的习题中，不要做边界齐次化简. 求解有非定常源热传导方程的初值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Q(x,t)$$

$$u(x,0)=f(x),$$

其中边界条件为

(a) $u(0, t)=A(t)$，$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t)=B(t)$　　* (b) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t)=A(t)$，$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t)=B(t)$

8.4.2 不进行边界齐次化简，使用特征函数展开法求解

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0)=f(x) \quad \left.\begin{aligned} u(0,t)&=A \\ u(L,t)&=B \end{aligned}\right\} \text{常量}.$$

8.4.3 考虑

363

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[K_0(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+q(x)u+f(x,t)$$

$$u(x,0)=g(x) \quad u(0,t)=\alpha(t)$$

$$u(L,t)=\beta(t).$$

假设已知相应齐次问题的特征函数 $\phi_n(x)$.

(a) 不做边界齐次化简，求解这个问题.　　(b) 先进行边界齐次化简，再求解这个问题.

8.4.4 重新考虑

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Q(x,t)$$

$$u(x,0)=f(x) \quad u(0,t)=0$$

$$u(L,t)=0.$$

假设解 $u(x, t)$ 有适当的光滑性，使得它可以表示为傅里叶余弦级数

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)\cos\frac{n\pi x}{L}.$$

求出 dc_n/dt. 并证明 c_n 满足一阶非齐次常微分方程，但部分非齐次项未知. 试着做出简单的哲学结论.

8.5 受迫振动膜与共振

特征函数展开法也可用于两个以上自变量的非齐次偏微分方程求解. 一个有趣的例子就是任意形状的振动膜. 在前面对膜的分析中，振动是由初始条件引起的. 另外使膜振动的机制就是外力. 描述振动膜的非齐次线性偏微分方程是

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\nabla^2 u + Q(x,y,t),} \tag{8.5.1}$$

其中 $Q(x, y, t)$表示与时间和位置有关的外力. 为了完整起见，沿膜的边界应该有边界条件. 不过，对振动膜比较有用的是用0垂直位移将振动膜固定. 这样就在整个边界上指定齐次边界条件

$$\boxed{u = 0,} \tag{8.5.2}$$

364

初始位置与初始速度指定为

$$\boxed{u(x,y,0) = \alpha(x,y)} \tag{8.5.3}$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \beta(x,y).} \tag{8.5.4}$$

为了使用特征函数展开法，必须假设"知道"相应齐次问题的特征函数. 对满足 $Q(x, y, t)=0$ 带边界条件(8.5.2)的(8.5.1)用分离变量法，就得到特征函数所满足的问题：

$$\nabla^2\phi = -\lambda\phi, \tag{8.5.5}$$

其中在整个边界上 $\phi=0$. 并且知道：这些特征函数是完全的，不同的特征函数(在二维的意义下)关于权函数1正交. 而且证明了 $\lambda>0$. 然而，具体的特征函数还依赖于区域的几何形状. 仅对某些相对简单的区域，得到了显式公式. 对矩形区域($0\leqslant x\leqslant L$, $0\leqslant y\leqslant H$)，特征值是 $\lambda_{nm}=(n\pi/L)^2+(m\pi/H)^2$，相应的特征函数是 $\phi_{nm}(x, y)=\sin n\pi x/L\sin m\pi y/H$，$n=1, 2, 3, \cdots, m=1, 2, 3, \cdots$. 对于半径为 a 的圆，证明了特征值是 $\lambda_{mn}=(z_{mn}/a)^2$，$z_{mn}$是 m 阶贝塞尔函数的第 n 个零点，$J_m(z_{mn})=0$，相应的特征函数是 $J_m(z_{mn}r/a)\sin m\theta$ 与 $J_m(z_{mn}r/a)\cos m\theta$，$n=1, 2, 3, \cdots, m=1, 2, 3, \cdots$.

通常，记相关的齐次特征函数为 $\phi_i(x, y)$. 任何(分段光滑)函数，包括受迫振动膜的解，可以表示为这些特征函数项的无穷级数. 因而

$$\boxed{u(x,y,t) = \sum_i A_i(t)\phi_i(x,y),} \tag{8.5.6}$$

其中 $\sum\limits_i$ 表示对所有特征函数求和. 对振动膜，如果能变量分离 $\nabla^2\phi+\lambda\phi=0$，则包含一个二重和.

逐项微分. 这里想要得到有时间相关系数 $A_i(t)$ 的常微分方程. 导出微分方程的方法有两

种：直接代入(对特征函数无穷级数作必要的微分)和用多维格林公式. 在两种方法中都假设了(8.5.6)对 t 进行逐项微分是没有困难. 这样

365

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_i \frac{d^2 A_i}{dt^2}\phi_i(x,y). \tag{8.5.7}$$

由于 u 与 ϕ_i 满足同样的齐次边界条件，空间变量逐项微分是允许的：

$$\nabla^2 u = \sum_i A_i(t)\nabla^2\phi_i(x,y). \tag{8.5.8}$$

如果在整个边界上 $u\neq 0$，则上式不成立. 由于$\nabla^2\phi_i = -\lambda_i\phi_i$，(8.5.1)为

$$\sum_i \left(\frac{d^2 A_i}{dt^2} + c^2\lambda_i A_i\right)\phi_i = Q(x,y,t). \tag{8.5.9}$$

将 $Q(x, y, t)$用同样的特征函数展开，

$$Q(x,y,t) = \sum_i q_i(t)\phi_i(x,y) \quad 其中 \quad q_i(t) = \frac{\iint Q\phi_i dxdy}{\iint \phi_i^2 dxdy}, \tag{8.5.10}$$

则有

$$\boxed{\frac{d^2 A_i}{dt^2} + c^2\lambda_i A_i = q_i(t).} \tag{8.5.11}$$

这样，A_i 满足二阶线性非齐次微分方程.

格林公式. 导出(8.5.11)的另一个方法是利用格林公式. 先仅由 $\phi_i(x, y)$(关于权函数1)的二维正交性直接从(8.5.7)确定 d^2A_i/dt^2：

$$\frac{d^2 A_i}{dt^2} = \frac{\iint \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\phi_i dxdy}{\iint \phi_i^2 dxdy}. \tag{8.5.12}$$

再从偏微分方程(8.5.1)中消去$\partial^2 u/\partial t^2$，得到

$$\frac{d^2 A_i}{dt^2} = \frac{\iint (c^2\nabla^2 u + Q)\phi_i dxdy}{\iint \phi_i^2 dxdy}. \tag{8.5.13}$$

易见这后一积分是 Q 的广义傅里叶系数[见(8.5.10)]，可得

$$\frac{d^2 A_i}{dt^2} = q_i(t) + \frac{\iint c^2\ \nabla^2 u\phi_i dxdy}{\iint \phi_i^2 dxdy}. \tag{8.5.14}$$

现在即可使用二维格林公式：

366

$$\iint (\phi_i\nabla^2 u - u\nabla^2\phi_i)dxdy = \oint (\phi_i\nabla u - u\nabla\phi_i)\cdot\hat{n}ds, \tag{8.5.15}$$

其中，ds 表示边界弧长微元，$\hat{n}$是边界的单位外法向量. 这里 u 与 ϕ_i 满足齐次边界条件，因而(8.5.15)中的边界项为0：

$$\iint (\phi_i\nabla^2 u - u\ \nabla^2\phi_i)dxdy = 0. \tag{8.5.16}$$

最好将方程(8.5.16)记成$\iint[uL(v)-vL(u)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$,其中$L=\nabla^2$. 如果膜没有齐次边界条件，与8.4节一样，就用(8.5.15)而不用(8.5.16). 使用格林公式的优点是，对非齐次边界条件，也能求解问题. 利用(8.5.16)，

$$\iint\phi_i\nabla^2u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint u\nabla^2\phi_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\lambda_i\iint u\phi_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\lambda_iA_i(t)\iint\phi_i^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

因为$\nabla^2\phi_i+\lambda_i\phi_i=0$和$A_i(t)$是$u(x,\ y,\ t)$的广义傅里叶系数：

$$A_i(t)=\frac{\iint u\phi_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\phi_i^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}. \tag{8.5.17}$$

因此，从(8.5.14)导出

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2A_i}{\mathrm{d}t^2}+c^2\lambda_iA_i=q_i,} \tag{8.5.18}$$

这与已得到的二阶微分方程[见(8.5.11)]相同，证明了那里较简单的逐项微分是正确的.

参数变易法. 为了求解(8.5.11)或(8.5.18)，需要一些有关常微分方程的结果. 方程(8.5.18)是一个二阶常系数(λ_ic^2为常量)非齐次线性微分方程. 其通解是特解加上齐次解的线性组合. 这里，由$\lambda_i>0$，齐次解是$\sin c\sqrt{\lambda_i}t$与$\cos c\sqrt{\lambda_i}t$. 特解总可以由参数变易法获得. 不过，如果$q_i(t)$是多项式、指数、正弦或余弦函数(或它们的积或和)待定系数法一般更易于使用. 由参数变易法(见9.3.2节)，可以证明(8.5.18)的通解为

$$\boxed{A_i(t)=c_1\cos c\sqrt{\lambda_i}t+c_2\sin c\sqrt{\lambda_i}t+\int_0^tq_i(\tau)\frac{\sin c\sqrt{\lambda_i}(t-\tau)}{c\sqrt{\lambda_i}}\mathrm{d}\tau.} \tag{8.5.19}$$

367

使用这种形式，很容易满足初始条件

$$A_i(0)=c_1 \tag{8.5.20}$$

$$\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}(0)=c_2c\sqrt{\lambda_i}. \tag{8.5.21}$$

从初始条件(8.5.3)与(8.5.4)得到

$$A_i(0)=\frac{\iint\alpha(x,y)\phi_i(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\phi_i^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y} \tag{8.5.22}$$

$$\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}(0)=\frac{\iint\beta(x,y)\phi_i(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\phi_i^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}. \tag{8.5.23}$$

通常，受迫振动膜的解是

$$u(x,y,t)=\sum_iA_i(t)\phi_i(x,y),$$

其中ϕ_i由(8.5.5)给定，$A_i(t)$由(8.5.19)～(8.5.23)确定.

如果没有外力，$Q(x,\ y,\ t)=0$(即$q_i(t)=0$)，则$A_i(t)=c_1\cos c\sqrt{\lambda_i}t+c_2\sin c\sqrt{\lambda_i}t$. 此时

解为

$$u(x,y,t) = \sum_i (a_i \operatorname{cosc} \sqrt{\lambda_i} t + b_i \operatorname{sinc} \sqrt{\lambda_i} t) \phi_i(x,y),$$

恰好就是分离变量法得到的解．振动膜的固有频率为 $c\sqrt{\lambda_i}$.

周期受迫．至此完成了对任意外力作用下任意形状膜振动的分析．可以很容易地将结果用于矩形或圆形膜．但现在还是继续讨论任意形状的膜．假设受迫函数是对时间的纯振荡，具体地说，

$$\boxed{Q(x,y,t) = \bar{Q}(x,y)\cos\omega t;} \tag{8.5.24}$$

即受迫频率为 ω．这里不特别指定空间依赖 $\bar{Q}(x, y)$．也对受迫函数作特征函数展开．从(8.5.10)得

$$q_i(t) = \gamma_i \cos\omega t, \tag{8.5.25}$$

其中 γ_i 为常量：

368

$$\gamma_i = \frac{\iint \bar{Q}(x,y)\phi_i(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint \phi_i^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y}.$$

从(8.5.18)，广义傅里叶系数满足二阶微分方程，

$$\frac{\mathrm{d}^2 A_i}{\mathrm{d}t^2} + c^2\lambda_i A_i = \gamma_i \cos\omega t. \tag{8.5.26}$$

上式的右端很简单，用待定系数法[而不是一般形式(8.5.19)]更容易得到一个特解．其齐次解仍是 $\operatorname{sinc}\sqrt{\lambda_i}t$ 与 $\operatorname{cosc}\sqrt{\lambda_i}t$ 的一个线性组合，$c\sqrt{\lambda_i}$表示膜的固有频率．膜受迫于频率为 ω 的外力．

求解(8.5.26)并不困难．可以猜想一个特解形式[⊖]如下：

$$A_i(t) = B_i \cos\omega t. \tag{8.5.27}$$

将(8.5.27)代入(8.5.26)可得

$$B_i(c^2\lambda_i - \omega^2) = \gamma_i \quad \text{或} \quad B_i = \frac{\gamma_i}{c^2\lambda_i - \omega^2},$$

但这仅当 $\omega^2 \neq c^2\lambda_i$ 时才有意义．该结果的物理意义是，如果受迫频率 ω 与固有频率不同，则特解是

$$A_i(t) = \frac{\gamma_i \cos\omega t}{c^2\lambda_i - \omega^2}, \tag{8.5.28}$$

而通解是

$$A_i(t) = \frac{\gamma_i \cos\omega t}{c^2\lambda_i - \omega^2} + c_1 \operatorname{cosc}\sqrt{\lambda_i}t + c_2 \operatorname{sinc}\sqrt{\lambda_i}t. \tag{8.5.29}$$

$A_i(t)$表示模式 $\phi(x, y)$的振幅．每个模式由两个振动组成，一个以固有频率 $c\sqrt{\lambda_i}$振动，另一个以受迫频率 ω 振动．(对某个给定的模式)这两个频率越接近，该模式的振幅就越大．

⊖ 如果(8.5.26)有表示摩擦力的一阶导数项，则特解一定包含 $\cos\omega t$ 与 $\sin\omega t$.

共振. 然而，如果受迫频率 ω 与一个固有频率 $c\sqrt{\lambda_i}$ 相同，就发生共振现象. 从数学上来说，若 $\omega^2 = c^2\lambda_i$，则对那些模式[即仅对 $\omega^2 = c^2\lambda_i$ 的那些模式 $\phi_i(x, y)$]，由于(8.5.26)右端为齐次解，(8.5.27)不是特解. 特解对时间也不再是周期的. 其振幅与 t 成比例的增长. 可以得到(8.5.26)的一个特解是

$$A_i(t) = \frac{\gamma_i}{2\omega} t\sin\omega t, \tag{8.5.30}$$

因而通解为

$$A_i(t) = \frac{\gamma_i}{2\omega} t\sin\omega t + c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t, \tag{8.5.31}$$

369

对于共振模式，有 $\omega = c\sqrt{\lambda_i}$. 共振时，与受迫频率相应的固有模式随时间无限增大. 而其他振动模式则保持有界. 片刻之后，共振模式就成为振动主体. 因而解的空间结构将主要来自共振模式的特征函数. 其他模式没有显著地激发起来. 这里给出(8.5.30)的简短推导，它避免了冗长的代数运算. 如果 $\omega^2 \neq c^2\lambda_i$，较容易求得通解(8.5.28). 但不能取 $\omega \to c\sqrt{\lambda_i}$ 时的极限，因为振幅会趋于无穷大. 然而从(8.5.29)可以看出

$$A_i(t) = \frac{\gamma_i}{c^2\lambda_i - \omega^2}(\cos\omega t - \cos c\sqrt{\lambda_i} t). \tag{8.5.32}$$

若 $\omega^2 \neq c^2\lambda_i$，它也是一个解[⊖]. 不过 $\omega \to c\sqrt{\lambda_i}$ 时，$A_i(t)$ 为0/0型，因而 $\omega \to c^2\lambda_i$ 时，(8.5.32)可能有极限. 由洛必达法则，得到(8.5.32)当 $\omega \to c\sqrt{\lambda_i}$ 时的极限：

$$A_i(t) = \lim_{\omega \to c\sqrt{\lambda_i}} \frac{\gamma_i(\cos\omega t - \cos c\sqrt{\lambda_i} t)}{c^2\lambda_i - \omega^2} = \lim_{\omega \to c\sqrt{\lambda_i}} \frac{-\gamma_i t\sin\omega t}{-2\omega},$$

这就验证了(8.5.30).

共振模式的位移不可能像(8.5.31)那样无限增大. 其数学推导是正确的，但要修正一些物理假设. 也许包括摩擦力是适当的，习题中表明它限制了位移的增长. 另一个可能是这个模式的振幅增得如此大，以至推导二维波动方程时的线性假设不再有效了；对充分大的位移，采用不同的偏微分方程应该是合适的. 也许由于共振引起的振幅增大会导致膜的断裂(但这只有在违反了线性假设后才可能发生).

注意，结论是对任意区域证明的. 引入矩形或圆形区域的细节可能就是模糊了基本的数学与物理现象.

膜共振在数学上与(无摩擦的)弹簧振子系统的共振类似. 事实上，受迫频率与固有频率相同时，任何机械系统都会产生共振. 诸如塔科马大桥(Tacoma Bridge)的坍塌和喷气式飞机坠毁等灾难都归咎于共振现象.

习题 8.5

8.5.1 由代入证明

$$y(t) = \frac{1}{\omega_0}\int_0^t f(\bar{t})\sin\omega_0(t - \bar{t})\,d\bar{t}$$

370

⊖ 这个解对应初始条件 $A_i(0) = 0$，$dA_i/dt = 0$.

是下列方程的一个特解：

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega_0^2y=f(t).$$

其通解是什么？满足初始条件 $y(0)=y_0$ 及 $\frac{dy}{dt}(0)=v_0$ 的解什么？

8.5.2 考虑一根受非定常外力作用的振动弦：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Q(x,t)$$

$$u(0,t)=0 \quad u(x,0)=f(x)$$

$$u(L,t)=0 \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0.$$

(a)求解这个初值问题.

*(b)求解 $Q(x,t)=g(x)\cos\omega t$ 的初值问题. 试问 ω 取什么值时发生共振？

8.5.3 考虑一个受摩擦力和时间周期外力作用的振动弦：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\beta\frac{\partial u}{\partial t}+g(x)\cos\omega t$$

$$u(0,t)=0 \quad u(x,0)=f(x)$$

$$u(L,t)=0 \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0.$$

(a)在 β 较小($0<\beta<2c\pi/L$)的条件下，求解这个初值问题.

(b)把(a)的解与习题8.5.2(b)的解作比较.

8.5.4 求解受非定常外力作用的振动弦的初值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Q(x,t),\quad u(x,0)=f(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,$$

满足下列边界条件，但不要化简成齐次边界条件：

(a) $u(0,t)=A(t)$, $\quad u(L,t)=B(t)$

(b) $u(0,t)=0$, $\quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0$

(c) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=A(t)$, $\quad u(L,t)=0$

8.5.5 求解受非定常外力作用、边界固定($u=0$)的膜初值问题，

371

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\nabla^2 u+Q(x,y,t),$$

$$u(x,y,0)=f(x,y),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0)=0,$$

其中膜的形状为

(a)矩形($0<x<L$, $0<y<H$). (b)圆形($r<a$).

*(c)半圆形($0<\theta<\pi$, $r<a$). (d)圆环($a<r<b$).

8.5.6 考虑一个半径为 α 的受迫半圆膜(图8.5.1)的位移 $u(r,\theta,t)$，它满足偏微分方程

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+g(r,\theta,t),$$

齐次边界条件为

$$u(r,0,t)=0,\quad u(r,\pi,t)=0 \quad 及 \quad \frac{\partial u}{\partial r}(\alpha,\theta,t)=0,$$

初始条件为

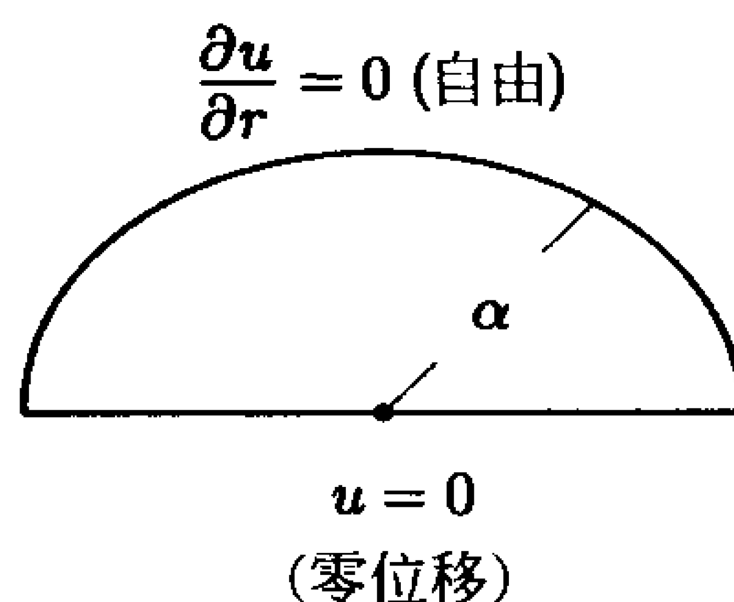


图 8.5.1

$$u(r,\theta,0) = H(r,\theta) \quad 及 \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,0) = 0.$$

*(a)假设 $u(r, \theta, t) = \sum\sum a(t)\phi(r, \theta)$，其中 $\phi(r, \theta)$为相应齐次问题的特征函数. $a(t)$的初始条件是什么？且 $a(t)$满足的微分方程是什么？

(b)特征函数是什么？

(c)解出 $u(r, \theta, t)$.（提示：见习题 8.5.1.）

8.6 泊松方程

特征函数展开法已经用在求解偏微分方程的非齐次不定常边值问题(带或不带齐次边界条件)上了. 对每种情形，特征函数展开法

$$u = \sum_i a_i(t)\phi_i$$

[372]

都给出系数 $a_i(t)$的初值问题，其中 ϕ_i 是相关的齐次特征函数，比如满足

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda\phi = 0 \quad 或 \quad \nabla^2\phi + \lambda\phi = 0.$$

而定常非齐次问题必须用有些不同的方法来求解. 考虑定常源平衡温度分布，它满足泊松方程

$$\boxed{\nabla^2 u = Q,} \tag{8.6.1}$$

这里 Q 与热源有关. 暂时不指定区域形状. 不过假定在整个边界上给定了温度，

$$u = \alpha,$$

其中 α 已知，一般不是常量. 这个问题有两个原因是非齐次的，一是由于受迫函数 Q，一是存在边界条件 α. 可以将平衡温度分解为两部分，$u = u_1 + u_2$，其中 u_1 是由于外力，u_2 是由于边界条件：

$$\begin{aligned} &\nabla^2 u_1 = Q & &\nabla^2 u_2 = 0 \\ &在边界上\ u_1 = 0 & &在边界上\ u_2 = \alpha \end{aligned}$$

容易验证 $u = u_1 + u_2$ 满足泊松方程和非齐次边界条件. u_2 问题是拉普拉斯方程(带非齐次边界条件)的解，对简单区域，它能够用分离变量法求解(2.5.1 节与 7.9.1 节说明了如何引入齐次边界条件).

因此，这一节先集中注意带齐次边界条件(在边界上 $u_1 = 0$)的泊松方程

$$\nabla^2 u_1 = Q.$$

由于 u_1 满足齐次边界条件，使用特征函数展开法可能是恰当的. 这个问题可从两个不同的角度分析，(1)把要求的解用相应齐次问题的特征函数展开，这些特征函数由$\nabla^2 u_1 = 0$ 分离变量获得(与求解非定常问题的做法一样)；(2)把要求的解用

$$\nabla^2\phi + \lambda\phi = 0$$

的特征函数展开. 这两种方法是不同(但相联系)的.

[373]

一维特征函数. 为确定起见，考虑如图 8.6.1 所示带零边界条件矩形区域上的二维泊松方程

$$\boxed{\nabla^2 u_1 = Q,} \tag{8.6.2}$$

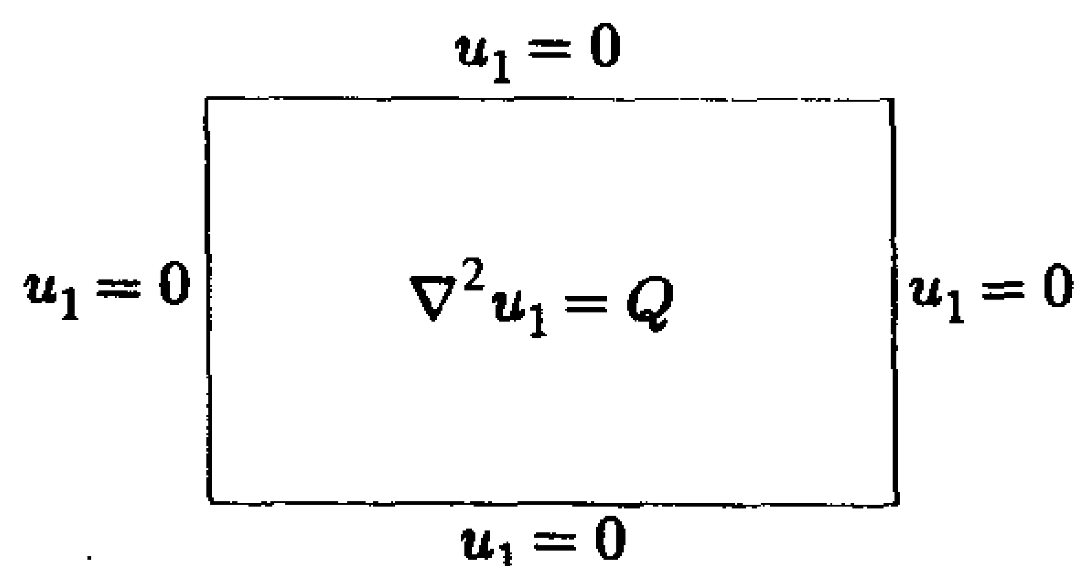


图 8.6.1 矩形区域内的泊松方程

下面先描述一维特征函数. 相应齐次问题$\nabla^2 u_1 = 0$是(在直角坐标系中)可分离的拉普拉斯方程. 它的解在一个方向上振荡, 而在另一个方向上是指数函数的组合. 因而, 相应齐次问题(特征函数展开法所需)的特征函数可能是x特征函数或y特征函数. 既然在两个方向上都有两个齐次边界条件, 就可以使用x相关的或y相关的特征函数. 为确定起见, 用x相关的特征函数$\sin n\pi x/L$, 因为在$x=0$与$x=L$处$u_1=0$. 特征函数展开法在于将$u_1(x, y)$展开为这些特征函数的级数:

$$\boxed{u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y) \sin \frac{n\pi x}{L},} \tag{8.6.3}$$

其中正弦系数$b_n(y)$是y的函数. 对(8.6.3)关于y求导两次后代入泊松方程(8.6.2)得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^2 b_n}{\mathrm{d}y^2} \sin \frac{n\pi x}{L} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = Q. \tag{8.6.4}$$

$\partial^2 u_1/\partial x^2$可由两种相关的方法确定(如在非齐次非定常问题中表明的那样): 比较直接的是对级数(8.6.3)的x逐项求导, 或使用格林公式. 无论使用哪种方法, 都可从(8.6.4)得到

374

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\mathrm{d}^2 b_n}{\mathrm{d}y^2} - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 b_n\right] \sin \frac{n\pi x}{L} = Q, \tag{8.6.5}$$

因为u_1和$\sin n\pi x/L$都满足同样的齐次边界条件. 因而, 傅里叶正弦系数满足下列二阶常微分方程:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 b_n}{\mathrm{d}y^2} - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 b_n = \frac{2}{L}\int_0^L Q(x,y) \sin \frac{n\pi x}{L} \mathrm{d}x \equiv q_n(y),} \tag{8.6.6}$$

其右端是Q的正弦系数,

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \frac{n\pi x}{L}. \tag{8.6.7}$$

求解(8.6.6)需要两个条件. 已经满足了泊松方程及$x=0$, $x=L$处的边界条件. 边界条件$y=0$(对任意的x)时, $u_1=0$; $y=H$(对任意的x)时, $u_1=0$, 这给出了

$$b_n(0) = 0 \quad 和 \quad b_n(H) = 0. \tag{8.6.8}$$

这样, 特征函数展开法中的未知系数(见(8.6.6))本身满足一维非齐次边值问题. 将这个结果与非定常非齐次偏微分方程问题作比较, 那里的系数满足一维初值问题, 而一维边值问题比初值问题更难满足. 后面会讨论常微分方程的边值问题. 将找到寻求(8.6.6)满足边界条件(8.6.8)解的另一种方法. 有一种形式的解可以用参数变易法(见9.3.2节)得到:

$$\boxed{\begin{aligned} b_n(y) = {} & \sinh \frac{n\pi(H-y)}{L}\int_0^y q_n(\xi) \sinh \frac{n\pi\xi}{L} \mathrm{d}\xi \\ & + \sinh \frac{n\pi y}{L}\int_y^H q_n(\xi) \sinh \frac{n\pi(H-\xi)}{L} \mathrm{d}\xi. \end{aligned}} \tag{8.6.9}$$

因此, 就能使用x相关一维齐次特征函数求解(带齐次边界条件)泊松方程. 带非齐次边界条件的问题可以用同样的方法求解, 这就要引入对用带非齐次条件的格林公式所产生的适当修改. 在习题8.6.1中, 同样的问题使用y相关的齐次特征函数求解.

二维特征函数. 一种略有不同的方法可以求解零边界条件矩形区域内泊松方程

$$\boxed{\nabla^2 u_1 = Q,} \tag{8.6.10}$$

375

它是考虑相关的二维特征函数：

$$\nabla^2 \phi = -\lambda \phi,$$

其中在边界上 $\phi = 0$. 对于矩形区域，这给出 x 的正弦级数和 y 的正弦级数：

$$\phi_{nm} = \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{H}$$

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2.$$

特征函数展开法就是将解 u_1 用这些二维特征函数展开：

$$\boxed{u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{H}.} \tag{8.6.11}$$

由 u_1 仅依赖 x 与 y(不是其他变量的函数)，b_{nm} 为常量. 将(8.6.11)代入泊松方程(8.6.10)得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} -b_{nm}\lambda_{nm} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{H} = Q,$$

因为$\nabla^2 \phi_{nm} = -\lambda_{nm}\phi_{nm}$. 由于 u_1 与 ϕ_{nm}满足相同的齐次边界条件，拉普拉斯算子可通过逐项计算出来. 特征函数 ϕ_{nm}(在二维的意义下)关于全函数 1 是正交的. 因而确定了 b_{nm}：

$$-b_{nm}\lambda_{nm} = \frac{\int_0^H \int_0^L Q \sin n\pi x/L \sin m\pi y/H \, dx dy}{\int_0^H \int_0^L \sin^2 n\pi x/L \sin^2 m\pi y/H \, dx dy}, \tag{8.6.12}$$

可以看出(8.6.12)的右端是 Q 的广义傅里叶系数. 由 $\lambda_{nm} > 0$(显然地或利用瑞利商)，等式两边除以 λ_{nm}就得到 b_{nm}. 使用二维特征函数展开法比使用一维的更容易得到解. 然而，(8.6.11)这样的二重无穷级数会收敛得相当慢. 除了简单情形外，数值法更好一些. 在习题 8.6.2 中将证明$b_n(y)$的傅里叶正弦系数(见(8.6.3))等于 b_{nm}(见(8.6.11)). 这就表明，一维或二维的特征函数展开方法是等价的.

非齐次边界条件(任意区域). 二维特征函数还可直接用于求解满足非齐次边界条件的泊松方程. 而表示相当一般区域上的解并不很困难. 假设在边界上 $u = \alpha$，

376

$$\boxed{\nabla^2 u = Q,} \tag{8.6.13}$$

考虑$\nabla^2 \phi = -\lambda \phi$ 在边界上满足 $\phi = 0$ 的特征函数 ϕ_i. 用这些特征函数表示 u：

$$\boxed{u = \sum_i b_i \phi_i.} \tag{8.6.14}$$

现在，下式不再成立：

$$\nabla^2 u = \sum_i b_i \nabla^2 \phi_i,$$

因为 u 不满足齐次边界条件. 然而，由(8.6.14)可知

$$b_i = \frac{\iint u\phi_i \, dx dy}{\iint \phi_i^2 \, dx dy} = -\frac{1}{\lambda_i} \frac{\iint u \nabla^2 \phi_i \, dx dy}{\iint \phi_i^2 \, dx dy}, \tag{8.6.15}$$

注意$\nabla^2\phi_i = -\lambda_i\phi_i$. 可以使用二维格林公式计算分子：

$$\iint(u\,\nabla^2 v - v\,\nabla^2 u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint(u\,\nabla v - v\,\nabla u)\cdot\hat{n}\mathrm{d}s. \tag{8.6.16}$$

设 $v=\phi_i$，可见

$$\iint u\,\nabla^2\phi_i\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\phi_i\,\nabla^2 u\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \oint(u\nabla\phi_i - \phi_i\,\nabla u)\cdot\hat{n}\mathrm{d}s.$$

然而，$\nabla^2 u = Q$ 且在边界上 $\phi_i = 0$，$u=\alpha$. 就有

$$\boxed{b_i = -\frac{1}{\lambda_i}\frac{\iint\phi_i Q\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \oint\alpha\nabla\phi_i\cdot\hat{n}\mathrm{d}s}{\iint\phi_i^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}.} \tag{8.6.17}$$

这是 b_i 的一般表达式，λ_i，ϕ_i，α 和 Q 都认为是已知的. 再次将两端除以 λ_i，因为从瑞利商可知 $\lambda_i>0$. 对其中 $\lambda_i=0$ 的问题可参看 9.4 节.

若 u 也满足齐次边界条件 $\alpha=0$，则(8.6.17)为

$$b_i = -\frac{1}{\lambda_i}\frac{\iint\phi_i Q\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\phi_i^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y},$$

与矩形区域内的(8.6.12)一致. 这表明，如果 u 与 ϕ 满足同样的齐次边界条件，(8.6.11)可以逐项微分.

377

习题 8.6

8.6.1 在矩形区域($0<x<L$, $0<y<H$)上求解

$$\nabla^2 u = Q(x,y),$$

要求满足：

(a) $u(0,\ y)=0$，$u(x,\ 0)=0$

$u(L,\ y)=0$，$u(x,\ H)=0$

用 y 的傅里叶正弦级数.

*(b) $u(0,\ y)=0$，$u(x,\ 0)=0$

$u(L,\ y)=1$，$u(x,\ H)=0$

不要化成齐次边界条件.

(c) 求解(b)，先化为齐次边界条件.

*(d) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,\ y)=0$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,\ 0)=0$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}(L,\ y)=0$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,\ H)=0$

在什么情况下有解？

(e) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,\ y)=0$，$u(x,\ 0)=0$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}(L,\ y)=0$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,\ H)=0$

8.6.2 方程(8.6.6)满足 $b_n(0)=0$，$b_n(H)=0$，

$$\frac{\mathrm{d}^2 b_n}{\mathrm{d}y^2} - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 b_n = q_n(y)$$

的解是由(8.6.9)给出.

(a)不求解这个边值问题，而是让 $b_n(y)$ 等于一个傅里叶正弦级数.

(b)证明这个级数与(8.6.9)等价.

(c)证明这个级数与由二维特征函数展开(8.6.11)所得的解等价.

8.6.3 在半径为 a 的圆内，(用二维特征函数)求 $\nabla^2 u = Q(r, \theta)$ 满足给定边界条件的解. 在什么情况下有解?

*(a) $u(a, \theta) = 0$　　(b) $\dfrac{\partial u}{\partial r}(a, \theta) = 0$

(c) $u(a, \theta) = f(\theta)$　　(d) $\dfrac{\partial u}{\partial r}(a, \theta) = g(\theta)$

8.6.4 用一维特征函数求解习题8.6.3.

8.6.5 在任一区域内，在边界 $u = 0$ 的条件下考虑

$$\nabla^2 u = Q(x,y),$$

假设已知在边界上满足 $\phi = 0$ 的特征函数 $\nabla^2 \phi = -\lambda \phi$. 求解 $u(x, y)$.

378

8.6.6 求解泊松方程的一个实例:

$$\nabla^2 u = e^{2y} \sin x,$$

其中边界条件为

$$u(0,y) = 0 \quad u(x,0) = 0$$

$$u(\pi,y) = 0 \quad u(x,L) = f(x).$$

8.6.7 在长方体区域($0 < x < L$, $0 < y < H$, $0 < z < W$)上，求方程

$$\nabla^2 u = Q(x,y,z)$$

在六个面上满足 $u = 0$ 的解.

8.6.8 在圆柱体($0 < r < a$, $0 < \theta < 2\pi$, $0 < z < H$)内，求方程

$$\nabla^2 u = Q(r,\theta,z)$$

在边界上满足 $u = 0$ 的解.

8.6.9 在矩形区域($0 < x < L$, $0 < y < H$)上考虑带边界条件 $\nabla u \cdot \hat{n} = 0$ 的方程

$$\nabla^2 u = Q(x,y).$$

(a)证明仅当 $\iint Q(x,y)\,dxdy = 0$ 时有解. 用物理论证对其作简要解释.

(b)用特征函数展开法求解. 并与(a)作比较. (提示: $\lambda = 0$ 是特征值.)

(c)如果 $\iint Q\,dxdy = 0$，考察满足初始边界条件 $u(x, y, 0) = g(x, y)$ 非定常问题 $\partial u/\partial t = k(\nabla^2 u - Q)$，确定在(b)部分得到的解中的任意常数.

8.6.10 在任意二维区域上重新考虑习题(8.6.9).

379

第9章　定常问题的格林函数

9.1　引言

由于初始条件、非齐次边界条件与强制项，线性偏微分方程的解是非零的. 如果偏微分方程是齐次的，并有一族齐次边界条件，通常试图用分离变量法求解. 在第8章，为了求解带强制项(与/或非齐次边界条件)的问题，深入研究了特征函数展开法.

这一章主要考虑没有初始条件(有源的常微分方程或拉普拉斯方程)的问题. 证明了每个问题都有一个称为格林函数的函数，它可以描述非齐次边界条件和强制项的影响. 仔细研究格林函数的性质并给出获得它们的直接方法. 诸如热传导方程与波动方程的带初始条件非定常问题的格林函数研究更难一些. 这成为在第11章中研究热传导方程与波动方程格林函数的原因.

9.2　一维热传导方程

先来重新分析带齐次边界条件的一维无源热传导方程：

380

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \tag{9.2.1}$$

$$u(0,t)=0 \tag{9.2.2}$$

$$u(L,t)=0 \tag{9.2.3}$$

$$u(x,0)=g(x). \tag{9.2.4}$$

在第2章中，根据分离变量法得到

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{e}^{-k(n\pi/L)^2 t},} \tag{9.2.5}$$

其初始条件表明 a_n 是 $g(x)$ 的傅里叶正弦级数的系数，

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{L} \tag{9.2.6}$$

$$\boxed{a_n=\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x.} \tag{9.2.7}$$

为了考察初始条件 $g(x)$ 的影响，就要仔细考察(9.2.5)的这个解. 由(9.2.7)消去其中的傅里叶正弦系数(也就引入一个哑积分变量 x_0)：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{L}\int_0^L g(x_0)\sin\frac{n\pi x_0}{L}\mathrm{d}x_0\right]\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{e}^{-k(n\pi/L)^2 t}.$$

交换无穷求和与积分的顺序，就得到

$$u(x,t)=\int_0^L g(x_0)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{L}\sin\frac{n\pi x_0}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{e}^{-k(n\pi/L)^2 t}\right)\mathrm{d}x_0. \tag{9.2.8}$$

定义括号中的量为初始条件的影响函数. 它表明了：在位置 x 与时间 t 处的温度是由于 x_0 处的初始温度. 要得到温度 $u(x, t)$，就要将所有可能初始位置的影响加起来(积分).

在进一步解释这个结果之前，对更一般的有源且仍带齐次边界条件的热传导方程做类似分析是有益的：

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t)} \tag{9.2.9}$$

381

$$u(0,t) = 0 \tag{9.2.10}$$

$$u(L,t) = 0 \tag{9.2.11}$$

$$u(x,0) = g(x). \tag{9.2.12}$$

这个非齐次问题适于用特征函数展开法求解，

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{9.2.13}$$

由于 $\sin n\pi x/L$ 与 $u(x, t)$ 满足相同的齐次边界条件，其傅里叶正弦级数可以逐项微分. 因而 $a_n(t)$ 满足下列一阶常微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}a_n}{\mathrm{d}t} + k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 a_n = q_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L Q(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x, \tag{9.2.14}$$

其中 $q_n(t)$ 是 $Q(x, t)$ 的傅里叶正弦级数的系数，

$$Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{9.2.15}$$

(9.2.14)的解(用积分因子 $\mathrm{e}^{k(n\pi/L)^2 t}$)是

$$a_n(t) = a_n(0)\mathrm{e}^{-k(n\pi/L)^2 t} + \mathrm{e}^{-k(n\pi/L)^2 t}\int_0^t q_n(t_0)\mathrm{e}^{k(n\pi/L)^2 t_0}\mathrm{d}t_0. \tag{9.2.16}$$

$a_n(0)$ 是初始条件 $u(x, 0) = g(x)$ 的正弦级数的系数：

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)\sin\frac{n\pi x}{L} \tag{9.2.17}$$

$$a_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x. \tag{9.2.18}$$

消去这些傅里叶系数可得

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{L}\int_0^L g(x_0)\sin\frac{n\pi x_0}{L}\mathrm{d}x_0\right)\mathrm{e}^{-k(n\pi/L)^2 t}\right.$$
$$\left. + \mathrm{e}^{-k(n\pi/L)^2 t}\int_0^t\left(\frac{2}{L}\int_0^L Q(x_0,t_0)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x_0\right)\mathrm{e}^{k(n\pi/L)^2 t_0}\mathrm{d}t_0\right]\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

交换了无穷求和与(对 x_0 与 t_0)积分的次序后，可得

$$u(x,t) = \int_0^L g(x_0)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{L}\sin\frac{n\pi x_0}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{e}^{-k(n\pi/L)^2 t}\right)\mathrm{d}x_0$$
$$+ \int_0^L\int_0^t Q(x_0,t_0)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{L}\sin\frac{n\pi x_0}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{e}^{-k(n\pi/L)^2(t-t_0)}\right)\mathrm{d}t_0\mathrm{d}x_0.$$

382

因此引入格林函数 $G(x, t; x_0, t_0)$，

$$G(x,t;x_0,t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L}\sin\frac{n\pi x_0}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{e}^{-k(n\pi/L)^2(t-t_0)}. \tag{9.2.19}$$

这就证明了

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^L g(x_0)G(x,t;x_0,0)\,\mathrm{d}x_0 \\ &\quad + \int_0^L\int_0^t Q(x_0,t_0)G(x,t;x_0,t_0)\,\mathrm{d}t_0\mathrm{d}x_0. \end{aligned} \tag{9.2.20}$$

在 $t_0=0$ 的格林函数 $G(x,\ t;\ x_0,\ 0)$ 表示了位于 x_0 处的初始温度对位于 x 的温度，在时刻 t 的影响. 另外，$G(x,\ t;\ x_0,\ t_0)$ 表示了时刻 t_0，位于 x_0 的强制项 $Q(x_0,\ t_0)$ 对位置 x 的温度，在时刻 t 的影响. 注意：格林函数仅仅依赖经过时间 $t-t_0$，而不是独立地依赖源时刻 t_0 与响应时刻 t：

$$G(x,t;x_0,t_0) = G(x,t-t_0;x_0,0).$$

这是由于热传导方程的系数并不随时间变化；也就是热物理学定律不随时间变化. 格林函数随经过时间 $(t-t_0)$ 依指数衰减(见 9.2.19). 例如，这意味着在时刻 t_0 热源的影响消失得很快. 而在时刻 t，只有最近一段时刻的热源是重要的.

如果时间 t 大，方程(9.2.19)是格林函数的一个极其有用的表达式. 而当 t 小时，该级数收敛得很慢. 在第 11 章中，将得到格林函数对小 t 的另外一个表示.

(9.2.20)对所有位置 x_0 作了积分. 解就是把源和初始温度的所有影响加起来的结果. 也对源在所有过去的时刻 $0<t_0<t$ 作积分. 这是因果律原理的一部分. 时刻 t 的温度仅是由于在时刻 t 前作用的热源. 任何将来的热源都不影响现在的温度.

下面是以后对这个和其他问题要研究的课题：

1. 有获得格林函数的更直接方法吗？
2. 格林函数还有更简单的表达式吗((9.2.19)能简化吗)？
3. 能够解释初始条件影响与强制项影响之间的关系吗？
4. 能够很容易地解释非齐次边界条件吗？ 383

习题 9.2

9.2.1 考虑

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t)$$

$$u(x,0) = g(x).$$

通过引入格林函数，在各种情形下，得到类似(9.2.20)的公式.

(a)使用格林公式而不是对空间变量的逐项微分. 其中

$$u(0,t) = 0 \quad 和 \quad u(L,t) = 0.$$

(b)将(a)的边界条件换成

$$u(0,t) = A(t) \quad 和 \quad u(L,t) = B(t).$$

不要将其化简为齐次边界条件问题.

(c)用任意方法求解，其中

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \quad 和 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0.$$

*(d)用格林公式而非逐项微分，其中

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = A(t) \quad 和 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = B(t).$$

9.2.2 用特征函数展开法求解

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_0\frac{\partial u}{\partial x}\right) + Q(x,t),$$

其中 $u(0,\ t)=0$，$u(L,\ t)=0$，$u(x,\ 0)=g(x)$，$c\rho$ 与 K_0 是 x 的函数. 假设特征函数已知. 通过引入一个格林函数得到类似于(9.2.20)的公式.

*9.2.3 用特征函数展开法求解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t)$$

$$u(0,t) = 0 \qquad u(x,0) = f(x)$$

$$u(L,t) = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x).$$

定义(尽可能简单的)函数，使得存在类似于(9.2.20)的关系. 由于有两个初始条件，所以这个函数一定有所不同. (提示：见习题 8.5.1.)

9.2.4 重做习题 9.2.3(如果必要，用格林公式)，其中边界条件为

(a) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ t)=0$ 且 $\frac{\partial u}{\partial x}(L,\ t)=0$.

(b) $u(0,\ t)=A(t)$ 且 $u(L,\ t)=0$.

(c) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ t)=0$ 且 $\frac{\partial u}{\partial x}(L,\ t)=B(t)$.

384

9.3 常微分方程边值问题的格林函数

9.3.1 一维稳态热传导方程

引言. 研究与时间有关的热传导方程的格林函数不是件容易的事，因而这里先讨论较简单的问题. 讨论中所使用的大多数方法对更难的问题也是适用的.

下面讨论带齐次边界条件的稳态热传导方程，这出现在热源项 $Q(x,\ t)=Q(x)$ 与时间无关的情形：

$$0 = k\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + Q(x).$$

而下面的形式更可取：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = f(x),} \tag{9.3.1}$$

其中 $f(x) = -Q(x)/k$. 要考虑的边界条件为

$$\boxed{u(0) = 0 \quad 和 \quad u(L) = 0.} \tag{9.3.2}$$

为了给求解其他更难的问题提供参考方法，下面要用各种不同的方法来求解这个问题.

非定常问题的极限. 求解(9.3.1)的一种(既非最显然亦非最容易的)方法，是分析前一节得到的非定常问题的解(9.2.20)，在定常源的特殊情况下：

$$u(x,t) = \int_0^L g(x_0)G(x,t;x_0,0)\,\mathrm{d}x_0$$

$$+\int_0^L -kf(x_0)\left(\int_0^t G(x,t;x_0,t_0)\,\mathrm{d}t_0\right)\mathrm{d}x_0, \qquad (9.3.3)$$

其中

$$G(x,t;x_0,t_0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{L}\sin\frac{n\pi x_0}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{e}^{-k(n\pi/L)^2(t-t_0)}. \qquad (9.3.4)$$

$t\to\infty$ 时，$G(x,\ t;\ x_0,\ 0)\to 0$，以至于初始条件 $u(x,\ 0)=g(x)$ 在 $t\to\infty$ 时的影响为0. 不过，即使 $t\to\infty$ 时 $G(x,\ t;\ x_0,\ 0)\to 0$，定常源在 $t\to\infty$ 时仍然重要，这是由于

385

$$\int_0^t \mathrm{e}^{-k(n\pi/L)^2(t-t_0)}\mathrm{d}t_0 = \left.\frac{\mathrm{e}^{-k(n\pi/L)^2(t-t_0)}}{k(n\pi/L)^2}\right|_{t_0=0}^{t} = \frac{1-\mathrm{e}^{-k(n\pi/L)^2 t}}{k(n\pi/L)^2}.$$

因而，$t\to\infty$ 时，

$$u(x,t)\to \boxed{u(x) = \int_0^L f(x_0)G(x,x_0)\,\mathrm{d}x_0,} \qquad (9.3.5)$$

其中

$$\boxed{G(x,x_0) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{L}\frac{\sin n\pi x_0/L\sin n\pi x/L}{(n\pi/L)^2}.} \qquad (9.3.6)$$

这就得到了稳态温度分布 $u(x)$，它是由对有稳态热源 $Q(x)=-kf(x)$ 的非定常问题取 $t\to\infty$ 时的极限得到的. $G(x,\ x_0)$ 是稳态问题的影响或格林函数. 后面会讨论其对称性

$$G(x,x_0) = G(x_0,x).$$

9.3.2 参数变易法

还有求(9.3.1)和(9.3.2)解的更直接方法. 考虑区间 $a<x<b$ 上的更一般的非齐次问题

$$L(u) = f(x), \qquad (9.3.7)$$

满足两个(具有第5章标准形式的)齐次边界条件，L 为施图姆-刘维尔算子：

$$L\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)+q. \qquad (9.3.8)$$

对上一节简单的稳态热传导方程，$p=1$，$q=0$，因而 $L=\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$.

如果已知齐次问题的两个[⊖]解 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$，则非齐次常微分方程总可以通过参数变易法求解. 简要复习一下这个方法. 使用参数变易法时，试图寻找(9.3.7)具有以下形式的特解：

386

$$\boxed{u = v_1\cdot u_1 + v_2\cdot u_2,} \qquad (9.3.9)$$

其中 v_1 与 v_2 是要确定的 x 的函数. 原先的微分方程有一个未知函数，这多余的自由度允许假设，如同 v_1 与 v_2 为常数，$\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ 为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = v_1\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x}+v_2\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x}.$$

由于 v_1 与 v_2 并非常数，这只有在 v_1 与 v_2 产生的变异为0时，

$$\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}x}u_1+\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}x}u_2 = 0$$

才成立. 这样要满足微分方程 $L(u)=f(x)$，又要求

⊖ 实际上，只有一个齐次解是必需的，因为如果已知一个解，便可通过降阶法得到另一个解.

$$\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}x}p\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}x}p\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x}=f(x).$$

参数变易法在这一步给出了未知函数 $\mathrm{d}v_1/\mathrm{d}x$ 与 $\mathrm{d}v_2/\mathrm{d}x$ 的两个线性方程. 于是得到

$$\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}x}=\frac{-fu_2}{p\left(u_1\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x}-u_2\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x}\right)}=\frac{-fu_2}{c} \tag{9.3.10}$$

$$\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}x}=\frac{fu_1}{p\left(u_1\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x}-u_2\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x}\right)}=\frac{fu_1}{c}, \tag{9.3.11}$$

其中

$$c=p\left(u_1\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x}-u_2\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x}\right). \tag{9.3.12}$$

使用下面介绍的朗斯基行列式，可以证明 c 是常数. 常数 c 依赖齐次解 u_1 与 u_2 的选取. $L(u)=f(x)$ 的通解由 $u=u_1v_1+u_2v_2$ 给出，其中 v_1 与 v_2 可通过对(9.3.10)与(9.3.11)积分获得.

朗斯基行列式. 朗斯基行列式 W 定义为

$$W=u_1\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x}-u_2\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x}.$$

它满足初等微分方程

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}=u_1\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}x^2}-u_2\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{\mathrm{d}p/\mathrm{d}x}{p}\left(u_1\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x}-u_2\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x}\right)=-\frac{\mathrm{d}p/\mathrm{d}x}{p}W, \tag{9.3.13}$$

其中用到了齐次解 $L(u_1)=0$ 与 $L(u_2)=0$ 的定义微分方程. 求解(9.3.13)就得到

$$W=\frac{c}{p}\quad 或 \quad pW=c.$$

387

例. 考虑具有条件(9.3.2)的问题(9.3.1)：

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=f(x)\quad 满足 \quad u(0)=0 \quad 和 \quad u(L)=0.$$

对应一般情形(9.3.7)中的 $p=1$，$q=0$. (9.3.1)的两个齐次解为 1 与 x. 然而，为了使计算更容易，取 $u_1(x)$ 为满足边界条件 $u(0)=0$ 的齐次解，$u_2(x)$ 为满足另一个边界条件的齐次解：

$$u_1(x)=x$$

$$u_2(x)=L-x.$$

由 $p=1$，(9.3.12)给出 $c=-L$. 对(9.3.10)与(9.3.11)积分，得到参数变易法($u=u_1v_1+u_2v_2$)所需要的结果

$$v_1(x)=\frac{1}{L}\int_0^x f(x_0)(L-x_0)\mathrm{d}x_0+c_1$$

$$v_2(x)=-\frac{1}{L}\int_0^x f(x_0)x_0\mathrm{d}x_0+c_2,$$

边界条件 $u(0)=0$ 给出 $0=c_2L$，而 $u(L)=0$ 给出

$$0=\int_0^L f(x_0)(L-x_0)\mathrm{d}x_0+c_1L,$$

因而 $v_1(x)=-\frac{1}{L}\int_x^L f(x_0)(L-x_0)\mathrm{d}x_0$. 这样非齐次边值问题的解为

$$u(x) = -\frac{x}{L}\int_x^L f(x_0)(L-x_0)\mathrm{d}x_0 - \frac{L-x}{L}\int_0^x f(x_0)x_0\mathrm{d}x_0. \tag{9.3.14}$$

要把(9.3.14)变换到所要形式

$$\boxed{u(x) = \int_0^L f(x_0)G(x,x_0)\mathrm{d}x_0.} \tag{9.3.15}$$

比较(9.3.14)与(9.3.15)，得到

388

$$\boxed{G(x,x_0) = \begin{cases} \dfrac{-x(L-x_0)}{L} & x < x_0 \\ \dfrac{-x_0(L-x)}{L} & x > x_0. \end{cases}} \tag{9.3.16}$$

在9.3.5节会给出这个解的简要介绍和解释. 尽管有些复杂，但还是能够看出对称性:

$$G(x,x_0) = G(x_0,x).$$

已经求得了稳态热传导方程的两个格林函数(9.3.6)和(9.3.16). 虽然它们表面上很不相同，习题9.3.1要证明它们实际上是相同的. 特别地，(9.3.16)是个分段光滑的(实际上连续的)函数，可以证明其傅里叶正弦级数是(9.3.6).

这个解也可由对(9.3.1)两次积分直接推导出来:

$$u = \int_0^x\left[\int_0^{x_0} f(\bar{x})\mathrm{d}\bar{x}\right]\mathrm{d}x_0 + c_1x + c_2. \tag{9.3.17}$$

在习题9.3.2中，将证明由(9.3.17)可以得到(9.3.16). 证明可以由交换(9.3.17)中的积分顺序或对其作分部积分来完成.

9.3.3 格林函数的特征函数展开法

在第8章，非齐次偏微分方程是通过特征函数展开法求解的. 这里说明如何把同样的思想应用于求解满足两个齐次边界条件的一般施图姆-刘维尔非齐次常微分方程:

$$L(u) = f(x). \tag{9.3.18}$$

这里引入满足同样齐次边界条件的相关特征值问题，

$$L(\phi) = -\lambda\sigma\phi, \tag{9.3.19}$$

其中权函数 σ 是可以任意选取的. 不过，对 $\sigma(x)$ 的选择通常至多只有一种，以便微分方程(9.3.19)是人人熟知的[㊀]. 通过寻找 $u(x)$ 的特征函数的傅里叶级数来求解(9.3.18):

$$\boxed{u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(x).} \tag{9.3.20}$$

由于 $\phi_n(x)$ 与 $u(x)$ 满足同样的齐次边界条件，可对它作两次逐项微分[㊁]:

389

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_nL(\phi_n) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n\lambda_n\sigma\phi_n = f(x),$$

这里用到了(9.3.19). 特征函数(关于权函数 σ)的正交性给出

㊀ 例如，如果 $L = \mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$，取 $\sigma = 1$，得到三角函数；如果 $L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) - \frac{m^2}{x}$，取 $\sigma = x$，可得贝塞尔函数.

㊁ 可以用格林公式来说明这一步的合理性(见8.4节).

$$-a_n\lambda_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n \mathrm{d}x}{\int_a^b \phi_n^2\sigma \mathrm{d}x}. \tag{9.3.21}$$

因而，(交换了积分与求和的次序后)非齐次常微分方程边值问题的解是

$$u(x) = \int_a^b f(x_0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n(x)\phi_n(x_0)}{-\lambda_n\int_a^b \phi_n^2\sigma \mathrm{d}x}\mathrm{d}x_0 = \int_a^b f(x_0)G(x,x_0)\mathrm{d}x_0. \tag{9.3.22}$$

这个问题的格林函数可以用特征函数表示出来：

$$\boxed{G(x,x_0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n(x)\phi_n(x_0)}{-\lambda_n\int_a^b \phi_n^2\sigma \mathrm{d}x}.} \tag{9.3.23}$$

又一次明确地表明了格林函数的对称性．注意分母中出现了特征值 λ_n．如果有一个特征值是 0，格林函数就不存在了，这会在 9.4 节中作出解释．这里假设所有特征值 $\lambda_n \neq 0$.

例．对于边值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = f(x)$$

$$u(0) = 0,\quad u(L) = 0,$$

其相关特征值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} = -\lambda\phi$$

$$\phi(0) = 0,\quad \phi(L) = 0$$

是熟知的．特征值为 $\lambda_n = (n\pi/L)^2$，$n = 1, 2, 3$，相应的特征函数为 $\sin n\pi x/L$．$u(x)$ 的傅里叶正弦级数由(9.3.20)给出．特别地，

$$u(x) = \int_0^L f(x_0)G(x,x_0)\mathrm{d}x_0,$$

其中格林函数的傅里叶正弦级数可从(9.3.23)得到：

$$G(x,x_0) = -\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x/L \sin n\pi x_0/L}{(n\pi/L)^2}$$

与时间相关问题对 $t\to\infty$ 取极限所得的结果(9.3.6)一致.

390

9.3.4 狄拉克 δ 函数及其与格林函数的关系

已经证明了

$$\boxed{u(x) = \int_0^L f(x_0)G(x,x_0)\mathrm{d}x_0,} \tag{9.3.24}$$

其中得到了格林函数的不同表示．格林函数表明热源的每个位置 x_0 对解在 x 处的影响．这一节将寻找导出(9.3.24)的更直接方法，然后再确定格林函数.

狄拉克 δ 函数．源 $f(x)$ 表示了对系统各点的作用，图 9.3.1 是 $f(x)$ 的草图．为了分离出对

每个独立点的影响，将$f(x)$分解成间隔为Δx的单位脉冲的线性组合（如图9.3.2所示）：

$$f(x) \approx \sum_i f(x_i)(\text{开始于 } x = x_i \text{ 的单位脉冲}).$$

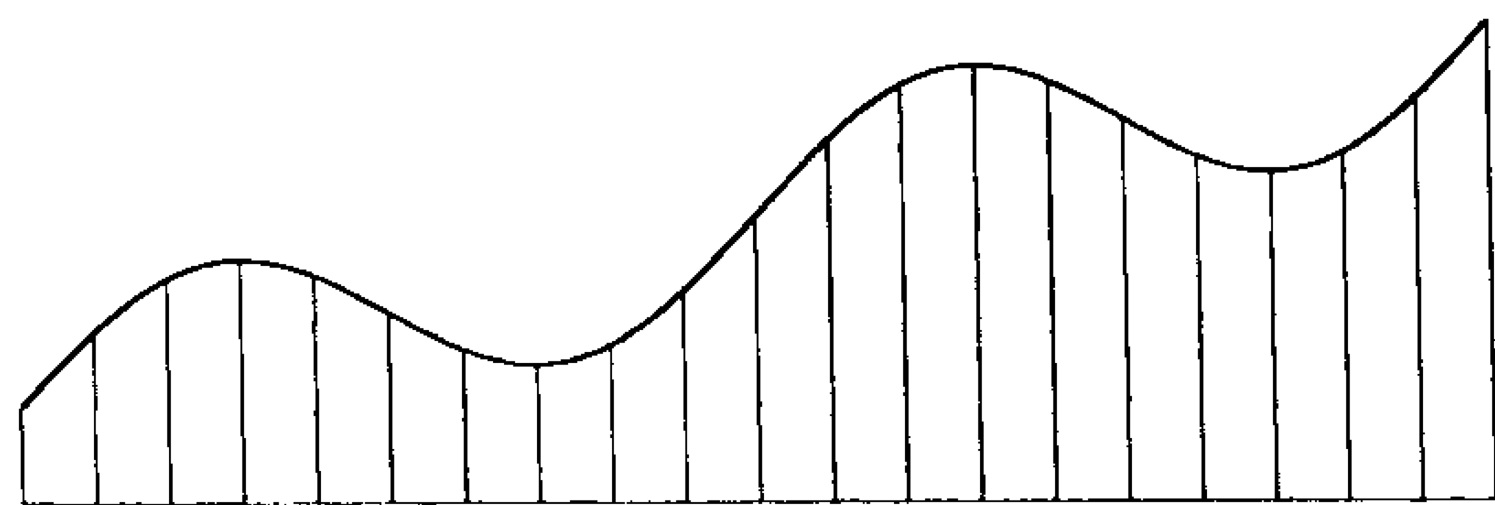


图9.3.1　函数的分段常数表示

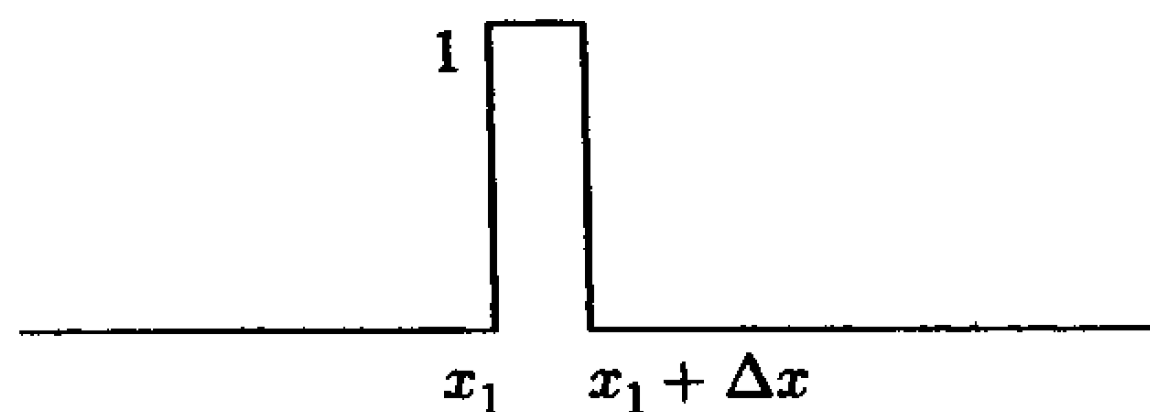


图9.3.2　单位高度脉冲

这个式子有些类似积分的定义，只是丢失了Δx，通过乘以Δx和除以Δx来引入：

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(x_i) \frac{\text{单位脉冲}}{\Delta x} \Delta x. \tag{9.3.25}$$

这就启示引入了如图9.3.3所示的矩形脉冲：其宽度为Δx，高度为$1/\Delta x$，具有单位面积. 当[391] $\Delta x \to 0$时，极限趋向于无限集中的脉冲（不是真的函数）$\delta(x-x_i)$，除在$x=x_i$为∞外，处处为0，仍然具有单位面积：

$$\delta(x - x_i) = \begin{cases} 0 & x \neq x_i \\ \infty & x = x_i. \end{cases} \tag{9.3.26}$$

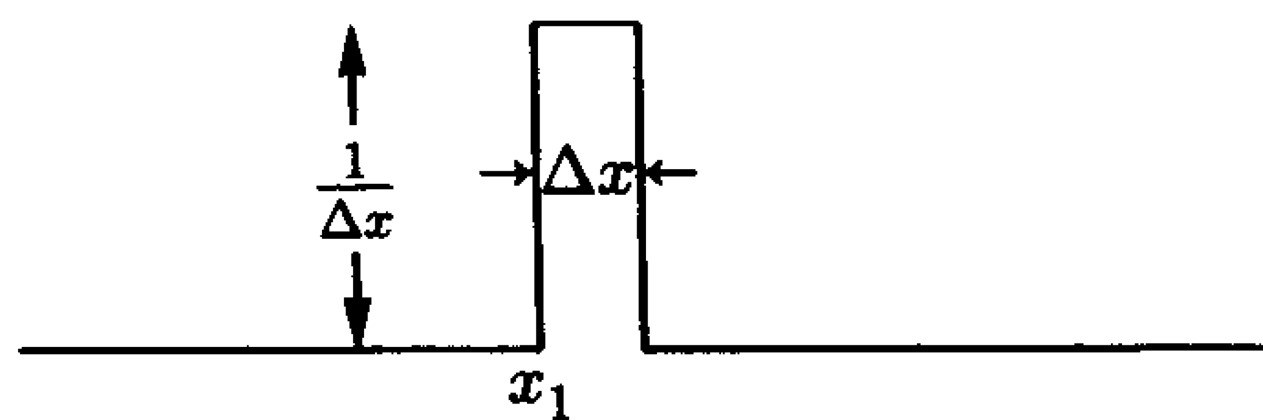


图9.3.3　单位面积的矩形脉冲

可以把$\delta(x-x_i)$看成$x=x_i$处的集中源或冲激力. 根据(9.3.25)，有

$$f(x) = \int f(x_i)\delta(x - x_i)\,\mathrm{d}x_i. \tag{9.3.27}$$

由于$\delta(x-x_i)$不是函数，把它定义成具有(9.3.27)所述性质的算子，也就是说，对于任何连续的$f(x)$：

$$\boxed{f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_i)\delta(x - x_i)\,\mathrm{d}x_i,} \tag{9.3.28}$$

称$\delta(x-x_i)$为狄拉克δ函数[⊖]. 它集中到了与任何连续函数$f(x_i)$积分时，“筛出”了其在$x_i=x$处的值. 狄拉克δ函数可以由集中脉冲（不一定是矩形脉冲）序列的“极限函数”引入.

狄拉克δ函数其他重要的性质是，它具有单位面积：

$$\boxed{1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_i)\,\mathrm{d}x_i;} \tag{9.3.29}$$

像个偶函数

$$\delta(x - x_i) = \delta(x_i - x). \tag{9.3.30}$$

这意味着使用定义(9.3.28)时，不必担心出现的是$\delta(x-x_i)$还是$\delta(x_i-x)$. 狄拉克δ函数也是[392] 赫维塞德单位阶梯函数$H(x-x_i)$的导数：

⊖ 以20世纪数学物理学家狄拉克（Paul Dirac，1902—1984）命名.

$$H(x-x_i) \equiv \begin{cases} 0 & x < x_i \\ 1 & x > x_i; \end{cases} \tag{9.3.31}$$

$$\delta(x-x_i) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H(x-x_i); \tag{9.3.32}$$

$$H(x-x_i) = \int_{-\infty}^{x}\delta(x_0-x_i)\,\mathrm{d}x_0; \tag{9.3.33}$$

它有以下伸缩性质：

$$\delta[c(x-x_i)] = \frac{1}{|c|}\delta(x-x_i). \tag{9.3.34}$$

这些性质将在习题中证明.

格林函数. 满足两个齐次边界条件的非齐次问题

$$\boxed{L(u) = f(x)} \tag{9.3.35}$$

的解是

$$\boxed{u(x) = \int_a^b f(x_0)G(x,x_0)\,\mathrm{d}x_0.} \tag{9.3.36}$$

这里格林函数是源 $f(x)$ 的影响函数. 例如，假设 $f(x)$ 为 $x=x_s$ 处的集中源，$f(x)=\delta(x-x_s)$. 则由(9.3.28)，在 x 处的响应 $u(x)$ 满足：

$$u(x) = \int_a^b \delta(x_0-x_s)G(x,x_0)\,\mathrm{d}x_0 = G(x,x_s)$$

这就给出了格林函数 $G(x, x_s)$ 的基本解释：它是由 x_s 处的集中源在 x 处引起的响应：

$$\boxed{L[G(x,x_s)] = \delta(x-x_s),} \tag{9.3.37}$$

其中 $G(x, x_s)$ 在 $x=a$ 与 $x=b$ 处也满足同样的齐次边界条件.

下面验证(9.3.36)满足(9.3.35). 为满足(9.3.35)，必须使用算子 L(在简单情形，$L=\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$)：

$$L(u) = \int_a^b f(x_0)L[G(x,x_0)]\,\mathrm{d}x_0 = \int_a^b f(x_0)\delta(x-x_0)\,\mathrm{d}x_0 = f(x),$$

393

其中格林函数的基本性质(9.3.37)和狄拉克 δ 函数的基本性质(9.3.28)都用到了.

通常满足两个齐次边界条件的(9.3.37)被看成是格林函数的独立定义. 这样，就想要导出(9.3.36)，它是以满足(9.3.37)的格林函数表示非齐次问题的解. 导出(9.3.36)的常用方法需要格林公式：

$$\int_a^b [uL(v) - vL(u)]\,\mathrm{d}x = p\left(u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_a^b. \tag{9.3.38}$$

如果设 $v=G(x, x_0)$，由于 $u(x)$ 与 $G(x, x_0)$ 满足同样的齐次边界条件，因此右端为 0. 另外，分别从微分方程(9.3.35)与(9.3.37)得到

$$\int_a^b [u(x)\delta(x-x_0) - G(x,x_0)f(x)]\,\mathrm{d}x = 0.$$

这样，由狄拉克 δ 函数的定义

$$u(x_0) = \int_a^b f(x)G(x,x_0)\,dx.$$

如果交换 x 与 x_0，就得到(9.3.36)：

$$u(x) = \int_a^b f(x_0)G(x_0,x)\,dx_0 = \int_a^b f(x_0)G(x,x_0)\,dx_0, \tag{9.3.39}$$

这是由于已知格林函数是对称的(9.3.16)，$G(x_0, x) = G(x, x_0)$.

麦克斯韦互反性. 格林函数的对称性非常重要. 下面要不用特征函数展开来证明它. 而是直接用其定义微分函数(9.3.37). 再次使用格林公式(9.3.38). 设 $u = G(x, x_1)$, $v = G(x, x_2)$. 由于二者满足同样的齐次边界条件，右端为0. 另外，当 $L(v) = \delta(x - x_2)$ 时 $L(u) = \delta(x - x_1)$，因而

$$\int_a^b [G(x,x_1)\delta(x - x_2) - G(x,x_2)\delta(x - x_1)]\,dx = 0.$$

根据狄拉克 δ 函数的基本性质，得到

$$\boxed{G(x_1,x_2) = G(x_2,x_1),} \tag{9.3.40}$$

这就由定义格林函数的微分方程证明了对称性. 这个对称性是令人瞩目的，称为麦克斯韦互反性. 由 x_0 处的集中源在 x 处引起的响应，与由 x 处的集中源在 x_0 处引起的响应是相同的. 这在物理上并不是显然的.

394

跳跃条件. 格林函数 $G(x, x_s)$ 可以由(9.3.37)确定. 对于 $x < x_s$，$G(x, x_s)$ 一定是在 $x = a$ 处满足齐次边界条件的齐次解. 类似的结论对于 $x > x_s$ 也成立. 跨越 $x = x_s$ 的跳跃条件由(9.3.37)的奇点确定. 如果 $G(x, x_s)$ 在 $x = x_s$ 处有跳跃间断，则 dG/dx 在 $x = x_s$ 处有 δ 函数奇点，而 d^2G/dx^2 比(9.3.37)的右端更奇异. 因而，格林函数 $G(x, x_s)$ 在 $x = x_s$ 处是连续的. 不过，dG/dx 在 $x = x_s$ 处不连续，它有通过对(9.3.37)跨过 $x = x_s$ 积分而得到的跳跃间断性. 在下面的例子中要说明这个方法，进一步的讨论留作习题.

例. 考虑稳态热流问题的解

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{d^2u}{dx^2} = f(x)\\ &u(0) = 0 \quad 和 \quad u(L) = 0.\end{aligned}} \tag{9.3.41}$$

已经证明了这个解可由格林函数表示：

$$\boxed{u(x) = \int_0^L f(x_0)G(x,x_0)\,dx_0,} \tag{9.3.42}$$

其中的格林函数满足下列问题：

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{d^2G(x,x_0)}{dx^2} = \delta(x - x_0)\\ &G(0,x_0) = 0 \quad 和 \quad G(L,x_0) = 0.\end{aligned}} \tag{9.3.43}$$

由微分方程定义格林函数的一个原因是它给出了另一个(常常更简单)计算格林函数的方法. 这里 x_0 是表示集中源位置的参数. 对于 $x \neq x_0$，没有源，因而稳态热分布 $G(x, x_0)$ 一定是线性

的$(d^2G/dx^2=0)$：

$$G(x,x_0)=\begin{cases}a+bx & x<x_0\\ c+dx & x>x_0\end{cases},$$

但这些常数可能是不同的. 对 $x<x_0$ 应用 $x=x_0$ 处的边界条件. $G(0,\ x_0)=0$ 给出 $a=0$. 同样 $G(L,\ x_0)=0$ 给出 $c+dL=0$：

$$G(x,x_0)=\begin{cases}bx & x<x_0\\ d(x-L) & x>x_0.\end{cases}$$

395

这个初步的结果如图 9.3.4 所示.

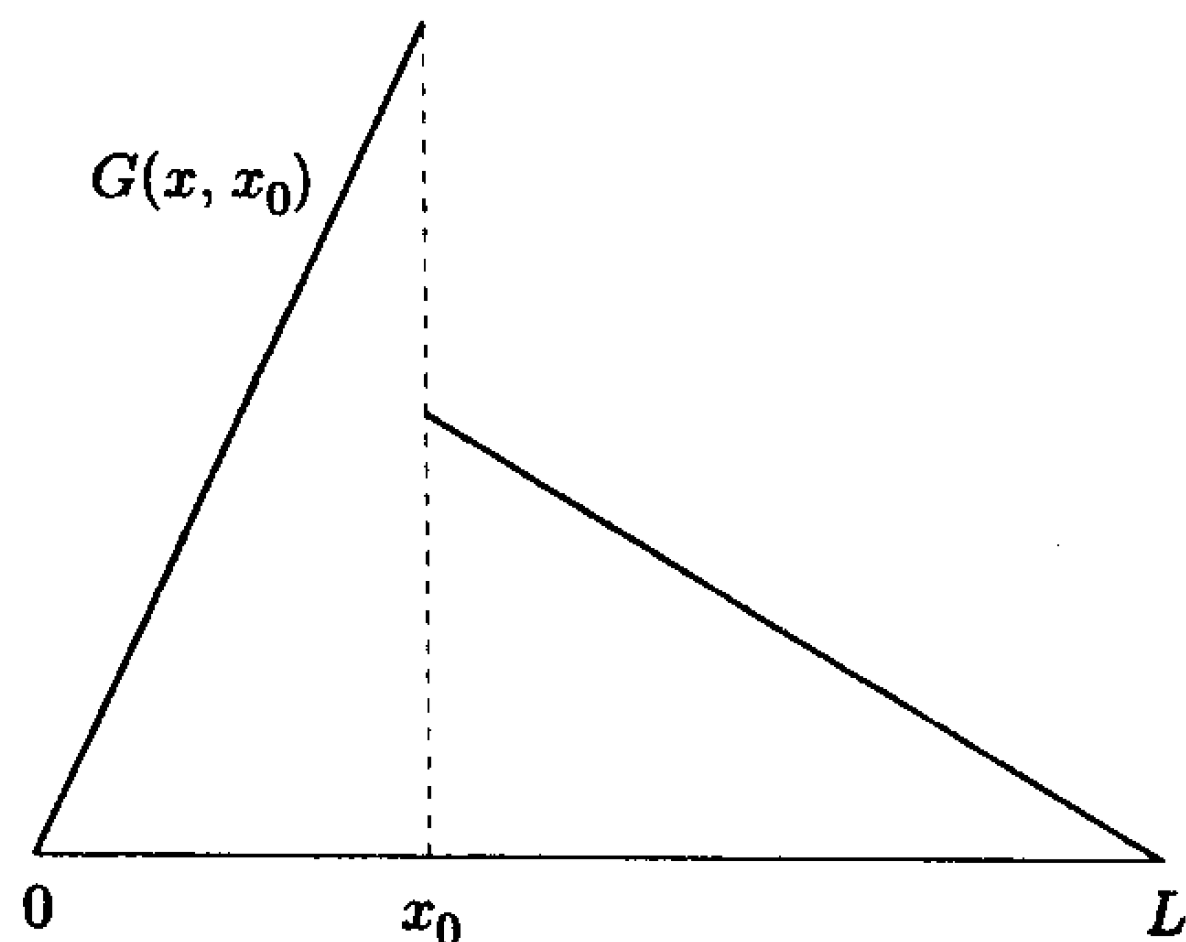


图 9.3.4 在应用 $x=x_0$ 处跳跃条件之前的格林函数

其余的两个常数由 $x=x_0$ 处的两个条件来确定. 温度 $G(x,\ x_0)$ 在 $x=x_0$ 处必须连续,

$$\boxed{G(x_0-,x_0)=G(x_0+,x_0),}\tag{9.3.44}$$

$G(x,\ x_0)$的导数有个跳跃，最容易的推导方式是对定义微分方程(9.4.43)作从 $x=x_0-$ 到 $x=x_0+$ 的积分：

$$\boxed{\left.\frac{dG}{dx}\right|_{x=x_0+}-\left.\frac{dG}{dx}\right|_{x=x_0-}=1.}\tag{9.3.45}$$

方程(9.3.44)给出

$$bx_0=d(x_0-L),$$

而由(9.3.45)可得

$$d-b=1.$$

通过求解这些式子组成的方程组可得

$$d=\frac{x_0}{L}\quad 与\quad b=\frac{x_0-L}{L},$$

因而有

$$\boxed{G(x,x_0)=\begin{cases}-\dfrac{x}{L}(L-x_0) & x<x_0\\[2ex] -\dfrac{x_0}{L}(L-x) & x>x_0,\end{cases}}\tag{9.3.46}$$

396

结果与(9.3.16)一致. 图 9.3.5 给出了这个格林函数的图像. 这个格林函数为负的是由于负的集中热源 $-\delta(x-x_0)$，这由 $0=d^2G/dx^2(x,\ 0)-\delta(x-x_0)$就可以看出.

(前面证明的)格林函数的对称性在所有得到的表示中都是很明显的. 例如，设 $L=1$,

$$G(x,x_0)=\begin{cases}-x(1-x_0) & x<x_0\\ -x_0(1-x) & x>x_0\end{cases}$$

$$与\quad G\left(\frac{1}{2},\frac{1}{5}\right)=G\left(\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{10}.$$

图 9.3.6 是 $G(x,\ 1/5)$与 $G(x,\ 1/2)$的图像. 它们的相等并不能由简单的物理对称性来解释.

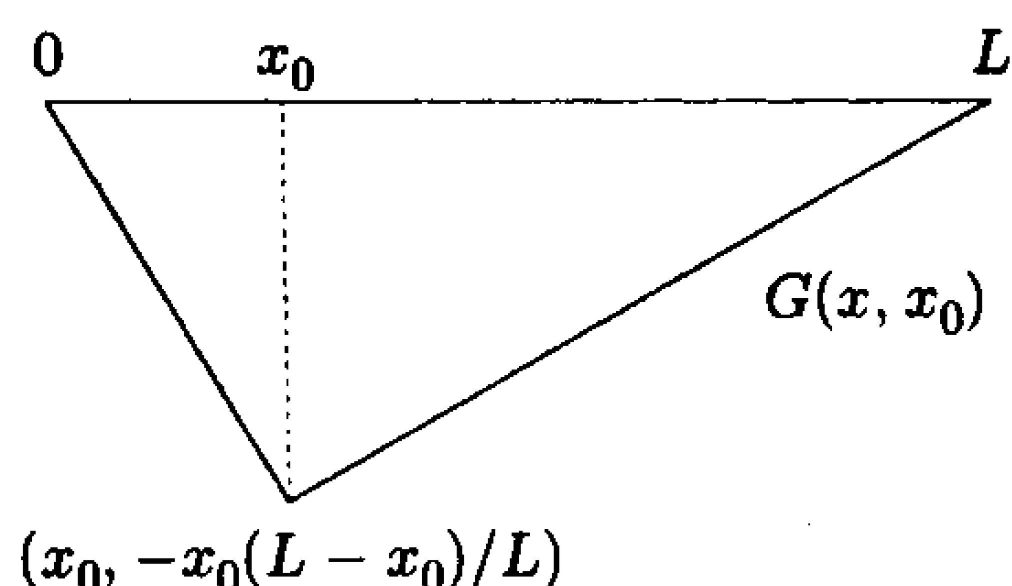


图 9.3.5 格林函数

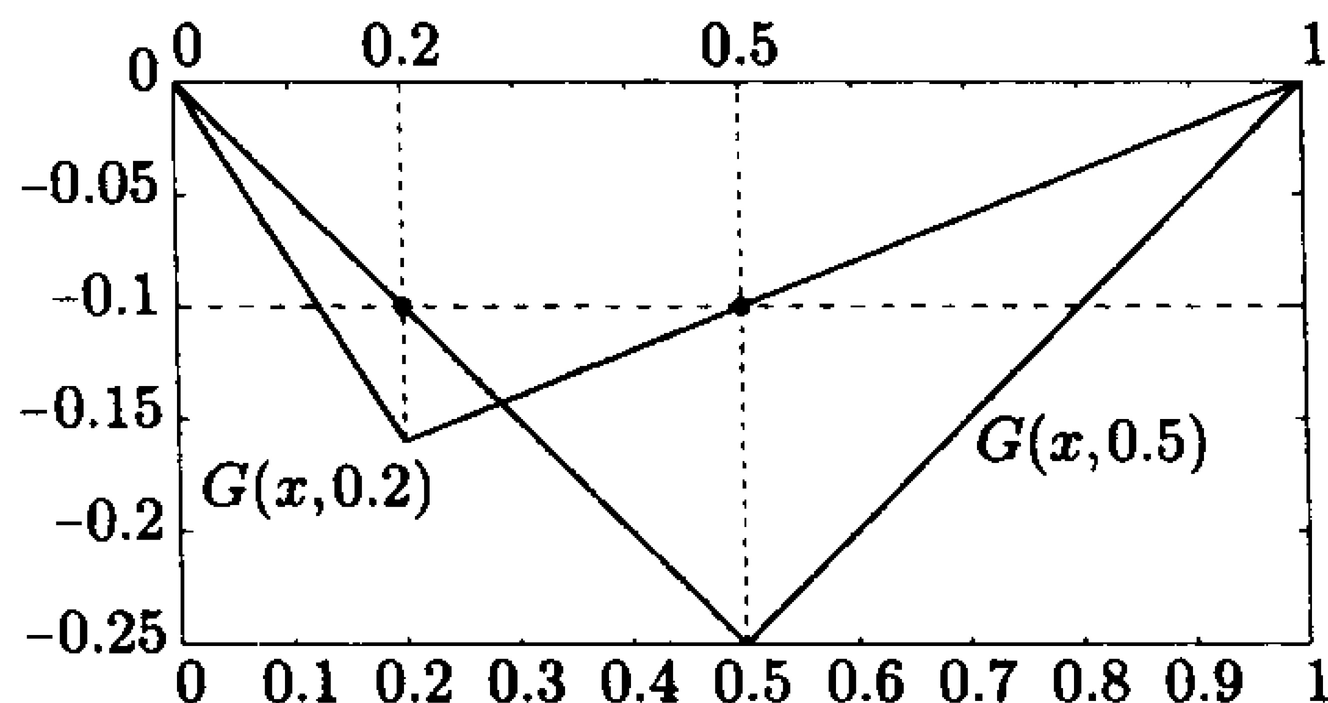


图 9.3.6 麦克斯韦互反性的说明

9.3.5 非齐次边界条件

现在已经证明了如何用格林函数求解带齐次边界条件的非齐次微分方程. 这一小节将把这些想法拓展到带非齐次边界条件的问题:

$$\boxed{\frac{d^2u}{dx^2} = f(x)} \tag{9.3.47}$$

397

$$\boxed{u(0) = \alpha \quad 和 \quad u(L) = \beta.} \tag{9.3.48}$$

仍将使用与前面带齐次边界条件问题相同的格林函数:

$$\boxed{\frac{d^2G}{dx^2} = \delta(x - x_0)} \tag{9.3.49}$$

$$\boxed{G(0,x_0) = 0 \quad 和 \quad G(L,x_0) = 0;} \tag{9.3.50}$$

这里的格林函数总满足相关齐次边界条件.

为了得到满足(9.3.48)的(9.3.47)用格林函数表示的解, 再次利用格林公式, 其中 $v = G(x, x_0)$:

$$\int_0^L \left[u(x)\frac{d^2G(x,x_0)}{dx^2} - G(x,x_0)\frac{d^2u}{dx^2} \right] dx = u\frac{dG(x,x_0)}{dx} - G(x,x_0)\frac{du}{dx}\Big|_0^L.$$

由于 $u(x)$ 不满足齐次边界条件, 现在右侧不为0. 而仅用到问题(9.3.47)~(9.3.48)的定义和格林函数(9.3.49)~(9.3.50), 得到

$$\int_0^L [u(x)\delta(x - x_0) - G(x,x_0)f(x)]dx = u(L)\frac{dG(x,x_0)}{dx}\Big|_{x=L} - u(0)\frac{dG(x,x_0)}{dx}\Big|_{x=0}.$$

对此作类似前面的分析. 用到狄拉克 δ 函数的性质(并倒换 x 与 x_0 的位置)和格林函数的对称性, 就得到

$$\boxed{u(x) = \int_0^L f(x_0)G(x,x_0)dx_0 + \beta\frac{dG(x,x_0)}{dx_0}\Big|_{x_0=L} - \alpha\frac{dG(x,x_0)}{dx_0}\Big|_{x_0=0}.} \tag{9.3.51}$$

这就是通过标准格林函数对非齐次问题(包括非齐次边界条件)解的表示. 要小心计算边界项. 这里已知

$$G(x,x_0)=\begin{cases}-\dfrac{x}{L}(L-x_0) & x<x_0\\ -\dfrac{x_0}{L}(L-x) & x>x_0.\end{cases}$$

因此对格林函数源位置的导数是

$$\frac{\mathrm{d}G(x,x_0)}{\mathrm{d}x_0}=\begin{cases}\dfrac{x}{L} & x<x_0\\ -\left(1-\dfrac{x}{L}\right) & x>x_0.\end{cases}$$

398

计算在端点处的值得到

$$\left.\frac{\mathrm{d}G(x,x_0)}{\mathrm{d}x_0}\right|_{x_0=L}=\frac{x}{L}\quad 与\quad \left.\frac{\mathrm{d}G(x,x_0)}{\mathrm{d}x_0}\right|_{x_0=0}=-\left(1-\frac{x}{L}\right).$$

最后可得

$$u(x)=\int_0^L f(x_0)G(x,x_0)\mathrm{d}x_0+\beta\frac{x}{L}+\alpha\left(1-\frac{x}{L}\right). \tag{9.3.52}$$

这个解是两个解的和，一个是前面求得的(9.3.42)满足齐次边界条件的特解 $\int_0^L f(x_0)G(x,\ x_0)\mathrm{d}x_0$，另一个是满足所要求的两个非齐次边界条件的齐次解 $\beta(x/L)+\alpha(1-x/L)$.

9.3.6 小结

这里介绍了求格林函数的三种基本方法：

1. 参数变易法.
2. 特征函数展开法.
3. 利用格林函数的微分方程定义.

另外，稳态格林函数还能通过对定常源问题的解，取 $t\to\infty$ 时的极限求得. 为了求得偏微分方程的格林函数，还将在9.5节介绍另外一种重要方法.

习题 9.3

9.3.1 (9.3.16)显式给出了(9.3.1)的格林函数. 特征函数展开法给出了(9.3.6). 证明：(9.3.16)的傅里叶正弦级数给出(9.3.6).

9.3.2 (a)导出(9.3.17).

(b)由对(9.3.17)分部积分导出(9.3.16).

(c)不用(b)，通过交换积分顺序，由简化(9.3.17)的二重积分导出(9.3.16).

9.3.3 考虑

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Q(x,t),$$

满足

$$u(0,t)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0\quad 与\quad u(x,0)=g(x).$$

(a)由特征函数展开法求解. (b)确定这个与时间相关问题的格林函数.

399

(c)如果 $Q(x,\ t)=Q(x)$，取(b)在 $t\to\infty$ 时的极限来确定下列问题的格林函数：

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=f(x)\quad 满足\quad u(0)=0\quad 与\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(L)=0.$$

9.3.4 (a)从(9.3.28)导出(9.3.29).(提示：取$f(x)=1$.)

(b)证明(9.3.33)满足(9.3.31).

(c)导出(9.3.30).

(提示：通过在右侧积分中设$x_0-x=s$，证明对任何连续的$f(x)$有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0)\delta(x-x_0)\,dx_0=\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0)\delta(x_0-x)\,dx_0.)$$

(d)导出(9.3.34).(提示：通过变量代换$y=c(x-x_0)$计算$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta[c(x-x_0)]\,dx$.)

9.3.5 考虑

$$\frac{d^2u}{dx^2}=f(x) \quad 满足 \quad u(0)=0 \quad 及 \quad \frac{du}{dx}(L)=0.$$

*(a)通过直接积分求解.

*(b)通过参数变易法求解.

*(c)确定满足(9.3.15)的$G(x, x_0)$.

(d)通过特征函数展开法求解.并证明$G(x, x_0)$满足(9.3.23).

9.3.6 考虑

$$\frac{d^2G}{dx^2}=\delta(x-x_0) \quad 满足 \quad G(0,x_0)=0 \quad 及 \quad \frac{dG}{dx}(L,x_0)=0.$$

*(a)直接求解.

*(b)画图说明$G(x, x_0)=G(x_0, x)$.

(c)与习题9.3.5进行对比.

9.3.7 重做习题9.3.5，条件如下改变：$\frac{du}{dx}(L)+hu(L)=0$，$h>0$.

9.3.8 重做习题9.3.6，条件如下改变：$\frac{dG}{dx}(L)+hG(L)=0$，$h>0$.

9.3.9 考虑

$$\frac{d^2u}{dx^2}+u=f(x) \quad 满足 \quad u(0)=0 \quad 及 \quad u(L)=0.$$

400

假设$(n\pi/L)^2\neq 1$(即对任意的n，$L\neq n\pi$).

(a)通过参数变易法求解.

*(b)确定格林函数，以使$u(x)$可用它来表示(参看(9.3.15)).

9.3.10 用特征函数展开法求解习题9.3.9中的问题.

9.3.11 考虑

$$\frac{d^2G}{dx^2}+G=\delta(x-x_0) \quad 满足 \quad G(0,x_0)=0 \quad 及 \quad G(L,x_0)=0.$$

*(a)直接解出格林函数.为什么假设$L\neq n\pi$是必要的?

(b)证明$G(x, x_0)=G(x_0, x)$.

9.3.12 对于下列问题，求解的格林函数表示.并证明使用微分方程的齐次解也能说明非齐次边界条件：

(a)$\frac{d^2u}{dx^2}=f(x)$，$u(0)=A$，$\frac{du}{dx}(L)=B$.(见习题9.3.6.)

(b)$\frac{d^2u}{dx^2}+u=f(x)$，$u(0)=A$，$u(L)=B$.假设$L\neq n\pi$.(见习题9.3.11.)

(c)$\frac{d^2u}{dx^2}=f(x)$，$u(0)=A$，$\frac{du}{dx}(L)+hu(L)=0$.(见习题9.3.8.)

9.3.13 考虑具有频率为ω的周期源的一维无限空间波动方程：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}. \tag{9.3.53}$$

(a)证明(9.3.53)有特解 $\phi = u(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，其中 u 满足非齐次亥姆霍兹方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + k^2 u = f(x).$$

*(b)格林函数 $G(x, x_0)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}x^2} + k^2 G = \delta(x - x_0).$$

确定这个无限空间格林函数，使得对应的 $\phi(x, t)$ 是外向传播波.

(c)确定(9.3.53)的一个特解.

401

9.3.14 考虑 $L(u) = f(x)$，其中 $L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + q$. 假设有适当的格林函数. 确定 $u(x)$ 的格林函数表示，其中边界条件是非齐次的：

(a) $u(0) = \alpha$ 且 $u(L) = \beta$.

(b) $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(0) = \alpha$ 且 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(L) = \beta$.

(c) $u(0) = \alpha$ 且 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(L) = \beta$.

*(d) $u(0) = \alpha$ 且 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(L) + hu(L) = \beta$.

9.3.15 考虑 $L(G) = \delta(x - x_0)$，其中 $L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + q$，满足边界条件 $G(0, x_0) = 0$ 和 $G(L, x_0) = 0$. 对 x，引入两个齐次解 y_1 与 y_2，分别满足：

$$\begin{aligned} L(y_1) &= 0 & L(y_2) &= 0 \\ y_1(0) &= 0 & y_2(L) &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}(0) &= 1 & \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}(L) &= 1. \end{aligned}$$

即使 y_1 与 y_2 不能显式求得，也易于用计算机对两个初值问题求数值解. 任何齐次解都是两者的线性组合.

*(a)用 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 求得 $G(x, x_0)$. 可以假设 $y_1(x) \neq c y_2(x)$.

(b)如果对于所有 x，$y_1(x) = c y_2(x)$，那么会发生什么问题?

9.3.16 重新考虑(9.3.41)，已求得它的解(9.3.46). 对于(9.3.41)，习题 9.3.15 中的 y_1 与 y_2 意味着什么? 证明对(9.3.41)而言习题 9.3.15 求得的 $G(x, x_0)$ 化简为(9.3.46).

9.3.17 考虑 $L(u) = f(x)$，它满足

$$L(u) = f(x) \quad 其中 \quad L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + q$$

$$u(0) = 0 \quad 和 \quad u(L) = 0.$$

与习题 9.3.15 一样，引入两个齐次解 y_1 与 y_2.

(a)使用参数变易法确定 $u(x)$.

(b)从(a)确定格林函数.

(c)与习题 9.3.15 进行比较.

9.3.18 重新考虑习题(9.3.17). 通过特征函数展开法确定 $u(x)$. 证明格林函数满足(9.3.23).

402

9.3.19 (a)如果一个集中源被置于某个模式(特征函数)的结点上，证明该模式响应的振幅为 0. (提示：利用特征函数展开法的结果，并且注意特征函数的结点 x^* 是 $\phi_n(x^*) = 0$ 的任何地方.)

(b)如果特征函数是 $\sin n\pi x/L$，则源位于中点 $x_0 = L/2$ 处，证明其响应将没有偶谐波.

9.3.20 直接从定义微分方程(9.3.41)导出格林函数(9.3.23)的特征函数展开，这里设

$$G(x, x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x).$$

并假设可以逐项微分.

*9.3.21 求解

$$\frac{dG}{dx}=\delta(x-x_0) \quad 其中 \quad G(0,x_0)=0.$$

证明：虽然 $\delta(x-x_0)$ 为对称的，但 $G(x, x_0)$ 不是.

9.3.22 求解

$$\frac{dG}{dx}+G=\delta(x-x_0) \quad 其中 \quad G(0,x_0)=0.$$

证明：虽然 $\delta(x-x_0)$ 为对称的，但 $G(x, x_0)$ 不是.

9.3.23 求解

$$\frac{d^4G}{dx^4}=\delta(x-x_0)$$

$$G(0,x_0)=0 \quad G(L,x_0)=0$$

$$\frac{dG}{dx}(0,x_0)=0 \quad \frac{d^2G}{dx^2}(L,x_0)=0.$$

9.3.24 利用习题9.3.23求解

$$\frac{d^4u}{dx^4}=f(x)$$

$$u(0)=0 \quad u(L)=0$$

$$\frac{du}{dx}(0)=0 \quad \frac{d^2u}{dx^2}(L)=0.$$

（提示：参考习题5.5.8.）

9.3.25 使用拉普拉斯变换的卷积定理来求下列方程的特解：

403

(a) $\frac{d^2u}{dx^2}=f(x)$.（见习题9.3.5.） *(b) $\frac{d^4u}{dx^4}=f(x)$.（见习题9.3.24.）

9.3.26 求满足 $\frac{d^2G}{dx^2}-G=\delta(x-x_0)$ 的格林函数：

(a) 直接在区间 $0<x<L$ 上求解，其中 $G(0, x_0)=0$，$G(L, x_0)=0$.

(b) 直接在区间 $0<x<L$ 上求解，其中 $G(0, x_0)=0$，$\frac{dG}{dx}(L, x_0)=0$.

(c) 直接在区间 $0<x<L$ 上求解，其中 $\frac{dG}{dx}(0, x_0)=0$，$\frac{dG}{dx}(L, x_0)=0$.

(d) 直接在区间 $0<x<\infty$ 上求解，其中 $G(0, x_0)=0$.

(e) 直接在区间 $0<x<\infty$ 上求解，其中 $\frac{dG}{dx}(0, x_0)=0$.

(f) 直接在区间 $-\infty<x<\infty$ 上求解.

9.3节附录：含狄拉克 δ 函数的格林公式的证明

在分析格林函数时，格林公式非常重要. 但导出格林公式要用到分部积分. 下面证明格林公式

$$\int_a^b [uL(v)-vL(u)]dx = p\left(u\frac{dv}{dx}-v\frac{du}{dx}\right)\Big|_a^b, 其中\ L=\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right)+q \tag{9.3.54}$$

成立，即便 v 是一个格林函数，

$$L(v)=\delta(x-x_0). \tag{9.3.55}$$

要导出(9.3.54). 先计算其左边. 由于在 $x=x_0$ 处有奇点，不能保证(9.3.54)成立. 因此将该

区域分为三个部分：

$$\int_a^b = \int_a^{x_{0-}} + \int_{x_{0-}}^{x_{0+}} + \int_{x_{0+}}^b .$$

在排除了奇点的区域 $a \leqslant x \leqslant x_{0-}$ 和 $x_{0+} \leqslant x \leqslant b$ 内，可以使用格林公式. 另外，狄拉克 δ 函数具有性质

$$\int_{x_{0-}}^{x_{0+}} [uL(v) - vL(u)]\mathrm{d}x = \int_{x_{0-}}^{x_{0+}} [u\delta(x - x_0) - vL(u)]\mathrm{d}x = u(x_0),$$

因为 $\int_{x_{0-}}^{x_{0+}} vL(u)\mathrm{d}x = 0$. 因而得到

$$\begin{aligned}\int_a^b [uL(v) - vL(u)]\mathrm{d}x &= p\left(u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\Bigg|_a^{x_{0-}} + p\left(u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\Bigg|_{x_{0+}}^b + u(x_0) \\ &= p\left(u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\Bigg|_a^b + p\left(u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\Bigg|_{x_{0+}}^{x_{0-}} + u(x_0).\end{aligned} \tag{9.3.56}$$

404

由于 u，$\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ 与 v 在 $x = x_0$ 处都连续，因此有

$$p\left(u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\Bigg|_{x_{0+}}^{x_{0-}} = p(x_0)u(x_0)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\Bigg|_{x_{0+}}^{x_{0-}}$$

然而，对(9.3.55)求积分可知 $p\mathrm{d}v/\mathrm{d}x\big|_{x_{0-}}^{x_{0+}} = 1$. 因而从(9.3.56)得到(9.3.54). 所以即使出现了格林函数，格林公式也还可以用.

9.4 弗雷德霍姆择一性与广义格林函数

9.4.1 概述

如果 $\lambda = 0$ 是特征值，格林函数就不存在. 为了解困难所在，重新检查带齐次边界条件的非齐次问题：

$$L(u) = f(x), \tag{9.4.1}$$

使用特征函数展开法，在上一节得到了

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x), \tag{9.4.2}$$

其中用到了代入

$$-a_n\lambda_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b \phi_n^2 \sigma \mathrm{d}x}. \tag{9.4.3}$$

如果 $\lambda_n = 0$(对于某个 n，常常是最小特征值)，非齐次边值问题可能没有解. 特别地，如果 $\int_a^b f(x)\phi_n(x)\mathrm{d}x \neq 0$，对应特征值 $\lambda_n = 0$ 的特征函数就不满足(9.4.3). 对此需要作进一步的解释.

例. 考虑下列简单的非齐次边值问题：

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} = \mathrm{e}^x \quad 满足 \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(0) = 0 \quad 和 \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(L) = 0. \tag{9.4.4}$$

试图通过对

405

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{x}+c$$

积分来求解(9.4.4). 这两个边界条件不可能都被满足，因为它们是矛盾的：

$$0=1+c$$

$$0=\mathrm{e}^{L}+c.$$

当 $\lambda=0$ 为相关特征值问题($\mathrm{d}^2\phi_n/\mathrm{d}x^2=-\lambda_n\phi_n$ 满足 $\mathrm{d}\phi_n/\mathrm{d}x(0)=0$ 及 $\mathrm{d}\phi_n/\mathrm{d}x(L)=0$)的特征值时，不能保证非齐次边值问题一定有解.

从物理角度来看，这个例子就是要寻求平衡温度分布. 由于有源和绝热类型的边界条件，仅当不存在热能的净输入时，才存在平衡温度：

$$\int_0^L \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=0,$$

而这是不成立的. 由于持续地消除热能，就不可能有平衡($0=\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}x^2-\mathrm{e}^x$).

零特征值. 如果 $\lambda=0$ 是特征值，已经证明可能难于求解满足齐次边界条件的下列问题：

$$L(u)=f(x). \tag{9.4.5}$$

满足相同齐次边界条件的特征函数 ϕ_n 满足

$$L(\phi_n)=-\lambda_n\sigma\phi_n.$$

这样，如果 $\lambda=0$ 是特征值，相应的带相同齐次边界条件的特征函数 $\phi_h(x)$ 满足

$$L(\phi_h)=0. \tag{9.4.6}$$

因而 $\phi_h(x)$ 是(9.4.5)的非平凡齐次解. 这很重要：(9.4.5)满足相同齐次边界条件的非平凡齐次解与对应0特征值的特征函数是等价的. 如果不存在(满足相同齐次边界条件的)非平凡齐次解，则 $\lambda=0$ 不是特征值. 如果存在非平凡齐次解，则 $\lambda=0$ 是特征值.

齐次解的概念比0特征值更容易让人理解. 例如，考虑

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+u=\mathrm{e}^x \quad 满足 \quad u(0)=0 \quad 和 \quad u(\pi)=0. \tag{9.4.7}$$

它有齐次解吗？答案是肯定的，$\phi=\sin x$. 然而，说 $\lambda=0$ 是特征值(尽管是)可能会引起一些困惑. (9.4.7)的特征值的定义是

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}+\phi=-\lambda\phi \quad 满足 \quad \phi(0)=0 \quad 及 \quad \phi(\pi)=0.$$

最好将其写成 $\mathrm{d}^2\phi/\mathrm{d}x^2+(\lambda+1)\phi=0$. 因而，$\lambda+1=(n\pi/L)^2=n^2$，$n=1, 2, 3, \cdots$，此时很清楚，$\lambda=0$ 是特征值($n=1$).

406

9.4.2 弗雷德霍姆择一性

用特征函数展开法，从(9.4.3)可以得出重要结论. 弗雷德霍姆择一性总结了满足(自伴类型)齐次边界条件的非齐次问题

$$\boxed{L(u)=f(x)} \tag{9.4.8}$$

的这些结果. 下面的结论只有一个成立：

1. $u=0$ 是唯一的齐次解(即 $\lambda=0$ 非特征值)，此时非齐次问题有唯一解.
2. 有非平凡齐次解 $\phi_h(x)$(即 $\lambda=0$ 为特征值)，此时非齐次问题无解或有无穷多个解.

下面更详细地说明如果 $\phi_h(x)$ 是非平凡齐次解，会出现什么情况. 由(9.4.3)，如果

$$\boxed{\int_a^b f(x)\phi_h(x)\,\mathrm{d}x = 0,} \tag{9.4.9}$$

(9.4.8)就有无穷多个解，因为对应的 a_n 是任意的. 这些非唯一解对应于齐次解 $\phi_h(x)$ 的任意倍式. 方程(9.4.9)对应着强制函数与齐次解(关于权函数1)正交. 如果

$$\int_a^b f(x)\phi_h(x)\,\mathrm{d}x \neq 0, \tag{9.4.10}$$

则(带齐次边界条件)非齐次问题无解. 表 9.4.1 说明了这些结果.

表 9.4.1 $L(u)=f(x)$ 带齐次边界条件时解的个数

	个数	$\int_a^b f(x)\phi_h(x)\,\mathrm{d}x$
$\phi_h=0(\lambda\neq 0)$	1	0
$\phi_h\neq 0(\lambda=0)$	∞	0
$\phi_h\neq 0(\lambda=0)$	0	$\neq 0$

407

弗雷德霍姆择一性的另一种表述是：对于带齐次边界条件的非齐次问题(9.4.8)，仅当强制函数与所有齐次解正交时才有解[㊀]. 注意，如果 $u=0$ 是唯一的齐次解，则 $f(x)$ 自然与之(平凡地)正交，因而有解.

弗雷德霍姆择一性的部分结论不用特征函数展开也可以证明. 如果非齐次问题有解，则

$$L(u) = f(x).$$

所有的齐次解 $\phi_h(x)$ 都满足

$$L(\phi_h) = 0.$$

现在取 $v=\phi_h$ 用格林公式，由于 u 与 ϕ_h 满足相同的齐次边界条件，这就得到

$$\int_a^b [u\cdot 0 - \phi_h f(x)]\,\mathrm{d}x = 0 \quad 或 \quad \boxed{\int_a^b f(x)\phi_h(x)\,\mathrm{d}x = 0,}$$

例. 考虑三个例子. 第一个例子，假设

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} = \mathrm{e}^x \quad 满足 \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(0) = 0 \quad 和 \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(L) = 0. \tag{9.4.11}$$

$u=1$ 是齐次解. 根据弗雷德霍姆择一性，仅当 e^x 与该齐次解正交时，(9.4.11)才会有解. 由于 $\int_0^L \mathrm{e}^x\cdot 1\,\mathrm{d}x\neq 0$，所以(9.4.11)无解.

第二个例子，假设

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + 2u = \mathrm{e}^x \quad 其中 \quad u(0) = 0 \quad 及 \quad u(\pi) = 0.$$

由于相应的齐次问题[㊁](除 $u=0$ 外)无解，而弗雷德霍姆择一性表明存在唯一解. 然而，为了求解，必须使用求解非齐次微分方程的标准方法，如待定系数法，参数变易法或特征函数展开

㊀ 这里算子 L 是自伴的. 对非自伴算子，如果强制函数与相应齐次伴随问题的所有解正交，则解存在. (见习题 5.5.11 ~ 5.5.14.)

㊁ 对于 $\mathrm{d}^2\phi/\mathrm{d}x^2+\lambda\phi=0$，其中 $\phi(0)=0$ 与 $\phi(L)=0$，特征值为 $(n\pi/L)^2$. 这里 $2\neq n^2$.

法(用 $\sin nx$).

第三个例子，考虑

408

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\left(\frac{\pi}{L}\right)^2u=\beta+x\quad 其中\quad u(0)=0\quad 及\quad u(L)=0.$$

由于 $\phi=\sin\pi x/L$ 是该齐次问题的一个解，只有其右侧与 $\sin\pi x/L$ 正交时，非齐次问题才有解：

$$0=\int_0^L(\beta+x)\sin\frac{\pi x}{L}dx.$$

这可用于确定使问题有解的唯一 β 值：

$$\beta=\frac{-\int_0^L x\sin\pi x/L dx}{\int_0^L\sin\pi x/L dx}=-\frac{L}{2}.$$

不过，弗雷德霍姆择一性并不能用于实际求解 $u(x)$.

9.4.3　广义格林函数

这一小节将在满足齐次边界条件和 $\lambda=0$ 是特征值的条件下分析

$$\boxed{L(u)=f.}\tag{9.4.12}$$

如果(9.4.12)有解，这里要通过定义与构造一个变形的或广义的格林函数得出(9.4.12)的一个特解.

若 $\lambda=0$ 不是特征值，带齐次边界条件的非齐次边值问题(9.4.12)则有唯一解. 在9.3节中，使用满足

$$L[G(x,x_0)]=\delta(x-x_0)\tag{9.4.13}$$

的格林函数 $G(x,\ x_0)$ 表示这个解，格林函数满足相同的齐次边界条件.

这里分析 $\lambda=0$ 是特征值的情形：存在(9.4.12)的非平凡齐次解 $\phi_h(x)$，$L(\phi_h)=0$. 假设(9.4.12)有解，即

$$\int_a^b f(x)\phi_h(x)dx=0.\tag{9.4.14}$$

然而，由(9.4.10)可得(9.4.13)定义的格林函数对所有 x_0 都不存在，因为对所有 x_0，$\delta(x-x_0)$ 与齐次问题的解不正交：

$$\int_a^b\delta(x-x_0)\phi_h(x)dx=\phi_h(x_0)\neq 0.$$

这里要做的是引入一个简单的有解的对比问题. 因为 $\delta(x-x_0)$ 有在 $\phi_h(x)$"方向上的分量"，所以它与 $\phi_h(x)$ 不正交. 然而，对所有 x_0，如果恰当地选择 c，则对强制函数

409

$$\delta(x-x_0)+c\phi_h(x),$$

(9.4.12)有解. 特别地，容易确定 c，使得这个函数与 $\phi_h(x)$ 正交：

$$0=\int_a^b\phi_h(x)[\delta(x-x_0)+c\phi_h(x)]dx=\phi_h(x_0)+c\int_a^b\phi_h^2(x)dx.$$

这样，就引入了广义格林函数 $G_m(x,\ x_0)$，它满足相同的齐次边界条件和

$$\boxed{L[G_m(x,x_0)]=\delta(x-x_0)-\frac{\phi_h(x)\phi_h(x_0)}{\int_a^b\phi_h^2(x)dx}.}\tag{9.4.15}$$

由于(9.4.15)右侧与 $\phi_h(x)$ 正交，就会有无穷多个解. 习题9.4.9表明广义格林函数可以选为对称的：

$$\boxed{G_m(x,x_0) = G_m(x_0,x).} \tag{9.4.16}$$

如果 $g_m(x, x_0)$ 是一个对称的广义格林函数，则对任意(与 x, x_0 无关的) β，下式也是一个对称的广义格林函数：

$$G_m(x,x_0) = g_m(x,x_0) + \beta\phi_h(x_0)\phi_h(x).$$

因而存在无穷多个对称的广义格林函数. 可以使用其中任意一个.

下面利用格林公式导出用广义格林函数表示 $u(x)$ 的公式. 设 $u=u(x)$, $v=G_m(x, x_0)$，格林公式表明

$$\int_a^b \{u(x)L[G_m(x,x_0)] - G_m(x,x_0)L[u(x)]\}\mathrm{d}x = 0,$$

因为 $u(x)$ 与 $G_m(x, x_0)$ 满足相同的齐次边界条件. 那么定义微分方程(9.4.12)与(9.4.15)给出

$$\int_a^b \left\{u(x)\left[\delta(x-x_0) - \frac{\phi_h(x)\phi_h(x_0)}{\int_a^b \phi_h^2(\bar{x})\,\mathrm{d}\bar{x}}\right] - G_m(x,x_0)f(x)\right\}\mathrm{d}x = 0.$$

由狄拉克 δ 的基本性质(并交换 x 和 x_0 的位置)得到

$$u(x) = \int_a^b f(x_0)G_m(x,x_0)\,\mathrm{d}x_0 + \frac{\phi_h(x)}{\int_a^b \phi_h^2(\bar{x})\,\mathrm{d}\bar{x}}\int_a^b u(x_0)\phi_h(x_0)\,\mathrm{d}x_0,$$

410

其中也用到了 $G_m(x, x_0)$ 的对称性. 这最后的表达式是一个齐次解的倍式，因而(9.4.12)的一个简单特解为

$$\boxed{u(x) = \int_a^b f(x_0)G_m(x,x_0)\,\mathrm{d}x_0,} \tag{9.4.17}$$

与 $u=0$ 不是特征值时的形式一致(见(9.3.36)).

例. 最简单的有非平凡齐次解的问题的例子是

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} = f(x) \tag{9.4.18}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(0) = 0 \quad 和 \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(L) = 0. \tag{9.4.19}$$

常数解是齐次解(对应0特征值的特征函数). 为使有解，由弗雷德霍姆择一性[⊖]，$\int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. 假设 $f(x)$ 满足这个性质(例如 $f(x) = x - L/2$). 由于常值函数是特征函数，广义格林函数 $G_m(x, x_0)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}^2G_m}{\mathrm{d}x^2} = \delta(x-x_0) + c \tag{9.4.20}$$

$$\frac{\mathrm{d}G_m}{\mathrm{d}x}(0) = 0 \quad 和 \quad \frac{\mathrm{d}G_m}{\mathrm{d}x}(L) = 0, \tag{9.4.21}$$

⊖ 从物理上讲，对于绝热边界，要有平衡温度，净热能必须为零.

为了存在这样一个广义格林函数，其右端必须与齐次解正交：

$$\int_0^L [\delta(x-x_0)+c]\mathrm{d}x = 0 \quad 或 \quad c = -\frac{1}{L}.$$

用狄拉克 δ 函数的性质求解满足(9.4.21)的(9.4.20). 对于 $x \neq x_0$，有

$$\frac{\mathrm{d}^2 G_m}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{1}{L}.$$

通过积分得到

$$\frac{\mathrm{d}G_m}{\mathrm{d}x} = \begin{cases} -\dfrac{x}{L} & x < x_0 \\ -\dfrac{x}{L}+1 & x > x_0, \end{cases} \tag{9.4.22}$$

其中要选择积分常数以便满足 $x=0$ 与 $x=L$ 处的边界条件. 由对(9.4.20)积分得到导数 $\left(\mathrm{d}G_m/\mathrm{d}x\Big|_{x_0-}^{x_0+}=1\right)$的跳跃条件，已经为(9.4.22)所满足. 再次积分得到 $G_m(x, x_0)$. 假设

411

$G_m(x, x_0)$在 $x=x_0$ 处连续给出

$$G_m(x,x_0) = \begin{cases} -\dfrac{1}{L}\dfrac{x^2}{2}+x_0+c(x_0) & x < x_0 \\ -\dfrac{1}{L}\dfrac{x^2}{2}+x+c(x_0) & x > x_0. \end{cases}$$

$c(x_0)$是依赖 x_0 的加法常数，对应于齐次解的任意倍式. 这就是所有可能的广义格林函数的表示. 通常希望 $G_m(x, x_0)$是对称的. 例如对于 $x<x_0$，$G_m(x, x_0)=G_m(x_0, x)$给出

$$-\frac{1}{L}\frac{x_0^2}{2}+x_0+c(x) = -\frac{1}{L}\frac{x^2}{2}+x_0+c(x_0)$$

或

$$c(x_0) = -\frac{1}{L}\frac{x_0^2}{2}+\beta,$$

其中 β 是任意常数. 因此最终得到了广义格林函数，

$$G_m(x,x_0) = \begin{cases} -\dfrac{1}{L}\dfrac{(x^2+x_0^2)}{2}+x_0+\beta & x < x_0 \\ -\dfrac{1}{L}\dfrac{(x^2+x_0^2)}{2}+x+\beta & x > x_0. \end{cases} \tag{9.4.23}$$

(9.4.18)～(9.4.19)的解在前面已由(9.4.17)用 $G_m(x, x_0)$给出了.

另一种广义格林函数. 为了用齐次解求解问题，可以引入满足非齐次边界条件的对比问题. 例如诺伊曼函数 G_a 定义为

$$\frac{\mathrm{d}^2 G_a}{\mathrm{d}x^2} = \delta(x-x_0) \tag{9.4.24}$$

$$\frac{\mathrm{d}G_a}{\mathrm{d}x}(0) = -c \tag{9.4.25}$$

$$\frac{\mathrm{d}G_a}{\mathrm{d}x}(L) = c. \tag{9.4.26}$$

从物理上讲，这表示了在两端热能以每单位时间 c 的速度流入时的单位负热源 $-\delta(x-x_0)$. 因而，从物理上说，只有 $2c=1$ 时，才会有解. 这可以对(9.4.24)求从 $x=0$ 到 $x=L$ 的积分或用格林公式来验证. 这种广义格林函数可用前面求格林函数的类似方法得到. 用这种格林函数，非齐次问题解的表达式能够用格林公式得到(见习题 9.4.12). [412]

习题 9.4

9.4.1 考虑

$$L(u)=f(x) \quad \text{其中} \quad L=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)+q,$$

满足两个齐次边界条件. 所有齐次解 ϕ_h(如果存在)都满足 $L(\phi_h)=0$ 和相同的两个齐次边界条件. 用格林公式证明：如果 $f(x)$ 不是(关于权函数 1)与所有的 $\phi_h(x)$ 正交，则无解.

9.4.2 修改习题 9.4.1 的条件为

$$L(u)=f(x)$$
$$u(0)=\alpha \quad \text{和} \quad u(L)=\beta.$$

*(a)确定解存在的条件.

(b)如果满足了这个条件，用特征函数展开法证明存在无穷多个解.

9.4.3 不用算出 $u(x)$，判断下列问题有多少个解：

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+\gamma u=\sin x.$$

(a)如果 $\gamma=1$ 且 $u(0)=u(\pi)=0$.

*(b)如果 $\gamma=1$ 且 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(0)=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(\pi)=0$.

(c)如果 $\gamma=-1$ 且 $u(0)=u(\pi)=0$.

(d)如果 $\gamma=2$ 且 $u(0)=u(\pi)=0$.

9.4.4 对下面的例子，用待定系数法求微分方程的通解. 求解边值问题，并证明其结果与弗雷德霍姆择一性一致：

(a)方程(9.4.7).

(b)方程(9.4.11).

(c)(9.4.11)后面的例子.

(d)(9.4.11)后面的第二个例子.

9.4.5 是否存在 β 的值使得下列问题有解？

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+u=\beta+x$$

$$u(-\pi)=u(\pi) \quad \text{与} \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(-\pi)=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(\pi).$$

[413]

*9.4.6 考虑

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+u=1.$$

(a)求微分方程的通解. 确定满足 $u(0)=u(\pi)=0$ 的所有解. 试问弗雷德霍姆择一性与所得结果一致吗？

(b)重做(a)，如果 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(0)=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(\pi)=0$.

(c)重做(a)，如果 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(-\pi)=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(\pi)$ 且 $u(-\pi)=u(\pi)$.

9.4.7 考虑

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+4u=\cos x$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(0)=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(\pi)=0.$$

(a)确定所有解.（提示：微分方程有形式为 $u_p = A\cos x$ 的特解.）

(b)利用特征函数展开法确定所有解.

(c)应用弗雷德霍姆择一性. 那么它与(a)和(b)一致吗？

9.4.8 考虑

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = \cos x,$$

它有形式为 $u_p = Ax\sin x$ 的特解.

*(a)假设 $u(0) = u(\pi) = 0$，试显式求出所有解. 该结果与弗雷德霍姆择一性一致吗？

(b)回答与(a)同样的问题，如果 $u(-\pi) = u(\pi)$，$\frac{du}{dx}(-\pi) = \frac{du}{dx}(\pi)$.

9.4.9 (a)由于(9.4.15)(带齐次边界条件)可解，它就有无穷多个解. 假设 $g_m(x, x_0)$ 就是一个与 $\phi_h(x)$ 不正交的解，证明存在唯一的与 $\phi_h(x)$ 正交的广义格林函数 $G_m(x, x_0)$.

(b)假设 $G_m(x, x_0)$ 是与 $\phi_h(x)$ 正交的广义格林函数，证明 $G_m(x, x_0)$ 是对称的.（提示：应用具有 $G_m(x, x_1)$ 与 $G_m(x, x_2)$ 的格林公式.）

*9.4.10 确定用于求解下列问题的广义格林函数：

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = f(x)$$

$$u(0) = \alpha \quad 与 \quad u(\pi) = \beta.$$

414 假设 $f(x)$ 满足可解性条件(见习题9.4.2). 求解 $u(x)$ 用这个广义格林函数的表示.

9.4.11 考虑

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \quad 满足 \quad \frac{du}{dx}(0) = 0 \quad 及 \quad \frac{du}{dx}(L) = 0.$$

那么不同的广义格林函数可以定义为

$$\frac{d^2G_a}{dx^2} = \delta(x - x_0)$$

$$\frac{dG_a}{dx}(0) = 0$$

$$\frac{dG_a}{dx}(L) = c.$$

*(a)使用数学方法确定 c.

*(b)使用物理方法确定 c.

(c)显式地确定所有可能的 $G_a(x, x_0)$.

*(d)确定所有对称的 $G_a(x, x_0)$.

*(e)用 $G_a(x, x_0)$ 得到解 $u(x)$ 的表示.

9.4.12 另一个广义格林函数(诺伊曼函数)满足

$$\frac{d^2G_a}{dx^2} = \delta(x - x_0)$$

$$\frac{dG_a}{dx}(0) = -c$$

$$\frac{dG_a}{dx}(L) = c,$$

其中已经证明了 $c = \frac{1}{2}$.

(a)确定所有可能的 $G_a(x, x_0)$.

(b)确定所有对称的 $G_a(x, x_0)$.

(c)确定所有与 $\phi_h(x)$ 正交的 $G_a(x, x_0)$.

(d)当下式有解时，β 与 γ 有何关系？

$$\frac{d^2u}{dx^2}=f(x) \quad 满足 \quad \frac{du}{dx}(0)=\beta \quad 与 \quad \frac{du}{dx}(L)=\gamma.$$

在这种情况下，导出解 $u(x)$ 用上面所定义的诺伊曼函数的表示.

9.4.13 考虑 $\frac{d^2u}{dx^2}+u=f(x)$，其中 $u(0)=1$ 与 $u(\pi)=4$. 那么它有多少个解，又如何依赖 $f(x)$？不要求给出 $u(x)$.

9.4.14 考虑 $\frac{d^2u}{dx^2}+u=f(x)$，满足周期性边界条件 $u(-L)=u(L)$ 及 $\frac{du}{dx}(-L)=\frac{du}{dx}(L)$. 注意，$\phi_h=\sin\frac{\pi x}{L}$ 与 $\phi_h=\cos\frac{\pi x}{L}$ 是齐次解.

415

(a) 在什么条件下有解？

(b) 假设广义格林函数满足

$$\frac{d^2G_m}{dx^2}+G_m=\delta(x-x_0)+c_1\cos\frac{\pi x}{L}+c_2\sin\frac{\pi x}{L}$$

并满足周期性边界条件，请问常数 c_1 与 c_2 是什么？不要求算出 $G_m(x, x_0)$.

(c) 假设广义格林函数是对称的. 请导出 $u(x)$ 由 $G_m(x, x_0)$ 的表示.

9.5 泊松方程的格林函数

9.5.1 概述

在 9.3 节与 9.4 节中讨论了施图姆-刘维尔型常微分方程 $L(u)=f$ 的格林函数，其中 $L=d/dx(pd/dx)+q$. 在讨论与时间相关偏微分方程(如热传导方程与波动方程)的格林函数之前，首先分析泊松方程的格林函数——一个定常偏微分方程：

$$L(u)=f, \tag{9.5.1}$$

其中 $L=\nabla^2$ 为拉普拉斯算子. 先假设 u 满足齐次边界条件. 然后再说明如何利用同样的想法求解带非齐次边界条件的问题. 先考虑如图 9.5.1 所示的有限区域. 对无限区域也会做一定深度的讨论.

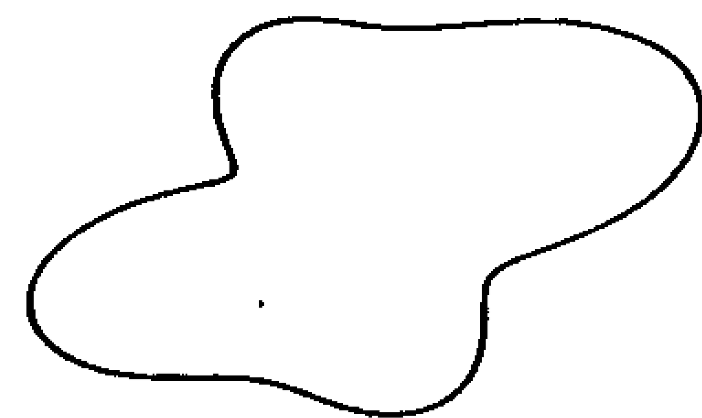


图 9.5.1　有限二维区域

引入一维格林函数是为了求解非齐次施图姆-刘维尔问题. 而关键的联系是由格林公式提供的. 对泊松方程的格林函数分析也非常类似. 下面将频繁地用到二维或三维的拉普拉斯算子的格林公式：

$$\iiint(u\nabla^2v-v\nabla^2u)\,dV=\oiint(u\nabla v-v\nabla u)\cdot\hat{n}\,dS$$

$$\iint(u\nabla^2v-v\nabla^2u)\,dA=\oint(u\nabla v-v\nabla u)\cdot\hat{n}\,ds.$$

416

要指出的是，这些公式对下面要讨论的怪函数也是成立的.

9.5.2 多维狄拉克 δ 函数与格林函数

格林函数定义为满足齐次边界条件的集中源非齐次问题的解. 这里定义二维狄拉克 δ 函数为有单位体积的集中源算子. 它是两个一维狄拉克 δ 函数的积. 如果源集中在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$ ($\boldsymbol{x}=x\hat{i}+y\hat{j}$, $\boldsymbol{x}_0=x_0\hat{i}+y_0\hat{j}$)，则

$$\boxed{\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0).}\tag{9.5.2}$$

三维的想法类似. 这个多维狄拉克 δ 函数基本算子性质的向量或二维分量的形式是

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\,\mathrm{d}A=f(\boldsymbol{x}_0)}\tag{9.5.3}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\,\mathrm{d}A=f(x_0,y_0),}\tag{9.5.4}$$

其中 $f(\boldsymbol{x})=f(x,\ y)$. 下面将使用向量形式.

格林函数. 为了求解在边界上满足齐次条件的非齐次偏微分方程

$$\boxed{\nabla^2u=f(\boldsymbol{x}),}\tag{9.5.5}$$

引入泊松方程满足相同齐次边界条件的格林函数 $G(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}_0)$ ⊖:

$$\boxed{\nabla^2G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0),}\tag{9.5.6}$$

417 这里 $G(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}_0)$ 表示对位于 $\boldsymbol{x}_0$ 处源在 $\boldsymbol{x}$ 处的响应.

用格林函数的表达公式. 在格林公式(其二维形式)中取 $v=G(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}_0)$ 得到

$$\iint(u\,\nabla^2G-G\,\nabla^2u)\,\mathrm{d}A=0,$$

因为 $u(\boldsymbol{x})$ 与 $G(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}_0)$ 都满足相同齐次边界条件, 得到 $\oint(u\,\nabla G-G\,\nabla u)\cdot\hat{n}\mathrm{d}s$ 为0. 由(9.5.5)与(9.5.6)得到

$$u(\boldsymbol{x}_0)=\iint f(\boldsymbol{x})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)\,\mathrm{d}A.$$

对调 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}_0$, 得到

$$u(\boldsymbol{x})=\iint f(\boldsymbol{x}_0)G(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}A_0.$$

下面将证明格林函数是对称的:

$$\boxed{G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)=G(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}),}\tag{9.5.7}$$

因此

$$\boxed{u(\boldsymbol{x})=\iint f(\boldsymbol{x}_0)G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)\,\mathrm{d}A_0.}\tag{9.5.8}$$

这表明了如果已知格林函数, 如何计算出偏微分方程的解.

对称性. 如同一维问题, 为了证明格林函数的对称性, 对 $G(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}_1)$ 和 $G(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}_2)$ 应用格林公式. 由于这两者都满足相同的齐次边界条件, 就有

$$\iint[G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1)\,\nabla^2G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_2)-G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_2)\,\nabla^2G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1)]\,\mathrm{d}A=0.$$

因为 $\nabla^2G(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}_1)=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1)$, $\nabla^2G(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}_2)=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_2)$, 由狄拉克 δ 函数的基本性质得到 $G(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2)=G(\boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_1)$; 因而格林函数是对称的.

⊖ 有时也叫做拉普拉斯方程的格林函数.

9.5.3 用特征函数展开法表示格林函数与弗雷德霍姆择一性

在有限区域上求解带齐次边界条件的泊松方程

$$\boxed{\nabla^2 u = f(x)} \tag{9.5.9}$$

418

的一个方法是利用特征函数展开. 考虑满足相同齐次边界条件的相关特征函数$\nabla^2\phi = -\lambda\phi$. 假设已知特征值 λ 和对应的特征函数 $\phi_\lambda(x)$. 矩形或圆形区域就是这样的简单例子. 用 $u(x)$ 的特征函数展开

$$u(x) = \sum_\lambda a_\lambda \phi_\lambda(x) \tag{9.5.10}$$

求解. 由于 $u(x)$ 与 $\phi_\lambda(x)$ 可以求解相同的齐次边界条件, 因此能做逐项微分:

$$f = \nabla^2 u = \sum_\lambda a_\lambda \nabla^2\phi_\lambda(x) = -\sum_\lambda \lambda a_\lambda \phi_\lambda(x).$$

这点可以用格林公式验证. 由 $\phi_\lambda(x)$ 的多维正交性得到

$$-\lambda a_\lambda = \frac{\iint f(x_0)\phi_\lambda(x_0)\,\mathrm{d}A_0}{\iint \phi_\lambda^2\,\mathrm{d}A}. \tag{9.5.11}$$

如果 $\lambda=0$ 不是特征值, 就可以确定 a_λ. 在交换了 $\sum\limits_\lambda$ 与$\iint$ 顺序后, 由(9.5.10)得到解 $u(x)$ 的表示:

$$\boxed{u(x) = \iint f(x_0)G(x,x_0)\,\mathrm{d}A_0,} \tag{9.5.12}$$

其中格林函数的特征函数展开是

$$\boxed{G(x,x_0) = \sum_\lambda \frac{\phi_\lambda(x)\phi_\lambda(x_0)}{-\lambda\iint\phi_\lambda^2\,\mathrm{d}A}.} \tag{9.5.13}$$

这是一维(常微分方程)非齐次施图姆-刘维尔边值问题格林函数的自然推广(参见 9.3.3 节).

例. 对零边界条件的矩形区域 $0<x<L$, $0<y<H$, 有(见第 7 章)特征值 $\lambda_{nm}=(n\pi/L)^2+(m\pi/H)^2$ ($n=1, 2, 3, \cdots, m=1, 2, 3, \cdots$) 对应的特征函数 $\phi_\lambda(x)=\sin n\pi x/L \sin m\pi y/H$. 此时正规化常数 $\iint\phi_\lambda^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = L/2\cdot H/2$. 格林函数可展成这些特征函数的级数, 即关于 x 与 y 的傅里叶正弦级数,

$$G(x,x_0) = \frac{-4}{LH}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x/L \sin m\pi y/H \sin n\pi x_0/L \sin m\pi y_0/H}{(n\pi/L)^2+(m\pi/H)^2}.$$

在本节和习题 9.5.22(a) 中, 会得到这个格林函数的其他形式.

419

弗雷德霍姆择一性. 在 9.4 节证明了弗雷德霍姆择一性. 若 $\lambda\neq 0$, 带齐次边界条件的非齐次问题(9.5.9)有唯一解. 如同上一节, $\lambda=0$ 为特征值时会发生困难. 此时, 带齐次边界条件的拉普拉斯方程$\nabla^2\phi_h=0$(与泊松方程相关的齐次方程)至少有一个非平凡齐次解 ϕ_h. 由

(9.5.11)，对带齐次边界条件的非齐次边值问题(9.5.9)：

$$\boxed{\text{如果右侧与所有齐次解 } \iint f(x_0)\phi_h(x_0)\,\mathrm{d}A_0 = 0 \text{ 都正交，则存在无穷多解. 由(9.5.11)，对应的 } a_\lambda \text{ 是任意的.}} \tag{9.5.14}$$

$$\boxed{\text{如果 } \iint f(x_0)\phi_h(x_0)\,\mathrm{d}A_0 \neq 0\text{，则无解.}} \tag{9.5.15}$$

例. 如果整个边界是绝热的，$\nabla\phi\cdot\hat{n}=0$，则常值函数 ϕ_h 是 $\nabla^2\phi=0$ 满足边界条件的非平凡解. $\phi_h=1$ 是相应于 $\lambda=0$ 的特征函数. 仅当 $\iint f(x)\,\mathrm{d}A=0$ 时，$\nabla^2 u=f(x)$ 才有解. 从物理上讲，对带绝热边界的稳态热传导方程，产生的净热能必须为0. 这正是9.4节讨论过情形的二维版本. 特别地，可以引入某种广义格林函数(也叫诺伊曼函数). 对此的进一步讨论留作习题. 在本节下面部分，设 $\lambda=0$ 不是特征值.

9.5.4 格林函数的直接解法(一维特征函数)

格林函数也能够通过更直接的方法得到. 考虑在矩形区域带零边界条件泊松方程的格林函数

$$\nabla^2 G(x,x_0) = \delta(x-x_0), \tag{9.5.16}$$

如图9.5.2所示. 这里不用二维特征函数的级数(见9.5.3节)求这个格林函数，而用满足相应边界条件的一维特征函数，x 或 y 的正弦级数. 用 x 的傅里叶正弦级数，

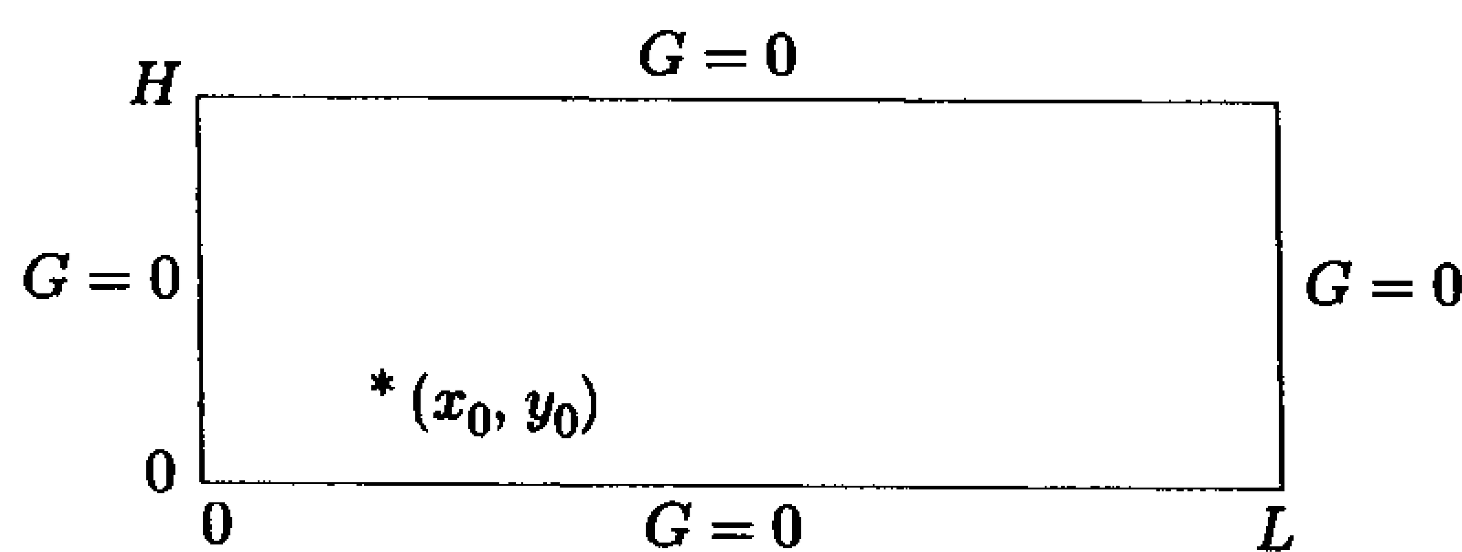


图9.5.2 泊松方程在矩形区域内的格林函数

420

$$G(x,x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(y)\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{9.5.17}$$

将(9.5.17)代入(9.5.16)得(因为 $G(x,\ x_0)$ 与 $\sin n\pi x/L$ 满足相同齐次边界条件)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}^2 a_n}{\mathrm{d}y^2} - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 a_n\right]\sin\frac{n\pi x}{L} = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$$

或

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 a_n}{\mathrm{d}y^2} - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{L}\sin\frac{n\pi x_0}{L}\delta(y-y_0).\end{aligned} \tag{9.5.18}$$

在 $y=0$ 与 $y=H$ 处的边界条件要求傅里叶系数满足相应的边界条件，

$$a_n(0) = 0 \quad \text{和} \quad a_n(H) = 0. \tag{9.5.19}$$

带边界条件(9.5.19)的方程(9.5.18)可以通过 y 的傅里叶正弦级数求解，但这会给出早期的二重正弦级数分析. 另一方面，因为 $a_n(y)$ 的非齐次项是一维狄拉克 δ 函数，就可以按求解格林函数的方式求解(9.5.18). 如果 $y\neq y_0$，微分方程是齐次的. 如果再利用边界条件，就得到

$$a_n(y)=\begin{cases}c_n\sinh\dfrac{n\pi y}{L}\sinh\dfrac{n\pi(y_0-H)}{L} & y<y_0\\ c_n\sinh\dfrac{n\pi(y-H)}{L}\sinh\dfrac{n\pi y_0}{L} & y>y_0,\end{cases}$$

其中在 $y=y_0$ 处的连续性自动得到满足．另外，对(9.5.18)由 y_{0_-} 到 y_{0_+} 积分得到导数的跳跃：

$$\left.\frac{\mathrm{d}a_n}{\mathrm{d}y}\right|_{y_{0-}}^{y_{0+}}=\frac{2}{L}\sin\frac{n\pi x_0}{L}$$

或

$$c_n\frac{n\pi}{L}\left[\sinh\frac{n\pi y_0}{L}\cosh\frac{n\pi(y_0-H)}{L}-\sinh\frac{n\pi(y_0-H)}{L}\cosh\frac{n\pi y_0}{L}\right]=\frac{2}{L}\sin\frac{n\pi x_0}{L}. \tag{9.5.20}$$

421

由双曲函数的加法公式得到

$$c_n=\frac{2\sin n\pi x_0/L}{n\pi\sinh n\pi H/L}.$$

这便得到了格林函数(关于 x 的)傅里叶正弦级数表示：

$$G(x,x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin n\pi x_0/L\sin n\pi x/L}{n\pi\sinh n\pi H/L}\begin{cases}\sinh\dfrac{n\pi(y_0-H)}{L}\sinh\dfrac{n\pi y}{L} & y<y_0\\ \sinh\dfrac{n\pi(y-H)}{L}\sinh\dfrac{n\pi y_0}{L} & y>y_0.\end{cases} \tag{9.5.21}$$

其对称性显而易见．在前一小节这个格林函数表示为 x 和 y 的二重傅里叶正弦级数．

该格林函数的第三种表示也是可能的．即不用 x 的傅里叶正弦级数，而用 y 的傅里叶正弦级数．此处省略这个几乎一样的分析．

9.5.5 用格林函数解带非齐次边界条件的问题

与一维问题一样，在 9.5.2 节至 9.5.4 节中所确定的相同的格林函数，$\nabla^2G=\delta(x-x_0)$ ($G(x,\ x_0)$满足齐次边界条件)，可用于求解满足非齐次边界条件的泊松方程$\nabla^2u=f(x)$．

例如，考虑

$$\boxed{\nabla^2u=f(x),} \tag{9.5.22}$$

在边界上满足

$$\boxed{u=h(x),} \tag{9.5.23}$$

格林函数定义为

$$\boxed{\nabla^2G=\delta(x-x_0),} \tag{9.5.24}$$

在边界上对于 x(x_0 常常不在边界上)满足

$$\boxed{G(x,x_0)=0.} \tag{9.5.25}$$

格林函数满足相关的齐次边界条件．为了得到(9.5.22)与(9.5.23)解的格林函数表示，再次利用格林公式，

422

$$\iint(u\nabla^2 G-G\nabla^2 u)\mathrm{d}A=\oint(u\nabla G-G\nabla u)\cdot\hat{n}\mathrm{d}s.$$

由定义微分方程和边界条件，

$$\iint[u(x)\delta(x-x_0)-f(x)G(x,x_0)]\mathrm{d}A=\oint h(x)\nabla G\cdot\hat{n}\mathrm{d}s,$$

因而有

$$u(x_0)=\iint f(x)G(x,x_0)\mathrm{d}A+\oint h(x)\nabla G(x,x_0)\cdot\hat{n}\mathrm{d}s.$$

交换 x 与 x_0，由 $G(x,x_0)$ 的对称性得到

$$\boxed{u(x)=\iint f(x_0)G(x,x_0)\mathrm{d}A_0+\oint h(x_0)\nabla x_0 G(x,x_0)\cdot\hat{n}\mathrm{d}s_0.} \tag{9.5.26}$$

必须特别小心表示非齐次边界条件影响的闭曲线积分. ∇x_0 是对源位置求梯度的符号，

$$\nabla x_0\equiv\frac{\partial}{\partial x_0}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y_0}\hat{j}.$$

因此，$G(x,x_0)$ 是源的影响函数，而 $\nabla x_0 G(x,x_0)\cdot\hat{n}$ 是非齐次边界条件的影响函数. 下面解释非齐次边界条件的影响函数 $\nabla x_0 G(x,x_0)\cdot\hat{n}$. 这是对源位置的法向导数. 根据方向导数的定义，

$$\nabla x_0 G(x,x_0)\cdot\hat{n}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{G(x,x_0+\Delta s\,\hat{n})-G(x,x_0)}{\Delta s}.$$

这就解释了格林函数的法向导数. $G(x,x_0+\Delta s\,\hat{n})/\Delta s$ 是对位于 $x_0+\Delta s\,\hat{n}$，强度为 $1/\Delta s$ 正源的响应，而 $-G(x,x_0)/\Delta s$ 是对位于 x_0，（强度为 $-1/\Delta s$）负源的响应. 非齐次边界条件的影响函数是强度为 $1/\Delta s$，距离为 Δs 的两个作用相反的集中源在 $\Delta s\to 0$ 时的极限. 这叫做双极源. 因而，此非齐次边界条件与双极源面分布等效.

9.5.6 无穷空间格林函数

423 在 9.5.2 节至 9.5.4 节中，得到了泊松方程 $\nabla^2 G(x,x_0)=\delta(x-x_0)$ 的格林函数表示. 这些表示很复杂. 而且所得到的无穷级数并未能很好地解释位于 x_0 的集中源在 x 处的作用. 下面会看到，困难是由边界条件引起的.

为了得到更简单的表示，先在无边界的无穷空间上求解泊松方程

$$\nabla^2 u=f(x).$$

引入对所有 x 都成立的格林函数 $G(x,x_0)$，定义为

$$\boxed{\nabla^2 G=\delta(x-x_0).} \tag{9.5.27}$$

既然这是具有位于 $x=x_0$ 集中源的无边界稳态热流的模型，就应该存在一个在源点 $x=x_0$ 周围对称的解. 二维和三维空间的结果是有些不同的. 下面要同时得到这两个结果. 用 r 表示二维空间（离 $x=x_0$）的径向距离，ρ 表示三维空间（离 $x=x_0$）的径向距离：

二维	三维
$r=x-x_0$	$\rho=x-x_0$
$r=\lvert r\rvert=\lvert x-x_0\rvert$	$\rho=\lvert\rho\rvert=\lvert x-x_0\rvert$
$=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$	$=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}.$

(9.5.28)

下面的推导中把三维的结果放在括号里和右边. 假设 $G(x, x_0)$ 仅依赖 $r(\rho)$:

$$G(x,x_0) = G(r) = G(|x - x_0|) \mid G(x,x_0) = G(\rho) = G(|x - x_0|).$$

不在源点($r\neq 0$ 或 $\rho\neq 0$)处的强制函数是 $0(\nabla^2 G(x, x_0) = 0)$. 在二维空间中, 对于 $r\neq 0$, 要找拉普拉斯方程的圆对称解(在三维空间中为球对称的解). 由前面的工作得到

$$(r \neq 0) \quad \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}r}\right) = 0 \,\Big|\, (\rho \neq 0) \quad \frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\rho}\right) = 0.$$

再通过积分就可以得到通解:

$$G(r) = c_1 \ln r + c_2 \,\Big|\, G(\rho) = \frac{c_3}{\rho} + c_4. \tag{9.5.29}$$

下面要确定能说明在源处奇性的常数. 可以通过在半径为 $r(\rho)$ 的一个小圆(球)上求(9.5.27)的积分就能得到奇性:

$$\iint \nabla^2 G \mathrm{d}A = 1 \quad \Big| \quad \iiint \nabla^2 G \mathrm{d}V = 1$$

$$\iint \nabla\cdot(\nabla G)\mathrm{d}A = \oint \nabla G \cdot \hat{n}\mathrm{d}s = 1 \,\Big|\, \iiint \nabla\cdot(\nabla G)\mathrm{d}V = \oiint \nabla G \cdot \hat{n}\mathrm{d}S = 1,$$

424

其中用到了散度定理. 在二维情形, 格林函数在圆法向的导数 $\nabla G \cdot \hat{n}$ 是 $\partial G/\partial r$(三维情形是 $\partial G/\partial\rho$). 它仅依赖径向距离(见(9.5.29)). 在圆周(球面)上半径是常数. 因而

$$2\pi r\frac{\partial G}{\partial r} = 1 \,\Big|\, 4\pi\rho^2\frac{\partial G}{\partial \rho} = 1,$$

这里用到了圆的周长为 $2\pi r$(球面面积为 $4\pi\rho^2$). 在其他包含无限空间格林函数的问题中, 可能有必要考虑无穷小圆(球)的极限. 这样就将奇异性条件表述为

$$\boxed{\lim_{r\to 0} r\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{1}{2\pi}} \,\Big|\, \boxed{\lim_{\rho\to 0}\rho^2\frac{\partial G}{\partial \rho} = \frac{1}{4\pi}}. \tag{9.5.30}$$

由(9.5.29)与(9.5.30),

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \,\Big|\, c_3 = -\frac{1}{4\pi}.$$

c_2 与 c_4 任意, 这表明泊松方程的无穷空间格林函数在一个任意加法常数的范围内被确定了. 为方便起见, 取 $c_2 = 0$, $c_4 = 0$:

$$\boxed{G(x,x_0) = \frac{1}{2\pi}\ln r} \,\Big|\, \boxed{G(x,x_0) = -\frac{1}{4\pi\rho}}$$

$$r = |x - x_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \,\Big|\, \rho = |x - x_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}. \tag{9.5.31}$$

注意它们都是对称的. 这些无穷空间格林函数本身在集中源都是奇异的. (但不出现在一维情形).

为了用无穷空间格林函数得到泊松方程 $\nabla^2 u = f(x)$ 在无穷空间的解, 需要利用格林公式:

$$\iint (u\nabla^2 G - G\nabla^2 u)\mathrm{d}A = \oint (u\nabla G - G\nabla u)\cdot\hat{n}\mathrm{d}s \,\Big|\, \iiint (u\nabla^2 G - G\nabla^2 u)\mathrm{d}V = \oiint (u\nabla G - G\nabla u)\cdot\hat{n}\mathrm{d}S. \tag{9.5.32}$$

闭曲线积分$\oint$(闭曲面积分$\oiint$)表示在整个边界上积分. 对于没有边界的无穷空间问题，必须考虑大圆(球)，然后取半径趋于无穷大的极限. 这里希望这“来自无穷”的闭积分为0:

425

$$\lim_{|x|\to\infty}\oint(u\nabla G-G\nabla u)\cdot\hat{n}\mathrm{d}s=0 \Bigg| \lim_{|x|\to\infty}\oiint(u\nabla G-G\nabla u)\cdot\hat{n}\mathrm{d}S=0. \quad (9.5.33)$$

现在，利用定义微分方程，在(9.5.32)中取$v=G(x, x_0)$后计算积分，再交换x与x_0(用到$G(x, x_0)$的对称性)就给出了无穷空间泊松方程解的表示公式:

$$\boxed{u(x)=\iint f(x_0)G(x,x_0)\mathrm{d}A_0} \Bigg\| \boxed{u(x)=\iiint f(x_0)G(x,x_0)\mathrm{d}V_0} \quad (9.5.34)$$

其中的$G(x, x_0)$由(9.5.31)给出.

使(9.5.33)成立所必需的条件，可通过对以$x=x_0$为中心的极(球)坐标求积分得到:

$$\lim_{r\to\infty}r\left(u\frac{\partial G}{\partial r}-G\frac{\partial u}{\partial r}\right)=0 \Bigg| \lim_{\rho\to\infty}\rho^2\left(u\frac{\partial G}{\partial\rho}-G\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)=0,$$

因为$\mathrm{d}s=r\mathrm{d}\theta(\mathrm{d}S=\rho^2\sin\phi\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta)$. 代入已知的格林函数，得到要使“边界”项等于0在∞处必须满足的条件:

$$\boxed{\lim_{r\to\infty}\left(u-r\ln r\frac{\partial u}{\partial r}\right)=0} \Bigg\| \boxed{\lim_{\rho\to\infty}\left(u+\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)=0.} \quad (9.5.35)$$

这些都是重要条件. 例如，如果$r\to\infty$ ($\rho\to\infty$)时，$u\sim 1/r(u\sim 1/\rho)$，则它们得到满足. 除了(9.5.34)给出的解之外，泊松方程在无穷空间还有其他解，但它们不满足衰减估计(9.5.35).

9.5.7 用无穷空间格林函数得到有界区域的格林函数

本节在有界二维区域上，求满足齐次边界条件的格林函数

$$\boxed{\nabla^2 G=\delta(x-x_0),} \quad (9.5.36)$$

前面讨论了一些对简单区域的求解方法，即便这样计算量也很大. 现在知道了(9.5.36)的一个特解，即无穷空间格林函数

426

$$G_p(x,x_0)=\frac{1}{2\pi}\ln r=\frac{1}{2\pi}\ln|x-x_0|=\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}. \quad (9.5.37)$$

不过，此无穷空间格林函数并不满足有关的齐次边界条件. 所以要考虑

$$\boxed{G(x,x_0)=\frac{1}{2\pi}\ln|x-x_0|+v(x,x_0),} \quad (9.5.38)$$

其中$v(x, x_0)$表示边界作用. 它是一个齐次解，满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 v=0$$

及其非齐次边界条件. 例如，如果在边界上，$G=0$，则在边界上$v=-(1/2\pi)\ln|x-x_0|$. $v(x, x_0)$可通过基于分离变量法(如果区域允许)的求解拉普拉斯方程标准方法得到. 而计算$v(x, x_0)$可能是相当复杂的，不过，格林函数的这个表示是非常重要的. 特别地，由于$v(x, x_0)$处(包括$x=x_0$)都性态良好，(9.5.38)说明，有限区域格林函数在源位置$x=x_0$的奇性，与无穷空间格林函数的相同. 对此，可在物理上做些解释. 一个点对邻近集中源的响应不应当与边界有太大的关系. (9.5.38)所表示的这种方法就去除了奇点.

9.5.8 用无穷空间格林函数求半无穷平面($y>0$)的格林函数：像源法

无穷空间格林函数可用来求某些半无穷空间问题的格林函数．考虑二维半无穷区域 $y>0$ 上的泊松方程

$$\boxed{\nabla^2 u = f(x),} \tag{9.5.39}$$

在 $y=0$ 处满足非齐次条件(给定温度)：

$$\boxed{u(x,0) = h(x).} \tag{9.5.40}$$

格林函数的定义问题为

$$\nabla^2 G(x,x_0) = \delta(x-x_0), \tag{9.5.41}$$

满足对应的齐次边界条件，

$$G(x,0;x_0,y_0) = 0, \tag{9.5.42}$$

[427]

如图9.5.3所示．这里用了记号 $G(x, x_0)=G(x, y; x_0, y_0)$．半无穷空间($y>0$)只在 $x=x_0$ 处有集中源．无穷空间格林函数$(1/2\pi)\ln|x-x_0|$，由于在 $y=0$ 不为0，因此不满足要求．

图9.5.3 半无穷平面的像源

像源．有一种能得到在 $y=0$ 为0的格林函数的简单方法．考虑在 $x=x_0$ 处有源 $\delta(x-x_0)$，在 $x=x_0^*$ 处有负像源 $-\delta(x-x_0^*)$ 的无穷空间问题(即无边界，这里 $x_0=x_0\hat{i}+y_0\hat{j}$，$x_0^*=x_0\hat{i}-y_0\hat{j}$)：

$$\nabla^2 G = \delta(x-x_0) - \delta(x-x_0^*). \tag{9.5.43}$$

根据非齐次问题的叠加原理，其响应必须为两个单独响应的和：

$$G = \frac{1}{2\pi}\ln|x-x_0| - \frac{1}{2\pi}\ln|x-x_0^*|. \tag{9.5.44}$$

由对称性，在 $y=0$ 处对 $x=x_0^*$ 处源的响应应该是在 $y=0$ 处对 $x=x_0$ 处源响应的负值．这样，在 $y=0$ 处的和应当为零(马上就验证)．这称为像源法．因此求得了半无穷空间($y>0$)上泊松方程的格林函数：

$$\boxed{G(x,x_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|x-x_0|}{|x-x_0^*|} = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}.} \tag{9.5.45}$$

现在验证这是所求的解．(9.5.45)满足的方程(9.5.43)并不是(9.5.41)．不过，因为 $x=x_0^*$ 在下半平面，所以在上半平面($y>0$)有 $\delta(x-x_0^*)=0$．这样，对 $y>0$，满足了(9.5.41)．更进一步，证明了 $y=0$ 时，$G(x, x_0)=0$：

$$G(x,x_0)\big|_{y=0} = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x-x_0)^2+y_0^2}{(x-x_0)^2+y_0^2} = \frac{1}{4\pi}\ln 1 = 0.$$

[428]

解．为了求解具有非齐次边界条件的泊松方程，需要解用格林函数(9.5.45)的表示．仍然利用格林公式．这里需要考虑一个大半圆(半径趋于无穷大时的极限)：

$$\iint(u\nabla^2 G - G\nabla^2 u)\,\mathrm{d}A = \oint(u\nabla G - G\nabla u)\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{\infty}\left(G\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial G}{\partial y}\right)\bigg|_{y=0}\mathrm{d}x,$$

因为对边界，单位外法向量 $\hat{n}=-\hat{j}$，并且若 $u\to 0$ 足够快(特别是由(9.5.35)，$\lim\limits_{r\to\infty}(u-r\ln r\,\partial u/\partial r)=$

0)，则在∞处基值为0. 代入定义微分方程并交换 x 与 x_0(由 $G(x,\ x_0)$ 的对称性)就证明了：

$$u(x)=\iint f(x_0)G(x,x_0)\mathrm{d}A_0-\int_{-\infty}^{\infty}h(x_0)\left.\frac{\partial}{\partial y_0}G(x,x_0)\right|_{y_0=0}\mathrm{d}x_0,\tag{9.5.46}$$

这用到了在 $y=0$ 处 $G=0$. 该式可直接从(9.5.26)获得. 由(9.5.45)，$G(x,\ x_0)$ 为

$$G(x,x_0)=\frac{1}{4\pi}[\ln((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)-\ln((x-x_0)^2+(y+y_0)^2)].$$

因而，

$$\frac{\partial}{\partial y_0}G(x,x_0)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{-2(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}-\frac{2(y+y_0)}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}\right].$$

计算在 $y_0=0$ 处的值(对应于边界上的源点)得到

$$\left.\frac{\partial}{\partial y_0}G(x,x_0)\right|_{y_0=0}=-\frac{y/\pi}{(x-x_0)^2+y^2}.\tag{9.5.47}$$

这是一个双极源的例子(见9.5.5节).

例. 考虑二维半无穷空间($y>0$)的拉普拉斯方程：

$$\begin{aligned}\nabla^2u&=0\\u(x,0)&=h(x).\end{aligned}\tag{9.5.48}$$

(9.5.46)可用于源为零的情形. 这里的解仅与非齐次边界条件有关. 使用格林函数的法向导数(9.5.47)得到

429

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}h(x_0)\frac{1}{(x-x_0)^2+y^2}\mathrm{d}x_0.\tag{9.5.49}$$

边界条件 $h(x)$ 的影响函数并不是格林函数，而是

$$-\left.\frac{\partial}{\partial y_0}G(x,x_0)\right|_{y_0=0}=\frac{y}{\pi[(x-x_0)^2+y^2]}.$$

它不仅是影响函数，还是9.5.5节所说的双极源. 它是边界条件本身为 δ 函数时，拉普拉斯方程的基本解. 在第10章中将使用傅里叶变换方法(而不是格林函数)得到同样的结果.

绝热边界. 如果格林函数的边界条件在 $y=0$ 是绝热类型，$\partial/\partial yG(x,\ x_0)\,|_{y=0}=0$，则对于 $y<0$ 必须使用正像源. 这样热能的等源位于 $x=x_0$ 与 $x=x_0^*$ 处. 由对称性知，没有热量会流过 $y=0$. 具体的过程留作习题.

9.5.9 圆的格林函数：像源法

令人相当惊奇的是，利用像源法也能求得半径为 a 的圆的(带零边界条件)泊松方程的格林函数，

$$\nabla^2G(x,x_0)=\delta(x-x_0)\tag{9.5.50}$$

$$G(x,x_0)=0,\quad |x|=a,\tag{9.5.51}$$

思路是几何上，存在像点 $x=x_0^*$(见图9.5.4所示)，使得沿着圆周的响应为常数. 考虑无穷空间对应于 $x=x_0$ 处源和 $x=x_0^*$ 处的负像源的格林函数，其中的 x_0^* 还未定义：

$$\nabla^2G(x,x_0)=\delta(x-x_0)-\delta(x-x_0^*).\tag{9.5.52}$$

根据叠加原理，解是两个无穷空间格林函数之和. 此处也引入了拉普拉斯方程的常数齐次解使得

$$G(x,x_0)=\frac{1}{2\pi}\ln|x-x_0|-\frac{1}{2\pi}\ln|x-x_0^*|+c=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{|x-x_0|^2}{|x-x_0^*|^2}+c. \qquad (9.5.53)$$

下面证明，存在点 x_0^*，使得由(9.5.53)给出的 $G(x,x_0)$ 在圆 $|x|=a$ 上为0. 为此要求 $|x|=a$ 时(对 $c=-1/4\pi\ln k$)

$$|x-x_0|^2=k|x-x_0^*|^2. \qquad (9.5.54)$$

现在证明在源点 x_0 的径向射线上存在如图9.5.4所示的像点 x_0^*：

$$x_0^*=\gamma x_0. \qquad (9.5.55)$$

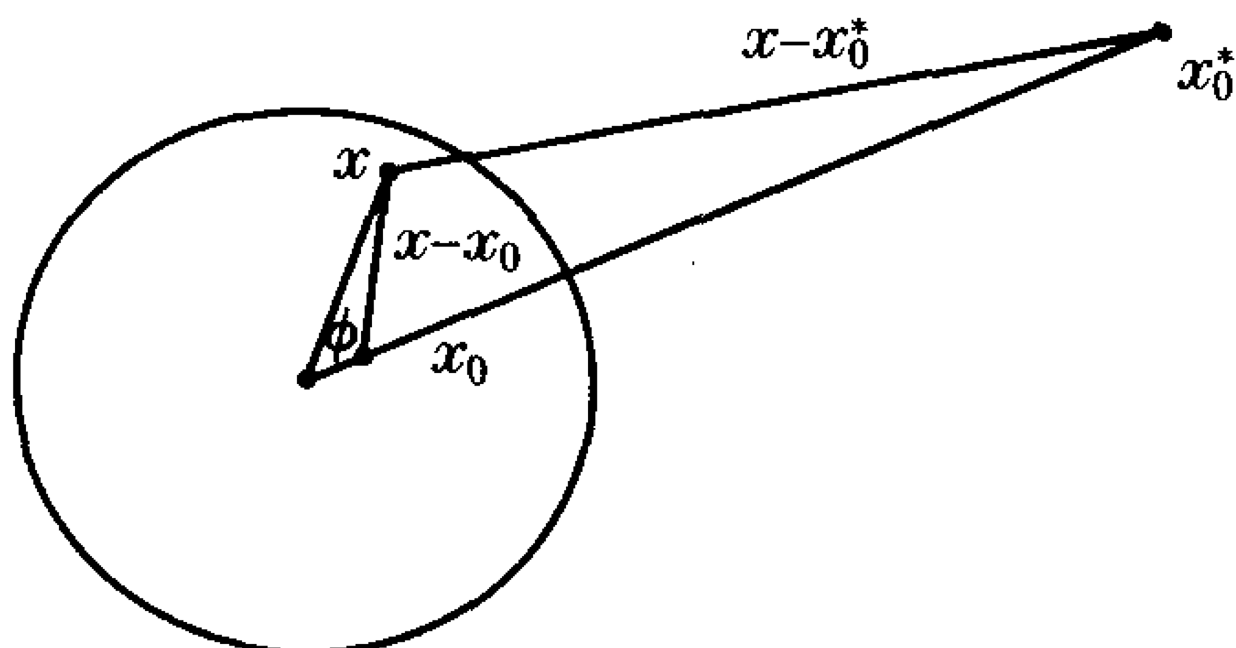


图 9.5.4 圆上泊松方程的格林函数(像源)

引入 x 与 x_0 之间的夹角 ϕ(与 x 与 x_0^* 之间的夹角相同). 因此，

$$\begin{aligned}|x-x_0|^2&=(x-x_0)\cdot(x-x_0)=|x|^2+|x_0|^2-2x\cdot x_0\\&=|x|^2+|x_0|^2-2|x||x_0|\cos\phi\\|x-x_0^*|^2&=(x-x_0^*)\cdot(x-x_0^*)=|x|^2+|x_0^*|^2-2x\cdot x_0^*\\&=|x|^2+|x_0^*|^2-2|x||x_0^*|\cos\phi,\end{aligned} \qquad (9.5.56)$$

这就是余弦定律. (9.5.54)在圆 $|x|=a$ 上成立(用到(9.5.55))要求

$$a^2+r_0^2-2ar_0\cos\phi=k(a^2+\gamma^2r_0^2-2a\gamma r_0\cos\phi),$$

其中 $r_0=|x_0|$. 它必须对所有的角度 ϕ 都成立，并要求 γ 与 k 满足下面两个方程：

$$a^2+r_0^2=k(a^2+\gamma^2r_0^2)$$
$$-2ar_0=k(-2a\gamma r_0).$$

这就得到 $k=1/\gamma$，因而

$$a^2+r_0^2=\frac{1}{\gamma}a^2+\gamma r_0^2 \quad 或 \quad \gamma=\frac{a^2}{r_0^2}.$$

所求像点位于

$$x_0^*=\frac{a^2}{r_0^2}x_0.$$

注意，$|x_0^*|=a^2/r_0$(源与像点半径的乘积等于圆半径的平方). x_0 离圆心越近，像点离得越远.

格林函数. 由 $k=l/\gamma=r_0^2/a^2$ 得到格林函数

$$G(x,x_0)=\frac{1}{4\pi}\ln\left(\frac{|x-x_0|^2a^2}{|x-x_0^*|^2r_0^2}\right).$$

用余弦定律(9.5.56)，得到

$$G(x,x_0)=\frac{1}{4\pi}\ln\left(\frac{a^2}{r_0^2}\frac{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\phi}{r^2+r_0^{*2}-2rr_0^*\cos\phi}\right),$$

其中 $r=|x|$，$r_0=|x_0|$，$r_0^*=|x_0^*|$. 由于 $r_0^*=a^2/r_0$，

$$G(x,x_0) = \frac{1}{4\pi}\ln\left(\frac{a^2}{r_0^2}\frac{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\phi}{r^2 + a^4/r_0^2 - 2ra^2/r_0\cos\phi}\right),$$

或等价地有

$$\boxed{G(x,x_0) = \frac{1}{4\pi}\ln\left(a^2\frac{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\phi}{r^2r_0^2 + a^4 - 2rr_0a^2\cos\phi}\right),} \tag{9.5.57}$$

其中 ϕ 为 x 与 x_0 之间的夹角，$r = |x|$，$r_0 = |x_0|$. 由这些形式，可看出在圆 $r = a$ 上，$G(x, x_0) = 0$.

解. 直接用格林函数表示泊松方程的解. 一般由(9.5.26)可得

$$u(x) = \iint f(x_0)G(x,x_0)\mathrm{d}A_0 + \oint h(x_0)\ \nabla x_0 G(x,x_0)\cdot\hat{n}\mathrm{d}s. \tag{9.5.58}$$

这个圆边界上的线积分是能够计算的. 最好用极坐标($\mathrm{d}s = a\mathrm{d}\theta_0$)，此时

$$\oint h(x_0)\ \nabla x_0 G(x,x_0)\cdot\hat{n}\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} h(\theta_0)\frac{\partial}{\partial r_0}G(x,x_0)\bigg|_{r_0=a} a\mathrm{d}\theta_0, \tag{9.5.59}$$

其中 $r_0 = |x_0|$. 由(9.5.57)得到

$$\frac{\partial G}{\partial r_0} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2r_0 - 2r\cos\phi}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\phi} - \frac{2r^2r_0 - 2ra^2\cos\phi}{r^2r_0^2 + a^4 - 2rr_0a^2\cos\phi}\right).$$

通过在圆 $r_0 = a$ 上的源点计算，得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial r_0}\bigg|_{r_0=a} &= \frac{1}{4\pi}\frac{2a - 2r\cos\phi - (2r^2/a - 2r\cos\phi)}{r^2 + a^2 - 2ar\cos\phi} \\ &= \frac{a}{2\pi}\frac{1 - (r/a)^2}{r^2 + a^2 - 2ar\cos\phi},\end{aligned} \tag{9.5.60}$$

432 其中 ϕ 是 x 与 x_0 之间的夹角. 如果对 x 与 x_0 都用极坐标，$\phi = \theta - \theta_0$，如图9.5.5所示.

例. 对在半径为 $r = a$ 的圆内，满足 $u(x, y) = h(\theta)$ 的拉普拉斯方程 $\nabla^2 u = 0$(即在泊松方程中 $f(x) = 0$)，在极坐标系中，由(9.5.58)~(9.5.60)得到

$$\boxed{u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\theta_0)\frac{a^2 - r^2}{r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta - \theta_0)}\mathrm{d}\theta_0,} \tag{9.5.61}$$

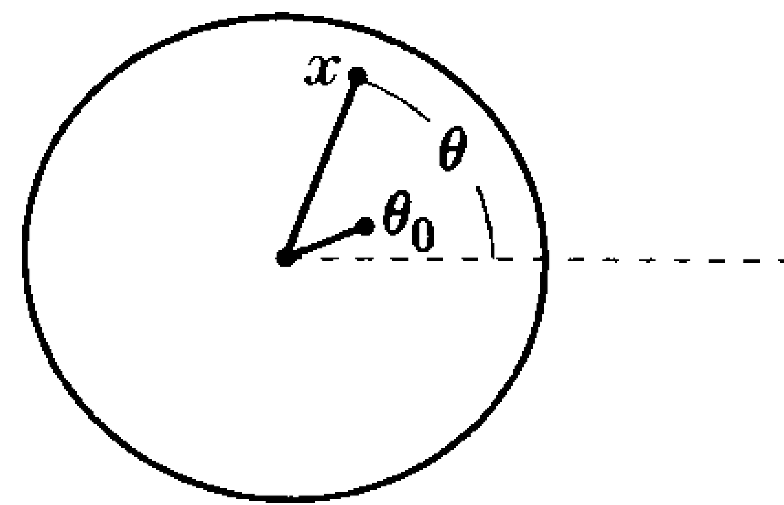


图9.5.5 极坐标

称为泊松公式. 前面用分离变量法得到了拉普拉斯方程在这一情形的解(见2.5.2节). 可以证明，那里得到的无穷级数解求和后能够给出泊松公式(见习题9.5.18).

习题9.5

9.5.1 考虑 $G(x, x_0)$ 的特征函数展开(9.5.10). 假设 $\nabla^2 G$ 有特征函数展开. 用格林公式验证，$\nabla^2 G$ 可以通过对(9.5.10)逐项微分求得.

9.5.2 (a)使用特征函数展开法，求解在矩形区域($0 < x < L$, $0 < y < H$)边界上满足 $u = 0$ 的

$$\nabla^2 u = f(x,y).$$

(b)将该解写成下列形式：

$$u(x) = \int_0^L \int_0^H f(x_0) G(x, x_0) \mathrm{d}x_0 \mathrm{d}y_0.$$

证明这里的 $G(x, x_0)$ 就是前面所得到的格林函数.

9.5.3 使用(多维)特征函数展开法，确定 $G(x, x_0)$. 其中

$$\nabla^2 G = \delta(x - x_0).$$

433

(a)在矩形区域($0<x<L$, $0<y<H$)上，

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时}, G = 0 \qquad \text{当 } y = 0 \text{ 时}, \frac{\partial G}{\partial y} = 0$$

$$\text{当 } x = L \text{ 时}, \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \qquad \text{当 } y = H \text{ 时}, \frac{\partial G}{\partial y} = 0.$$

(b)在长方体区域($0<x<L$, $0<y<H$, $0<z<W$)的六个面上 $G=0$.

*(c)在半圆($0<r<a$, $0<\theta<\pi$)的整个边界上 $G=0$.

(d)在 1/4 圆($0<r<a$, $0<\theta<\pi/2$)的直边上 $G=0$，在 $r=a$ 上 $\partial G/\partial r=0$.

*9.5.4 考虑在某个三维区域

$$\nabla^2 u = f,$$

在边界上 $u=h(x)$. 用(假设已知的)格林函数表示 $u(x)$.

9.5.5 在半径为 a 的圆内，考虑

$$\nabla^2 u = f,$$

其中

$$u(a,\theta) = h_1(\theta), 0 < \theta < \pi$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(a,\theta) = h_2(\theta), -\pi < \theta < 0.$$

用(假设已知的)格林函数表示 $u(r, \theta)$.

9.5.6 设二维 $\nabla^2 u = f(x)$ 满足齐次边界条件. 假设 ϕ_h 是齐次解，

$$\nabla^2 \phi_h = 0,$$

满足相同的齐次边界条件. 可能存在不止一个函数 ϕ_h.

(a)证明：如果对任意 $\phi_h(x)$, $\iint f(x)\phi_h(x)\mathrm{d}A \neq 0$，则没有解 $u(x)$.

(b)证明：如果对于所有的 $\phi_h(x)$, $\iint f(x)\phi_h(x)\mathrm{d}A = 0$，则有无穷多解.

9.5.7 考虑三维问题

$$\text{其中在边界上} \quad \left.\begin{array}{l} \nabla^2 u = f(x) \\ \nabla u \cdot \hat{n} = 0. \end{array}\right\} \tag{9.5.62}$$

434

(a)证明 $\phi_h=1$ 是满足齐次边界条件的齐次解.

(b)在什么条件下(9.5.62)有解?

(c)什么问题定义了(9.5.62)的广义格林函数?(不要试图确定一个广义格林函数.)

(d)假设广义格林函数是对称的. 导出用所求的广义格林函数表示 $u(x)$ 的公式.

9.5.8 如果边界上的条件为 $\nabla u \cdot \hat{n} = h(x)$，重做习题 9.5.7.

9.5.9 使用一维特征函数展开法确定 $G(x, x_0)$，其中

$$\nabla^2 G = \delta(x - x_0).$$

(a)在矩形区域($0<x<L$, $0<y<H$)上

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时}, G = 0 \qquad \text{当 } y = 0 \text{ 时}, \frac{\partial G}{\partial y} = 0$$

$$\text{当 } x = L \text{ 时}, \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \qquad \text{当 } y = H \text{ 时}, \frac{\partial G}{\partial y} = 0.$$

用依赖 y 的特征函数.

*(b)在半圆($0<r<a$, $0<\theta<\pi$)的整个边界上 $G=0$. 使用依赖 θ 的特征函数.

*9.5.10 考虑有频率 $\omega>0$ 周期源的波动方程

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=c^2\nabla^2\phi+g(x)e^{-i\omega t}.$$

证明：相同频率的特解 $\phi=u(x)e^{-i\omega t}$，满足非齐次亥姆霍兹方程

$$\nabla^2u+k^2u=f(x).\quad(k^2\text{ 与 }f(x)\text{ 是什么?})$$

其格林函数满足

$$\nabla^2G+k^2G=\delta(x-x_0).$$

(a)算子 ∇^2+k^2 的格林公式是什么样的?

(b)在无穷三维空间中证明

$$G=\frac{c_1e^{ik\rho}+c_2e^{-ik\rho}}{\rho}.$$

435 选择 c_1 与 c_2 使得对应的 $\phi(x,t)$ 为外向传播波.（提示：作没有说法的变量代换 $G=h/\rho$.）

(c)在无限二维空间中，证明格林函数是贝塞尔函数的线性组合. 确定常数使得当 r 足够大时对应的 $\phi(x,t)$ 为外向传播波.（提示：见(7.7.33)与(7.8.3).）

9.5.11 (a)确定 $y>0$(二维)时，$\nabla^2G=\delta(x-x_0)$，在 $y=0$ 满足 $\partial G/\partial y=0$ 的格林函数.（提示：考虑 x_0 处的正源与 x_0^* 处的正像源.）

(b)使用(a)求解 $\nabla^2u=f(x)$，其中

$$y=0\text{ 时}\quad\frac{\partial u}{\partial y}=h(x),$$

忽略在∞处的基值.

9.5.12 如果物理区域为 $y<0$，重做习题 9.5.11.

*9.5.13 如果区域 $y>0$ 为三维的，重做习题 9.5.11(注意(b)中的 $h(x)$ 改为 $h(x,z)$).

*9.5.14 使用像源法，在第一象限($x\geqslant0$, $y\geqslant0$)上，求解边界上满足 $G=0$ 的

$$\nabla^2G=\delta(x-x_0).$$

9.5.15 (a)若 $x=0$ 时 $G=0$，$y=0$ 时 $\partial G/\partial y=0$，重做习题 9.5.14.

(b)用(a)求解($x\geqslant0$, $y\geqslant0$)

$$\nabla^2u=f(x,y)$$
$$u(0,y)=g(y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=h(x).$$

9.5.16 (a)在 60°扇形区域($0<\theta<\pi/3$, $0<r<\infty$)上，若在边界上满足 $G=0$，用像源法求解

$$\nabla^2G=\delta(x-x_0).$$

(b)还可以在其他什么角度的扇形区域上使用像源法?

9.5.17 广义格林函数 $G_m(x,x_0)$ 在矩形区域($0<x<L$, $0<y<H$)上满足

$$\nabla^2G_m=\delta(x-x_0)+c,$$

436 在边界上满足 $\nabla G_m\cdot\hat{n}=0$.

(a)证明(二维)特征函数展开法仅当 $c=-1/LH$ 时才有效. 对于这个 c，确定 $G_m(x,x_0)$. 如果可能，使 $G_m(x,x_0)$ 满足对称性.

(b)证明(一维)特征函数展开法仅当 $c=-1/LH$ 时才有效. 对于这个 c，确定 $G_m(x,x_0)$. 如果可能，使 $G_m(x,x_0)$ 满足对称性.

9.5.18 使用分离变量法在半径为 a 的圆内，求解 $\nabla^2u=0$，其中 $r=a$ 时 $u(x,y)=h(\theta)$. 证明

$$u(r,\theta)=\int_0^{2\pi}h(\theta_0)I(r,\theta,\theta_0)\,d\theta_0.$$

并证明对 $I(r,\theta,\theta_0)$ 的无穷级数求和后给出泊松公式(9.5.61).

*9.5.19 确定半圆($0<r<a$, $0<\theta<\pi$)内，在边界上满足 $G=0$ 的格林函数 $G(x, x_0)$：

$$\nabla^2 G = \delta(x-x_0).$$

9.5.20 重做习题9.5.19，如果 $r=a$ 时 $G=0$，$\theta=0$ 与 $\theta=\pi$ 时 $\partial G/\partial\theta=0$.

9.5.21 确定半径为 a 的球面内，在边界上满足 $G=0$ 的格林函数 $G(x, x_0)$：

$$\nabla^2 G = \delta(x-x_0).$$

9.5.22 使用多重像源法求格林函数 $G(x, x_0)$：

$$\nabla^2 G = \delta(x-x_0).$$

(a)在矩形区域($0<x<L$, $0<y<H$)上，其中在 $x=0$ 与 $x=L$ 上 $G=0$，在 $y=0$ 与 $y=H$ 上 $G=0$.

(b)在无穷带($0<x<L$, $-\infty<y<\infty$)上，其中在 $x=0$ 上 $G=0$，在 $x=L$ 上 $\partial G/\partial x=0$.

*(c)在无穷带($0<x<L$, $-\infty<y<\infty$, $-\infty<z<\infty$)上，其中在 $x=0$ 上 $G=0$，在 $x=L$ 上 $G=0$.

(d)在半无穷带($0<x<L$, $0<y<\infty$)上，其中在边界上满足 $G=0$.

(e)在半无穷带($0<x<L$, $-\infty<y<0$)上，其中在 $x=0$ 与 $x=L$ 上 $G=0$，在 $y=0$ 上 $\partial G/\partial y=0$.

9.5.23 在无穷二维空间中，如果 $f(x)=g(r)$，其中 $r=|x|$，确定特解

$$\nabla^2 u = f(x).$$

437

(a)使用无穷空间格林函数(9.5.31).

(b)使用常微分方程的格林函数：

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right) = g(r).$$

(c)比较(a)与(b)的结果.

9.5.24 考虑二维 $\nabla^2 u=f(x)$.

(a)在边界上 $u=h(x)$. 那么存在多少个解？并且解的数量与 $f(x)$ 与 $h(x)$ 有何关系？不用求出 $u(x, y)$.

(b)在边界上 $\nabla u\cdot\hat{n}=h(x)$. 那么存在多少个解？并且解的数量与 $f(x)$ 与 $h(x)$ 有何关系？不用求出 $u(x, y)$.

9.6 扰动特征值问题

9.6.1 概述

当对一个已知如何求解的问题作小的改变(称之为扰动)时，所得到的问题就可能没有简单精确解. 这里，将介绍一种分析扰动特征值问题的近似(渐近)方法. 其中包括有非平凡齐次解的非齐次边值问题，因而9.4节介绍的弗雷德霍姆择一性分析是有帮助的. 在讨论更有趣的扰动圆形膜之前，先从简单的数学例子着手.

9.6.2 数学例子

最简单的扰动特征值问题是

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} + (\lambda + \varepsilon f(x))\phi = 0,} \tag{9.6.1}$$

其中

$$\phi(0) = 0 \quad 和 \quad \phi(L) = 0. \tag{9.6.2}$$

如果 $\varepsilon=0$，这就是通常的特征值问题($\lambda=(n\pi/L)^2$, $\phi=\sin n\pi x/L$). 如果 ε 是小非零参数，则系数对常数的偏离是给定小量 $\varepsilon f(x)$. 已知特征值与特征函数是 ε 的具有很好特性的函数：

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \cdots \quad 和 \quad \phi = \phi_0 + \varepsilon\phi_1 + \cdots. \tag{9.6.3}$$

438

称为扰动展开. 将(9.6.3)代入(9.6.1)得到

$$\frac{d^2}{dx^2}(\phi_0+\varepsilon\phi_1+\cdots)+[\lambda_0+\varepsilon\lambda_1+\cdots+\varepsilon f(x)](\phi_0+\varepsilon\phi_1+\cdots)=0. \tag{9.6.4}$$

方程(9.6.4)对于所有的 ε 都成立. 不含 ε 的项必定为零(令 $\varepsilon=0$ 即可). 因而,

$$\frac{d^2\phi_0}{dx^2}+\lambda_0\phi_0=0. \tag{9.6.5}$$

边界条件(通过将(9.6.3)代入(9.6.2)获得)为 $\phi_0(0)=0$ 与 $\phi_0(L)=0$. 因此, 如所期望的. 首阶特征值 λ_0 及相应的特征函数 ϕ_0 与未扰动问题($\varepsilon=0$)的相同:

$$\lambda_0=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad 和 \quad \phi_0=\sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{9.6.6}$$

其中 $n=1, 2, 3, \cdots$. 更确切的记号是 $\lambda_n^{(0)}$.

(9.6.4)中含 ε 的项也必须为零:

$$\frac{d^2\phi_1}{dx^2}+\lambda_0\phi_1=-f(x)\phi_0-\lambda_1\phi_0, \tag{9.6.7}$$

其中由(9.6.2)得到

$$\phi_1(0)=0 \quad 和 \quad \phi_1(L)=0. \tag{9.6.8}$$

这是带齐次边界条件的非齐次微分方程. 注意到 $\phi_0(0)=\sin n\pi x/L$ 是满足齐次边界条件的非平凡齐次解. 因而, 由弗雷德霍姆择一性, (9.6.7) ~ (9.6.8)有解, 必有(9.6.7)的右侧与 ϕ_0 正交:

$$0=\int_0^L f(x)\phi_0^2dx+\lambda_1\int_0^L\phi_0^2dx. \tag{9.6.9}$$

从(9.6.9)可以确定对特征值的扰动:

$$\lambda_1=-\frac{\int_0^L f(x)\phi_0^2dx}{\int_0^L\phi_0^2dx}=-\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\phi_0^2dx. \tag{9.6.10}$$

不用弗雷德霍姆择一性, 可以对带(9.6.8)的(9.6.7)用特征函数展开. 这样, 也能得到 439 (9.6.10)所给出的 ϕ_1 与 λ_1.

9.6.3 拟圆膜振动

对于涉及类似思路的物理问题, 要考虑有质量杂质拟圆膜的振动. 已经确定了(见7.7节)均匀密度圆膜的固有频率. 希望了解这些频率对密度与形状的小变化是如何改变的. 振动膜一般满足二维波动方程:

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=c^2\nabla^2u, \tag{9.6.11}$$

其中 $c^2=T/\rho$ 可以是 r 与 θ 的函数. 假设在边界上 $u=0$. 由分离变量, $u(r, \theta, t)=\phi(r, \theta)h(t)$, 得到

$$\frac{d^2h}{dt^2}=-\lambda h \quad 和 \quad \nabla^2\phi=-\frac{\lambda}{c^2}\phi. \tag{9.6.12}$$

其中分离常数 λ 使得 $\sqrt{\lambda}$ 为振荡的固有频率. 已经知道当 c^2 为常数和膜是圆的时候, 如何求解

这个问题(见7.7节). 考虑下面的情形，其中均匀密度有些许变化(也许由于小的瑕疵)，$\rho = \rho_0 + \varepsilon\rho_1(r,\ \theta)$，密度扰动 $\varepsilon\rho_1(r,\ \theta)$ 是给定的，ε 是很小的参数($0 < |\varepsilon| \ll 1$). 这样

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\rho}{T} = \frac{\rho_0 + \varepsilon\rho_1(r,\theta)}{T} = \frac{1}{c_0^2} + \varepsilon\frac{\rho_1(r,\theta)}{T},$$

其中 c_0 时均匀膜的声速. 扰动特征值问题满足偏微分方程：

$$\boxed{\nabla^2\phi = -\lambda\left(\frac{1}{c_0^2} + \varepsilon\frac{\rho_1(r,\theta)}{T}\right)\phi,} \tag{9.6.13}$$

在边界上 $\phi = 0$：

$$\boxed{\phi(a + \varepsilon g(\theta), \theta) = 0,} \tag{9.6.14}$$

这里扰动圆表示为 $r = a + \varepsilon g(\theta)$，其中 $g(\theta)$ 是给定的.

边界条件. 边界条件(9.6.14)有些难，而所希望考虑边界为简单的情形圆($r = a$ 或 $g(\theta) = 0$). 通常在复杂边界上 $\phi = 0$，它接近于较简单边界 $r = a$. 这导致利用泰勒级数. 此时(9.6.14)可替换为：在 $r = a$ 上

$$\phi + \varepsilon g(\theta)\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\varepsilon^2 g^2(\theta)}{2!}\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \cdots = 0. \tag{9.6.15}$$

440

扰动展开. 为了在条件(9.6.15)下求解(9.6.13)，假设特征值与特征函数都依赖小参数，并且有

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon\phi_1 + \cdots \quad 和 \quad \lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \cdots. \tag{9.6.16}$$

将(9.6.16)代入(9.6.13)与(9.6.15)，ε^0 项为

$$\nabla^2\phi_0 = -\frac{\lambda_0\phi_0}{c_0^2}, \tag{9.6.17}$$

其中在 $r = a$ 上，$\phi_0 = 0$. 这样，λ_0 是均匀密度为 ρ_0(见7.7节)的圆形膜的已知未扰动特征值，ϕ_0 为相应的已知特征函数. 最关心的是确定 λ_1，它是特征值由扰动密度与形状所引起的首阶变化. 这里将通过 ϕ_1 的方程来确定 λ_1，该方程通过在扰动展开(9.6.16)中代入(9.6.13)与(9.6.15)后仅保留 ε 项而得到：

$$\nabla^2\phi_1 + \frac{\lambda_0}{c_0^2}\phi_1 = -\frac{\lambda_1}{c_0^2}\phi_0 - \frac{\lambda_0}{T}\rho_1(r,\theta)\phi_0, \tag{9.6.18}$$

(在 $r = a$ 处)满足边界条件

$$\phi_1 = -g(\theta)\frac{\partial\phi_0}{\partial r}. \tag{9.6.19}$$

(9.6.18)右侧包含密度的已知扰动 ρ_1 和每个特征值的未知扰动 λ_1，而(9.6.19)的右侧包含形状的已知扰动($r = a + \varepsilon g(\theta)$).

相容性条件. 边值问题(9.6.18)和(9.6.19)是带非齐次边界条件的非齐次偏微分方程. 最重要的是，由非平凡齐次解 $\phi_{1_h} = \phi_0$；首阶特征函数满足对应的齐次偏微分方程和齐次边界条件(见(9.6.17)). 因此，只有相容性条件成立，(9.6.18)～(9.6.19)才有解. 而这最容易由使用格林公式(具有条件 $u = \phi_0$ 及 $v = \phi_1$)得到：

$$\iint[\phi_0 L(\phi_1) - \phi_1 L(\phi_0)]\,\mathrm{d}A = \oint(\phi_0\nabla\phi_1 - \phi_1\nabla\phi_0)\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}s. \tag{9.6.20}$$

因为 ϕ_1 不满足齐次边界条件，所以(9.6.20)的右侧不等于0. 用(9.6.17)与(9.6.18)~(9.6.19)得到可解性条件

$$-\iint\phi_0\left(\frac{\lambda_1}{c_0^2}\phi_0+\frac{\lambda_0}{T}\rho_1(r,\theta)\phi_0\right)\mathrm{d}A=\oint g(\theta)\frac{\partial\phi_0}{\partial r}\nabla\phi_0\cdot\hat{n}\mathrm{d}s. \tag{9.6.21}$$

这样就容易从(9.6.21)确定扰动特征值 λ_1：

$$\lambda_1=\frac{\frac{\lambda_0}{T}\iint\rho_1(r,\theta)\phi_0^2r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta+\int_0^{2\pi}g(\theta)\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial r}\right)^2a\mathrm{d}\theta}{-\frac{1}{c_0^2}\iint\phi_0^2r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}, \tag{9.6.22}$$

441

此处用到了 $\nabla\phi_0\cdot\hat{n}=\partial\phi_0/\partial r$(在 $r=a$ 处计算)，$\mathrm{d}A=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ 和 $\mathrm{d}s=a\mathrm{d}\theta$. 如果密度增大($\rho_1>0$)或膜被放大($g(\theta)>0$)，则特征值减小.

正如习题中所讨论的，只在对应特征值 λ_0 的特征函数 ϕ_0 仅有一个时，这个结果才成立. 事实上，对圆形膜，对应每一特征值(由 $\sin m\theta$ 与 $\cos m\theta$ 得到)一般都有两个特征函数. 而且两个必须都要考虑.

如果对 ϕ_1 有兴趣，它可用特征函数展开法由(9.6.18)得到. 不过在许多应用中，扰动特征值(这里是频率)更重要些.

弗雷德霍姆择一性. 如果 $g(\theta)=0$，则 ϕ_0 与 ϕ_1 满足相同的齐次边界条件，(9.6.21)就等价于弗雷德霍姆择一性，即(9.6.19)和(9.6.18)有解当且仅当(9.6.18)的右侧与齐次解 ϕ_0 正交. 而(9.6.21)是对非齐次边界条件的适当修正.

习题 9.6

9.6.1 考虑扰动特征值问题(9.6.1)，确定特征值的扰动 λ_1. 其中：

(a) $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(0)=0$ 且 $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(L)=0$.　　(b) $\phi(0)=0$ 且 $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(L)=0$.

9.6.2 重新考虑习题9.6.1，用特征函数展开法确定特征值的扰动 λ_1 及其特征函数的扰动 ϕ_1.

(a) $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(0)=0$ 且 $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(L)=0$.　　(b) $\phi(0)=0$ 且 $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}(L)=0$.

(c) $\phi(0)=0$ 且 $\phi(L)=0$.

9.6.3 对周期边界条件 $\phi(-L)=\phi(L)$，$\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x(-L)=\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x(L)$ 重新考虑习题9.6.1. 对于 $n\neq0$，若 $\varepsilon=0$，特征值问题就是退化的. 即对应同一个特征值有不止一个特征函数($\sin n\pi x/L$ 与 $\cos n\pi x/L$). 确定扰动特征值 λ_1. 并证明这个特征值分裂. 即，若 $\varepsilon\neq0$，对每个特征值都有一个特征函数，但当 $\varepsilon\to0$ 时，两个特征值则相互趋近(合并)，试给出有两个特征函数的特征值.（提示：有必要考虑两个特征函数($\varepsilon=0$)的线性组合. 对每个特征值，确定这些特征函数的特定组合，它是当 $\varepsilon\neq0$ 时的唯一特征函数.）

9.6.4 重新考虑习题9.6.1，其中边界条件为 $\phi(0)=0$ 与 $\phi(L)=0$. 再做些计算以获得 λ_2. 并把特征函数正规化，即 $\int_0^L\phi^2\mathrm{d}x=1$. 在本书中已对 λ_1 解决了该问题.

442

9.6.5 考虑非线性扰动特征值问题：

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}+\lambda\phi=\varepsilon\phi^3,$$

其中 $\phi(0)=0$，$\phi(L)=0$. 确定特征值的扰动 λ_1. 由于该问题是非线性的，所以振幅很重要. 假设 $\int_0^L \phi^2 dx = a^2$. 画出 a 作为 λ 函数的图像.

9.6.6 考虑满足固定的边界条件，有近似均匀张力 T 和密度 $\rho_0+\varepsilon\rho_1(x)$ 的振动弦. 确定由于质量变化而引起的固有频率的变化.

9.6.7 考虑均匀固定形状的膜，已知频率与固有振动模式. 假设扰动了密度，试确定频率是如何受扰动的? 可以假设对于每种频率都只有一种振动模式.

9.6.8 对于圆形膜，确定由小的质量与形状变化而引起的圆对称($m=0$)特征函数的固有频率的变化.

9.6.9 考虑圆形膜 $r=a$. 对非圆对称特征函数($m\neq0$)，(9.6.18)对 $\phi_0=c_1\phi_0^{(1)}+c_2\phi_0^{(2)}$ 成立，其中 $\phi_0^{(1)}$ 与 $\phi_0^{(2)}$ 是两个互相正交的对应相同特征值 λ_0 的特征函数. 这里 c_1 与 c_2 为任意常数.

(a)由 ϕ_1 有两个齐次解 $\phi_0^{(1)}$ 与 $\phi_0^{(2)}$，确定 c_1 与 c_2 的齐次线性方程组. 这将会是(9.6.18)满足(9.6.19)的相容性条件.

(b)求解(a)的线性方程组，并确定扰动频率与对应的固有振动模式.

9.7 小结

几个计算定常格林函数的例子用到了不同的方法：

1. 非定常问题极限.
2. 参数变易法(仅适于常微分方程).
3. 格林函数的特征函数展开.
4. 由定义格林函数微分方程的直接解法.
5. 应用无穷空间格林函数.
   a. 去除奇点.
   b. 像源法. [443]

对于定常问题，最好的解法可能是基于无穷空间的格林函数. 以后会看到，这对非定常问题也成立. 此时，需要讨论在无穷域求解偏微分方程的更多方法. 为此在第 10 章中，将用傅里叶变换分析无穷域上齐次偏微分方程的解. 然后，在第 11 章回到使用格林函数讨论非定常偏微分方程的非齐次问题. [444]

第 10 章　无穷域问题：偏微分方程的傅里叶变换解法

10.1　引言

前面分析过的偏微分方程大多定义在有限区域上（例如，定义在长度有限的杆上或二维、三维的有限区域的热传导问题）. 所得到的解依赖于边界条件. 这一章中要分析的问题至少在一个方向上是无穷延伸的. 而物理问题从来都不是无穷的，但通过引入无穷区域上的数学模型，就能够在实际边界影响可以忽略不计的情况下，确定问题的性态. 这一章通过对分离变量法的一般化，求解无穷区域或半无穷区域上的问题.

10.2　无穷域上的热传导方程

首先考虑没有任何边界限制的一维热传导方程. 对最简单的常系数且无热源情形，对所有 x 定义在 $-\infty < x < \infty$ 上的温度 $u(x, t)$ 满足热传导方程

445

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},} \tag{10.2.1}$$

初始条件为

$$u(x,0) = f(x). \tag{10.2.2}$$

想用方程(10.2.1)来预测未来的温度.

对于有限区间上的问题，在两个端点（通常是 $x=0$ 和 $x=L$）都需要边界条件. 通常无穷区域（$-\infty < x < \infty$）上的问题，似乎不要设置任何边界条件. 不过，对 $x \to \pm\infty$，即便没有说明，一般也是有物理条件的. 最简单的情形，假设 $x \to \pm\infty$ 时，初始温度分布 $f(x) \to 0$. 即对于足够大的 x，初始温度近似为 0. 物理上，对所有时刻，$x \to \pm\infty$ 时温度趋于 0：

$$u(-\infty, t) = 0 \quad 和 \quad u(\infty, t) = 0.$$

这样，问题就有了齐次"边界"条件.

分离变量. 由前面的经验，对整数 n，$\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$ 及 $\cos\frac{n\pi x}{L}e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$ 满足热传导方程(10.2.1). 事实上，对不论正负的实数 ω，

$$\boxed{u = e^{-i\omega x}e^{-k\omega^2 t}} \tag{10.2.3}$$

满足偏微分方程(10.2.1). 由对连续谱 ω 的积分来叠加(10.2.3)形式解，而不是与傅里叶级数对应的关于离散谱的求和. 这就是(10.2.11)表示的解. 下面将提供更多的细节.

同前面一样，分离变量

$$u(x,t) = \phi(x)h(t), \tag{10.2.4}$$

使得

$$\frac{1}{kh}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\phi}\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}=-\lambda.$$

这就给出两个与有限区域上一样的常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-\lambda kh \tag{10.2.5}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}=-\lambda\phi. \tag{10.2.6}$$

分离常数 λ 并不难确定，不过有些棘手；很容易犯错误. 自然希望在 $\pm\infty$ 处 $\phi(x)$ 的边界条件是 $\phi(-\infty)=0$ 及 $\phi(\infty)=0$. 然而，没有 λ 使方程 $\mathrm{d}^2\phi/\mathrm{d}x^2=-\lambda\phi$ 有在 $x=\pm\infty$ 趋于0的非平 [446] 凡解值. 例如，当 $\lambda>0$ 时，$\phi=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x$，$x\to\pm\infty$ 时，它们并不趋于0. 后面会看到，在 $x=\pm\infty$，分离空间函数 $\phi(x)$ 的正确边界条件与 $u(x,t)$ 的边界条件是不同的. 在 $x=\pm\infty$ 处只要求 $\phi(x)$ 是有界的，$|\phi(-\infty)|<\infty$ 且 $|\phi(\infty)|<\infty$. 虽然这相当奇怪，但后面会证明，尽管 $|\phi(\pm\infty)|<\infty$，但偏微分方程(叠加后)的解事实上满足 $u(\pm\infty,t)=0$.

特征值问题. 这样在无穷域上有兴趣的边值问题是

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}+\lambda\phi=0} \tag{10.2.7}$$

$$\boxed{|\phi(\pm\infty)|<\infty.} \tag{10.2.8}$$

下面确定所有满足 $|\phi(\pm\infty)|<\infty$ 的 λ 值. 如果 $\lambda<0$，其解是指数增长解与指数衰减解的线性组合，不可能使得 $|\phi(\pm\infty)|<\infty$ 同时成立. 然而，若 $\lambda>0$，

$$\phi=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x.$$

无论 λ 取何值($\lambda>0$)，这个解对所有 x 都有界. 这样所有 $\lambda(\lambda>0)$ 都是特征值. 而且，特征函数是正弦函数和余弦函数(因为 c_1 和 c_2 是任意的). 可以验证 $\lambda=0$ 也是一个特征值，其特征函数是常数. 这很类似于傅里叶级数中正弦函数和余弦函数(包括常数)都是特征函数. 不过，傅里叶级数的特征值 $\lambda=(n\pi/L)^2$ 是离散的而这里所有 λ 的非负值都是允许的. 有时一个问题的特征值集叫做频谱. 因此，得到了*连续谱* $\lambda\geqslant0$(而不是离散的).

叠加原理. 很容易由与时间相关的常微分方程解出，$h=c\mathrm{e}^{-\lambda kt}$，于是，对 $\lambda\geqslant0$，得到了如下乘积解：

$$\sin\sqrt{\lambda}x\mathrm{e}^{-\lambda kt}\quad 和\quad \cos\sqrt{\lambda}x\mathrm{e}^{-\lambda kt},$$

根据叠加原理，可以用它们最一般的线性组合构造其他解. 不是对 $\lambda\geqslant0$ 求和，而是积分：

$$u(x,t)=\int_0^\infty[c_1(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}x\mathrm{e}^{-\lambda kt}+c_2(\lambda)\sin\sqrt{\lambda}x\mathrm{e}^{-\lambda kt}]\mathrm{d}\lambda,$$ [447]

其中 $c_1(\lambda)$ 和 $c_2(\lambda)$ 是 λ 的任意函数. 这是广义叠加原理. 直接计算就可以验证这个积分满足(10.2.1). 通常取 $\lambda=\omega^2$，这样

$$\boxed{u(x,t)=\int_0^\infty[A(\omega)\cos\omega x\mathrm{e}^{-k\omega^2t}+B(\omega)\sin\omega x\mathrm{e}^{-k\omega^2t}]\mathrm{d}\omega,} \tag{10.2.9}$$

这里$A(\omega)$和$B(\omega)$是ω的任意函数[⊖]. 这类似于有限区域上(带周期边界条件)的解:

$$u(x,t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{L}e^{-k(n\pi/L)^2t}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-k(n\pi/L)^2t}\right].$$

为了得到任意函数$A(\omega)$和$B(\omega)$，就要求(10.2.9)满足初始条件$u(x,0)=f(x)$:

$$f(x)=\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]d\omega. \tag{10.2.10}$$

在后面章节中将说明对大多数函数$f(x)$都存在$A(\omega)$和$B(\omega)$使得(10.2.10)成立. 更重要的是，要找到确定$A(\omega)$和$B(\omega)$的方法.

复指数. 对$\lambda\geqslant 0$，确定了依赖x的特征函数为$\sin\sqrt{\lambda}x$和$\cos\sqrt{\lambda}x$. 有时也利用其他的无关函数. 一个可能性是采用复函数$e^{i\sqrt{\lambda}x}$和$e^{-i\sqrt{\lambda}x}$. 若引入$\omega=\sqrt{\lambda}$，那么对于$\omega\geqslant 0$，依赖x的特征函数就变为$e^{i\omega x}$和$e^{-i\omega x}$. 另一个方案是只用[⊖]$e^{-i\omega x}$，但要对所有的ω(包括正值和负值). 因此，像10.3节中要解释的那样，对于ω，乘积解为$e^{-i\omega x}e^{-k\omega^2t}$. 广义叠加原理给出热传导方程在无穷区间的解为

$$\boxed{u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}c(\omega)e^{-i\omega x}e^{-k\omega^2t}d\omega.} \tag{10.2.11}$$

可以由欧拉公式证明这与(10.2.9)等价[见习题10.2.1]. 按这一形式，如果

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}c(\omega)e^{-i\omega x}d\omega, \tag{10.2.12}$$

就满足初始条件$u(x,0)=f(x)$. 若$f(x)$是实的，$u(x,t)$就是实的(见习题10.2.1和10.2.2). 我们需要弄清楚(10.2.12)，还需要确定"系数"$c(\omega)$.

448

习题 10.2

*10.2.1 确定复系数$c(\omega)$使得(10.2.11)与含实系数$A(\omega)$和$B(\omega)$的(10.2.9)等价. 并证明$c(-\omega)=\bar{c}(\omega)$，其中上面加杠表示复数的共轭.

10.2.2 若$c(-\omega)=\bar{c}(\omega)$(见上题)，证明(10.2.11)给出的$u(x,t)$是实的.

10.3 傅里叶变换对

10.3.1 傅里叶级数恒等式的启示

在求解有限区间($-L<x<L$，具有周期边界条件)的边值问题时，可以用复数形式的傅里叶级数(见3.6节):

$$\boxed{\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{-in\pi x/L}.} \tag{10.3.1}$$

这里$f(x)$表示所有周期为$2L$的正弦函数的线性组合. 在3.6节确定了复傅里叶系数

$$\boxed{c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{in\pi x/L}dx.} \tag{10.3.2}$$

⊖ 严格地说，$c_1(\lambda)d\lambda=c_1(\omega^2)2\omega d\omega=A(\omega)d\omega$.

⊖ 按约定用$e^{-i\omega x}$而不是$e^{i\omega x}$. $|\omega|$是波数，即2π长度中波的个数，它是空间频率.

积分区间是整个的关注区域 $-L<x<L$. 下一节要把这些想法推广到定义在 $-\infty<x<\infty$ 上的函数，然后再应用到热传导方程.

消去 c_n 就得到傅里叶级数恒等式(用 $\bar{x}$ 哑积分变量，以区别空间变量 x)：

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(\bar{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi\bar{x}/L}\mathrm{d}\bar{x}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi x/L}. \tag{10.3.3}$$

对 $2L$ 周期函数，其容许波数 ω(2π 长度中波的个数)是无穷个离散值(见图 10.3.1)：



图 10.3.1 离散的波数

$$\omega=\frac{n\pi}{L}=2\pi\frac{n}{2L},$$

波长是 $2L/n$，它是对长度为 $2L$ 区间的 n 等份划分. 相邻波数之间的差是

$$\Delta\omega=\frac{(n+1)\pi}{L}-\frac{n\pi}{L}=\frac{\pi}{L};$$

449

它们是等距的. 这样，公式(10.3.3)变为

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Delta\omega}{2\pi}\int_{-L}^{L}f(\bar{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\bar{x}}\mathrm{d}\bar{x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}. \tag{10.3.4}$$

10.3.2 傅里叶变换

下面说明，基本傅里叶积分公式可以大体定义为(10.3.3)或(10.3.4)在 $L\to\infty$ 时的极限. 换句话说，定义在 $-\infty<x<\infty$ 上的函数在某种意义下可以看成周期为无穷大的周期函数.

ω 是特征值的平方根. 当 $L\to\infty$ 时，ω 的值彼此越来越近，$\Delta\omega\to 0$. 特征值趋于连续，所有可能的波数都是允许的. 这样，函数 $f(x)$ 应当表示为所有可能波长波的"和"(下面证明它成了积分). (10.3.4)式表示的是(从 $\omega=-\infty$ 到 $\omega=+\infty$)矩形的和，矩形的底为 $\Delta\omega$，高为 $(1/2\pi)\left[\int_{-L}^{L}f(\bar{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\bar{x}}\mathrm{d}\bar{x}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}$. 当 $L\to\infty$ 时,高与

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\bar{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\bar{x}}\mathrm{d}\bar{x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}$$

没什么大的不同. 这样，可以期望当 $L\to\infty$ 时，这些矩形的面积趋近黎曼和. 由 $L\to\infty$ 时 $\Delta\omega\to 0$，(10.3.4)变为傅里叶积分恒等式：

$$\boxed{\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\bar{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\bar{x}}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega.} \tag{10.3.5}$$

这个基本恒等式的详细证明(见习题 10.3.9)与有些复杂的傅里叶级数收敛的证明平行.

傅里叶变换. 现在接受(10.3.5). 引入和定义 $F(\omega)$ 为 $f(x)$ 的傅里叶变换：

$$\boxed{F(\omega)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\bar{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\bar{x}}\mathrm{d}\bar{x}.} \tag{10.3.6}$$

450

由公式(10.3.5)得到

$$\boxed{\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega.} \tag{10.3.7}$$

傅里叶变换定义(10.3.6)中的常数 $\frac{1}{2\pi}$ 是有些随意的，可以在(10.3.6)和(10.3.7)的积分

前面取任何因子，只要两者的乘积是$\frac{1}{2\pi}$即可．但其他一些教材在(10.3.6)和(10.3.7)积分前的常数是$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. 因此在使用变换表时要注意保证定义是相同的.

如果$f(x)$是连续的，那么$[f(x+)+f(x-)]/2=f(x)$．(10.3.7)表明$f(x)$是由全体[⊖]波数ω(和所有波长)的波$e^{-i\omega x}$组成；称之为$f(x)$的*傅里叶积分表示*，简称*傅里叶积分*．$f(x)$的傅里叶变换$F(\omega)$表示波数为ω的波的振幅；它类似傅里叶级数的傅里叶系数．可由在整个无穷域上的积分确定．而在(10.3.2)中，周期函数定义在$-L<x<L$上，积分区间只在这个有限区间上．类似地，若已知傅里叶变换$F(\omega)$，$f(x)$可由(10.3.7)确定．由(10.3.7)确定的$f(x)$称为$F(\omega)$的*傅里叶逆变换*.

这两个关系式(10.3.6)与(10.3.7)是非常重要的，称之为*傅里叶变换对*．在(10.3.7)中，对ω(*称为变换变量*)积分得到x的函数，而在(10.3.6)中，对x积分给出ω的函数．一个被积函数含$e^{-i\omega x}$，则另一个有$e^{i\omega x}$．不太容易记住哪个是哪个．但这没关系，重要的是保持前后一致．如果函数$f(x)$绝对可积$\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx<\infty\right)$[⊜]，那么(10.3.6)与(10.3.7)就有意义.

有时对$f(x)$的傅里叶变换，$F(\omega)$，还用另一个记号$\mathcal{F}[f(x)]$表示．类似地，$F(\omega)$的傅里叶逆变换的记号为$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$.

10.3.3 高斯函数的傅里叶逆变换

在10.4节中为了完成热传导方程的求解，要用到图10.3.2所示"钟形"曲线高斯函数

451

$$\boxed{G(\omega)=e^{-\alpha\omega^2}}$$

的傅里叶逆变换，傅里叶变换为$G(\omega)$的函数$g(x)$，由表达式(10.3.7)，可表示为

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)e^{-i\omega x}d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha\omega^2}e^{-i\omega x}d\omega,\tag{10.3.8}$$

如果$G(\omega)=e^{-\alpha\omega^2}$，计算(10.3.8)中的积分，可导出(见本节附录)

$$\boxed{g(x)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-x^2/4\alpha}.}\tag{10.3.9}$$

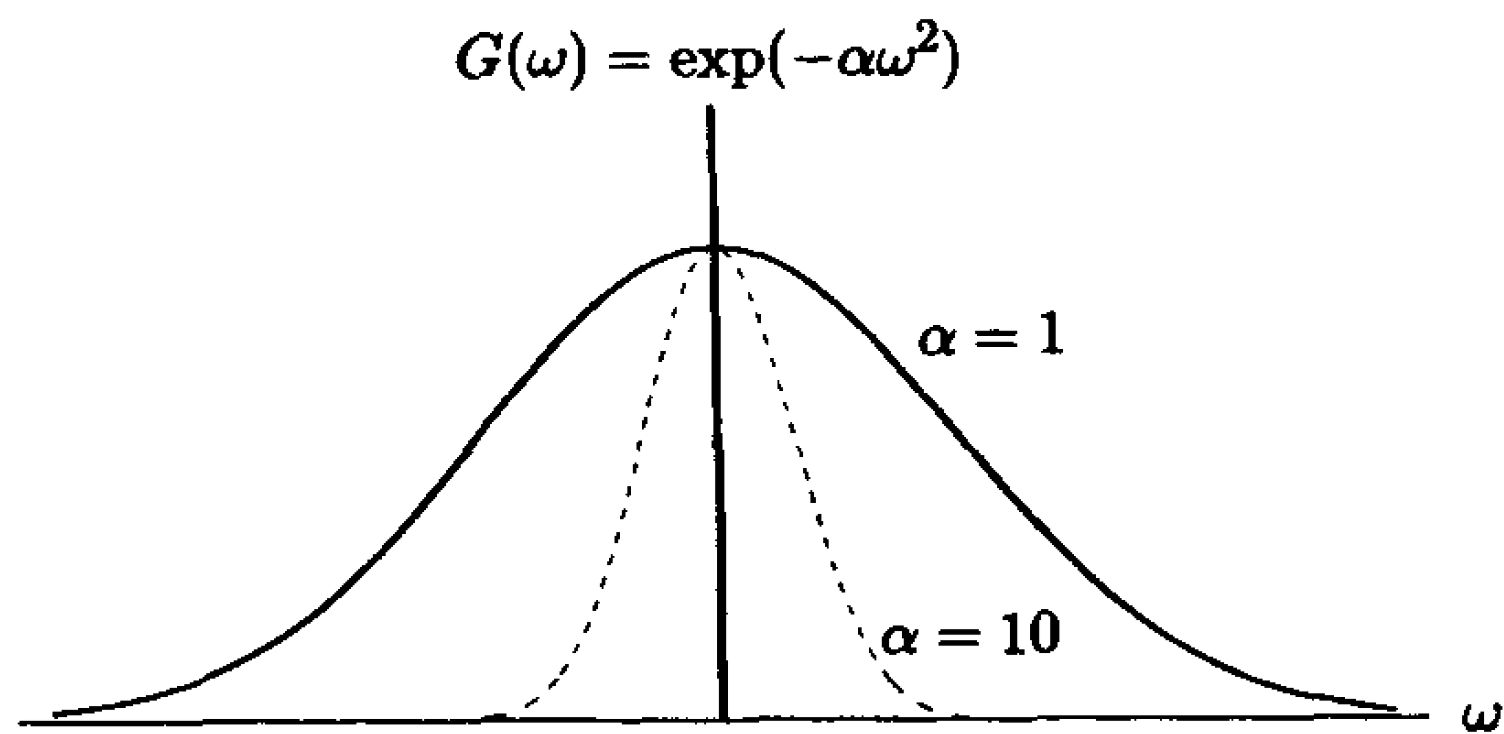


图10.3.2 钟形高斯函数

作为x的函数，$g(x)$也是钟形的．这就得到一个不一般的结果：*高斯函数的傅里叶逆变换本身是高斯函数*.

这个结果可用来得到高斯函数$e^{-\beta x^2}$的傅里叶变换$F(\omega)$．由傅里叶变换对的线性性，

⊖ 不仅仅是对周期问题$-L<x<L$的波数$n\pi/L$.

⊜ 如果$f(x)$是分段光滑的并且当$x\to\pm\infty$时，$f(x)\to0$充分快，则$f(x)$是绝对可积的．不过还有其他种类的绝对可积函数，对它们也可以讨论傅里叶变换对.

$e^{-x^2/4\alpha}$的傅里叶变换是$\sqrt{\alpha/\pi}e^{-\alpha\omega^2}$. 令$\beta=1/4\alpha$，则$e^{-\beta x^2}$的傅里叶变换是$1/\sqrt{4\beta\pi}\,e^{-\omega^2/4\beta}$. 因此，高斯函数的傅里叶变换仍是高斯函数. 这些结果总结在表 10.3.1 中. 如果β小，$f(x)$是"宽体"高斯函数；其傅里叶变换在$\omega=0$处附近出现"尖峰". 另一方面，如果$f(x)$是对应大β的窄峰高斯函数，其傅里叶变换图形是宽体的.

表 10.3.1 高斯函数的傅里叶变换

$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{-i\omega x}d\omega$	$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\omega x}dx$
$e^{-\beta x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\beta}}e^{-\omega^2/4\beta}$
$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-x^2/4\alpha}$	$e^{-\alpha\omega^2}$

10.3 节附录：推导高斯函数的傅里叶逆变换

(10.3.8)给出的高斯函数$e^{-\alpha\omega^2}$的傅里叶逆变换是

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha\omega^2}e^{-i\omega x}d\omega.$$

因为

$$g'(x)=\int_{-\infty}^{\infty}-i\omega e^{-\alpha\omega^2}e^{-i\omega x}d\omega,$$

由分部积分化简为

$$g'(x)=\frac{i}{2\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\omega}(e^{-\alpha\omega^2})e^{-i\omega x}d\omega=-\frac{x}{2\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha\omega^2}e^{-i\omega x}d\omega=-\frac{x}{2\alpha}g(x).$$

因此$g(x)$满足初等常微分方程. 这个常微分方程初值问题的解(由分离变量法)是

$$g(x)=g(0)e^{-x^2/4\alpha},$$

其中

$$g(0)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha\omega^2}d\omega.$$

作代换$z=\sqrt{a}\omega(dz=\sqrt{a}d\omega)$，则有

$$g(0)=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz.$$

这就得到了所要的结果，此处用到熟知的结果(这里给出证明)

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz=\sqrt{\pi}. \tag{10.3.10}$$

现在推导(10.3.10). 用极其不一般的方法计算$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz$. 虽然还不知道如何计算$I$，但可以看到计算$I^2$是容易的. 对每个$I$引入不同的哑积分变量就得到

452
~
453

$$I^2=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

尽管每个单积分未知，但能够计算二重积分. 建议用极坐标：

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad x^2 + y^2 = r^2 \quad \mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

积分区域是整个二维平面. 这样

$$I^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty} r\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r.$$

右端积分很容易计算；$I^2 = 2\pi \cdot \dfrac{1}{2} = \pi$，这就证明了(10.3.10).

用复变量推导. 由完全平方，$g(x)$变为

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha[\omega^2 + \mathrm{i}(x/\alpha)\omega]}\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha[\omega + \mathrm{i}(x/2\alpha)]^2}\mathrm{e}^{-x^2/4\alpha}\mathrm{d}\omega$$

$$= \mathrm{e}^{-x^2/4\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha[\omega + \mathrm{i}(x/2\alpha)]^2}\mathrm{d}\omega.$$

作变量替换 $s = \omega + \mathrm{i}(x/2\alpha)$ $(\mathrm{d}s = \mathrm{d}\omega)$ 似乎简化了运算，

$$\boxed{g(x) = \mathrm{e}^{-x^2/4\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha s^2}\mathrm{d}s.} \tag{10.3.11}$$

不过，虽然(10.3.11)是正确的，但并未给出正确的推理. 实际上，变量替换 $s = \omega + \mathrm{i}(x/2\alpha)$ 在计算中引入了复数. 由于 ω 是“沿着实轴”从 $\omega = -\infty$ 到 $\omega = +\infty$ 被积分的，(10.3.11)中的变量 s 有非零虚部，也就不是沿着实轴变化的. 而应该是

$$g(x) = \mathrm{e}^{-x^2/4\alpha}\int_{-\infty + \mathrm{i}(x/2\alpha)}^{\infty + \mathrm{i}(x/2\alpha)} \mathrm{e}^{-\alpha s^2}\mathrm{d}s. \tag{10.3.12}$$

要证明(10.3.11)式与(10.3.12)式等价，需要复变函数理论.

这里不想讨论复变函数，但对要用到的知识给些提示或许是读者感兴趣的. 为此在图 10.3.3 中作出了 s 复平面. 为了计算从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的积分，先从 a 到 b 积分(以后考虑 $a \to -\infty$ 和 $b \to +\infty$ 的极限). (10.3.11)是沿着实轴的积分，而(10.3.12)的移动了实轴[其中 s 的虚部为常数，$\mathrm{Im}(s) = \mathrm{i}x/2\alpha$]. 按照柯西定理(复变量函数)，闭曲线积分 $\oint \mathrm{e}^{-\alpha s^2}\mathrm{d}s = 0$ 为零，因为被积函数 $\mathrm{e}^{-\alpha s^2}$ 在封闭曲线内无奇点. 这里，用了图 10.3.3 中的矩形曲线. 这个闭曲线积分由四个简单积分组成，因此

$$\int_{c_1} + \int_{c_2} + \int_{c_3} + \int_{c_4} = 0.$$

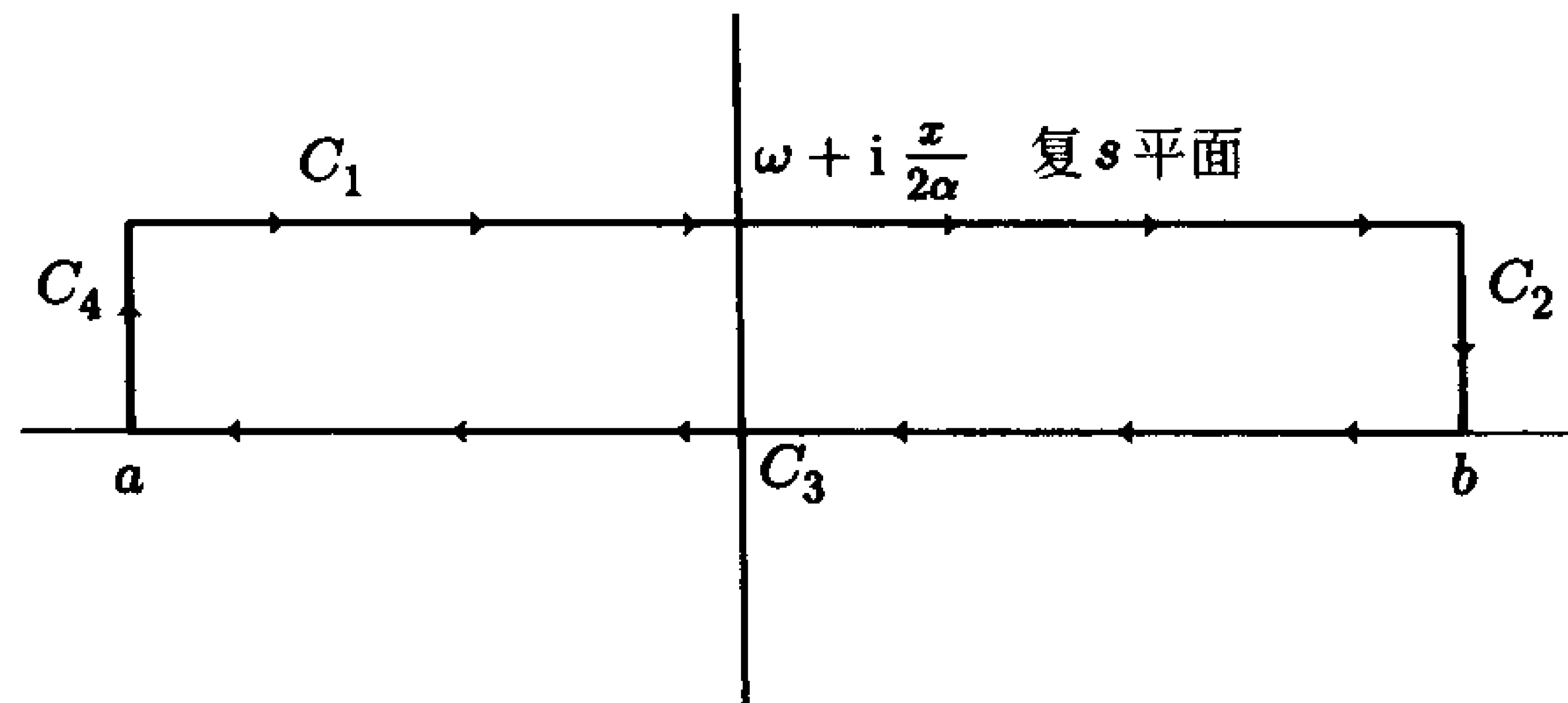


图 10.3.3 复平面上的闭曲线积分

由于被积函数在积分路径上指数级衰减为零(且路径长度为 $x/2a$ 有限)，可以证明：当 $a\to-\infty$ 和 $b\to+\infty$ 时，有 $\oint_{c2}=0$ 和 $\oint_{c4}=0$. 于是

$$\int_{-\infty+i(x/2\alpha)}^{\infty+i(x/2\alpha)} e^{-\alpha s^2}ds+\int_{\infty}^{-\infty}e^{-\alpha\omega^2}d\omega=0.$$

这就证明了(10.3.11)与(10.3.12)等价(这里用到了 $\int_{\infty}^{-\infty}=-\int_{-\infty}^{\infty}$).

习题 10.3

10.3.1 证明傅里叶变换是线性算子，也就是证明

(a) $\mathcal{F}[c_1f(x)+c_2g(x)]=c_1F(\omega)+c_2G(\omega)$ (b) $\mathcal{F}[f(x)g(x)]\neq F(\omega)G(\omega)$

10.3.2 证明傅里叶逆变换是线性算子，也就是证明

(a) $\mathcal{F}^{-1}[c_1F(\omega)+c_2G(\omega)]=c_1f(x)+c_2g(x)$ (b) $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)G(\omega)]\neq f(x)g(x)$

10.3.3 设 $F(\omega)$ 是 $f(x)$ 的傅里叶变换，证明：如果 $f(x)$ 是实的，那么 $F^*(\omega)=F(-\omega)$，其中 * 表示复共轭.

10.3.4 证明

$$\mathcal{F}\left[\int f(x;\alpha)d\alpha\right]=\int F(\omega;\alpha)d\alpha.$$

454 ~ 455

10.3.5 若 $F(\omega)$ 是 $f(x)$ 的傅里叶变换，证明：$e^{i\omega\beta}F(\omega)$ 的傅里叶逆变换是 $f(x-\beta)$. 这个结果叫做傅里叶变换的移位定理.

*10.3.6 如果

$$f(x)=\begin{cases}0 & |x|>a\\ 1 & |x|<a,\end{cases}$$

确定 $f(x)$ 的傅里叶变换. [答案在 10.4.4 节的傅里叶变换表中.]

*10.3.7 如果 $F(\omega)=e^{-|\omega|\alpha}(\alpha>0)$，确定 $F(\omega)$ 的傅里叶逆变换. [答案在 10.4.4 节的傅里叶变换表中.]

10.3.8 若 $F(\omega)$ 是 $f(x)$ 的傅里叶变换，证明：$-idF/d\omega$ 是 $xf(x)$ 的傅里叶变换.

10.3.9 (a) 以 $e^{i\omega x}$ 乘以(10.3.6)式(假设 $\gamma=1$)，再从 $-L$ 到 L 积分，证明

$$\int_{-L}^{L}F(\omega)e^{-i\omega x}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\bar{x})\frac{2\sin L(\bar{x}-x)}{\bar{x}-x}d\bar{x}. \tag{10.3.13}$$

(b) 推导(10.3.7). 为简捷假设 $f(x)$ 连续. [提示：设 $f(\bar{x})=f(x)+f(\bar{x})-f(x)$. 用正弦积分 $\int_0^{\infty}\frac{\sin s}{s}ds=\frac{\pi}{2}$. 对(10.3.13)作分部积分，并取 $L\to\infty$ 的极限.]

*10.3.10 在无穷区域上，考虑二维圆对称热传导方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

$$u(0,t)\ 有界$$

$$u(r,0)=f(r).$$

(a) 用分离变量求解. 一般设

$$u(r,t)=\int_0^{\infty}A(s)J_0(sr)e^{-s^2kt}s\,ds,$$

其中要满足初始条件，只要

$$f(r)=\int_0^{\infty}A(s)J_0(sr)s\,ds.$$

这里，$A(s)$ 称为 $f(r)$ 的傅里叶—贝塞尔变换或汉克尔变换.

(b)利用格林公式计算 $\int_0^L J_0(sr)J_0(s_1r)r\mathrm{d}r$. 对于大的 L,用(7.8.3) 确定它的近似表达式.

456

(c)在(a)中,利用(b)的结果由 $f(r)$ 导出 $A(s)$.(提示:见习题10.3.9.)

10.3.11 (a)如果函数 $f(x)$ 是有单位面积的函数,证明其伸缩函数 $(1/\alpha)f(x/\alpha)$ 也是有单位面积的函数.

(b)如果 $F(\omega)$ 为 $f(x)$ 的傅里叶变换,证明 $F(\alpha\omega)$ 为 $(1/\alpha)f(x/\alpha)$ 的傅里叶变换.

(c)证明:由(b)给出宽扩展的函数有在 $\omega=0$ 附近"尖峰"的傅里叶变换,反之亦然.

10.3.12 证明 $\lim\limits_{b\to\infty}\int_b^{b+i\pi/2\alpha} \mathrm{e}^{-\alpha s^2}\mathrm{d}s = 0$,其中 $s = b + iy(0 < y < \pi/2\alpha)$.

10.3.13 按下列方式计算 $I = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-k\omega^2 t}\cos\omega x\mathrm{d}\omega$,确定 $\partial I/\partial x$,然后分部积分.

10.3.14 伽马函数 $\Gamma(x)$ 定义为

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

证明:

(a) $\Gamma(1)=1$.

(b) $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

(c) $\Gamma(n+1)=n!$.

(d) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

(e) $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ 是什么?

10.3.15 (a)利用习题10.3.14中定义的伽马函数,证明:

$$\Gamma(x) = 2\int_0^\infty u^{2x-1}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u.$$

(b)利用极坐标二重积分,证明:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

[提示:由复变函数知道

$$2\int_0^{\pi/2}(\tan\theta)^{2z-1}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{\sin\pi z}.]$$

*10.3.16 用习题10.3.14定义的伽马函数计算

$$\int_0^\infty y^p \mathrm{e}^{-ky^n}\mathrm{d}y.$$

10.3.17 由复变函数可知,对于任何闭曲线,

457

$$\oint \mathrm{e}^{-i\omega^3/3}\mathrm{d}\omega = 0.$$

考虑 $R\to\infty$ 时如图10.3.4所示的(半径为 R)30°扇形区域的极限. 证明:

$$\int_0^\infty \cos\left(\frac{\omega^3}{3}\right)\mathrm{d}\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}3^{-2/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$\int_0^\infty \sin\left(\frac{\omega^3}{3}\right)\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2}3^{-2/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$$

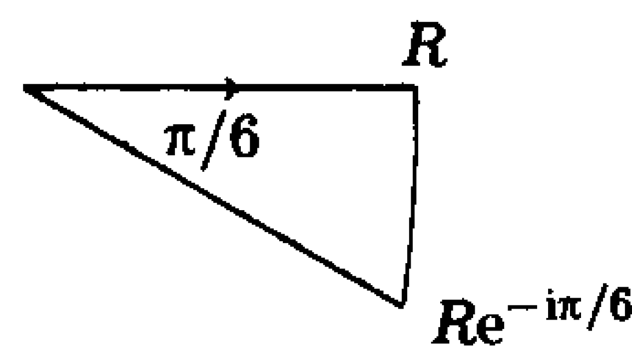


图 10.3.4

可参考习题10.3.16.

10.3.18 (a)在区间 $-\infty < x < \infty$ 上,α 取什么值时 $\alpha\mathrm{e}^{-\beta(x-x_0)^2}$ 有单位面积?

(b)证明:当 $\beta\to\infty$ 时,习题(a)的函数极限满足狄拉克 δ 函数 $\delta(x-x_0)$ 的性质.

(c)用下面两种方法得到 $\delta(x-x_0)$ 的傅里叶变换:

1. 取(a)中函数的变换,再取 $\beta\to\infty$ 时的极限.

2. 用狄拉克 δ 函数 $\delta(x-x_0)$ 的积分性质.

(d)证明:$\delta(x-x_0)$ 的傅里叶变换与下列想法一致:"尖峰状函数的傅里叶变换被扩展开(包含众多频率)".

(e)证明：狄拉克 δ 函数 $\delta(x-x_0)$ 的傅里叶变换表示是

$$\delta(x-x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega(x-x_0)}d\omega. \tag{10.3.14}$$

为何在数学上讲这不严格？那么 $x=x_0$ 时，会发生什么？类似地

$$\delta(\omega-\omega_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix(\omega-\omega_0)}dx. \tag{10.3.15}$$

(f)方程(10.3.15)可以看作是特征函数 $e^{-i\omega x}$ 的正交性关系. 如果

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{-i\omega x}d\omega,$$

用正交条件(10.3.15)确定"傅里叶系数(变换)"$F(\omega)$.

458

10.4 傅里叶变换与热传导方程

10.4.1 热传导方程

这一小节开始说明如何应用傅里叶变换求解无穷区间上的热传导方程. 早些时候已证明了，对于 ω，$e^{-i\omega x}e^{-k\omega^2 t}$ 满足热传导方程 $\partial u/\partial t=k\partial^2 u/\partial x^2$. 广义叠加原理表明

$$\boxed{u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}c(\omega)e^{-i\omega x}e^{-k\omega^2 t}d\omega.} \tag{10.4.1}$$

满足热传导方程. 要满足初始条件 $u(x,0)=f(x)$，只要

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}c(\omega)e^{-i\omega x}d\omega. \tag{10.4.2}$$

由傅里叶变换的定义($\gamma=1$)看到(10.4.2)是函数 $f(x)$ 的傅里叶积分表示. 于是，$c(\omega)$ 是初始温度分布 $f(x)$ 的傅里叶变换：

$$\boxed{c(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\omega x}dx.} \tag{10.4.3}$$

(10.4.1)和(10.4.3)描述了热传导方程初值问题的解[⊖].

而这种形式的解太复杂了不能常用. 因此介绍它的一个简化. 把 $c(\omega)$ 代入(10.4.1)，注意(10.4.3)中的 x 是哑变量(引入哑变量 $\bar{x}$)：

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\bar{x})e^{i\omega\bar{x}}d\bar{x}\right]e^{-i\omega x}e^{-k\omega^2 t}d\omega.$$

在计算积分之前，首先交换积分次序：

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\bar{x})\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-k\omega^2 t}e^{-i\omega(x-\bar{x})}d\omega\right]d\bar{x}. \tag{10.4.4}$$

(10.4.4)表明了 $e^{-k\omega^2 t}$ 的傅里叶逆变换 $g(x)$ 的重要性：

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-k\omega^2 t}e^{-i\omega x}d\omega. \tag{10.4.5}$$

于是，(10.4.4)中的被积函数所包含的是 $g(x-\bar{x})$，而不是 $g(x)$.

459

影响函数. 需要确定傅里叶变换为 $e^{-k\omega^2 t}$ 的函数 $g(x)$ [然后做成变量 $x-\bar{x}$ 的函数 $g(x-\bar{x})$]. $e^{-k\omega^2 t}$ 是一个高斯函数. 在前一节(或大多数傅里叶变换表中，见 10.4.4 节)，令

⊖ 特别地，在习题 10.4.2 中证明：当 $x\to\infty$ 时，$u\to 0$，尽管 $x\to\infty$ 时，$e^{-i\omega x}$ 不趋于零.

$\alpha = kt$，得到高斯函数 $g(x) = \sqrt{\pi/kt}e^{-x^2/4kt}$. 于是热传导方程的解是

$$\boxed{u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x}) \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-(x-\bar{x})^2/4kt} d\bar{x}.} \tag{10.4.6}$$

这个公式表明热传导方程的解依赖于整个初始温度分布 $u(x, 0) = f(x)$. 每个初始温度都“影响”在 t 时刻的温度. 定义

$$\boxed{G(x,t;\bar{x},0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-(x-\bar{x})^2/4kt},} \tag{10.4.7}$$

称为影响函数. 它与热传导方程无穷空间格林函数的关系将在第 11 章阐述. 在某种意义说，等式(10.4.7)度量了位于$\bar{x}$的初始温度($\bar{t}=0$)对在 t 时刻 x 处温度的影响. 当 $t\to 0$，影响函数变得越来越集中. 事实上，已在习题 10.3.18 中证明了

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-(x-\bar{x})^2/4kt} = \delta(x-\bar{x})$$

(第 9 章的狄拉克 δ 函数)，这样就验证了(10.4.6)满足初始条件.

热传导方程在无穷域上的解(10.4.6)是用傅里叶变换按一个复杂的过程推导出来的. 为使傅里叶变换存在，要求初始温度分布满足限制 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\bar{x})| d\bar{x} < \infty$. 不过,解的最终形式根本涉及不到傅里叶变换. 这样,在利用(10.4.6) 时,就不再需要计算傅里叶变换. 事实上,对(10.4.6) 的约束条件 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ 是不必需的. 粗略地讲,只要(10.4.6) 中的积分收敛,(10.4.6) 就有效(虽然给出的推导并不是这样).

热传导方程的基本解. 求解热传导方程，其初始条件为 $u(x, 0) = f(x) = \delta(x)$，集中在 $x=0$ 处，其中 $\delta(x)$是狄拉克 δ 函数，具有 9.3.4 节中所述的性质. 由(10.4.6)和狄拉克 δ 函数的基本性质，热传导方程在此初始条件下的解是

460

$$\boxed{u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\bar{x}) \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-(x-\bar{x})^2/4kt} d\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-x^2/4kt},} \tag{10.4.8}$$

这是热传导方程在无穷域上最基本的解之一，称为基本解. 其图像见图 10.4.1. 热传导方程的基本解与热传导方程的无穷空间格林函数是相同的，这将在第 11 章中作解释.

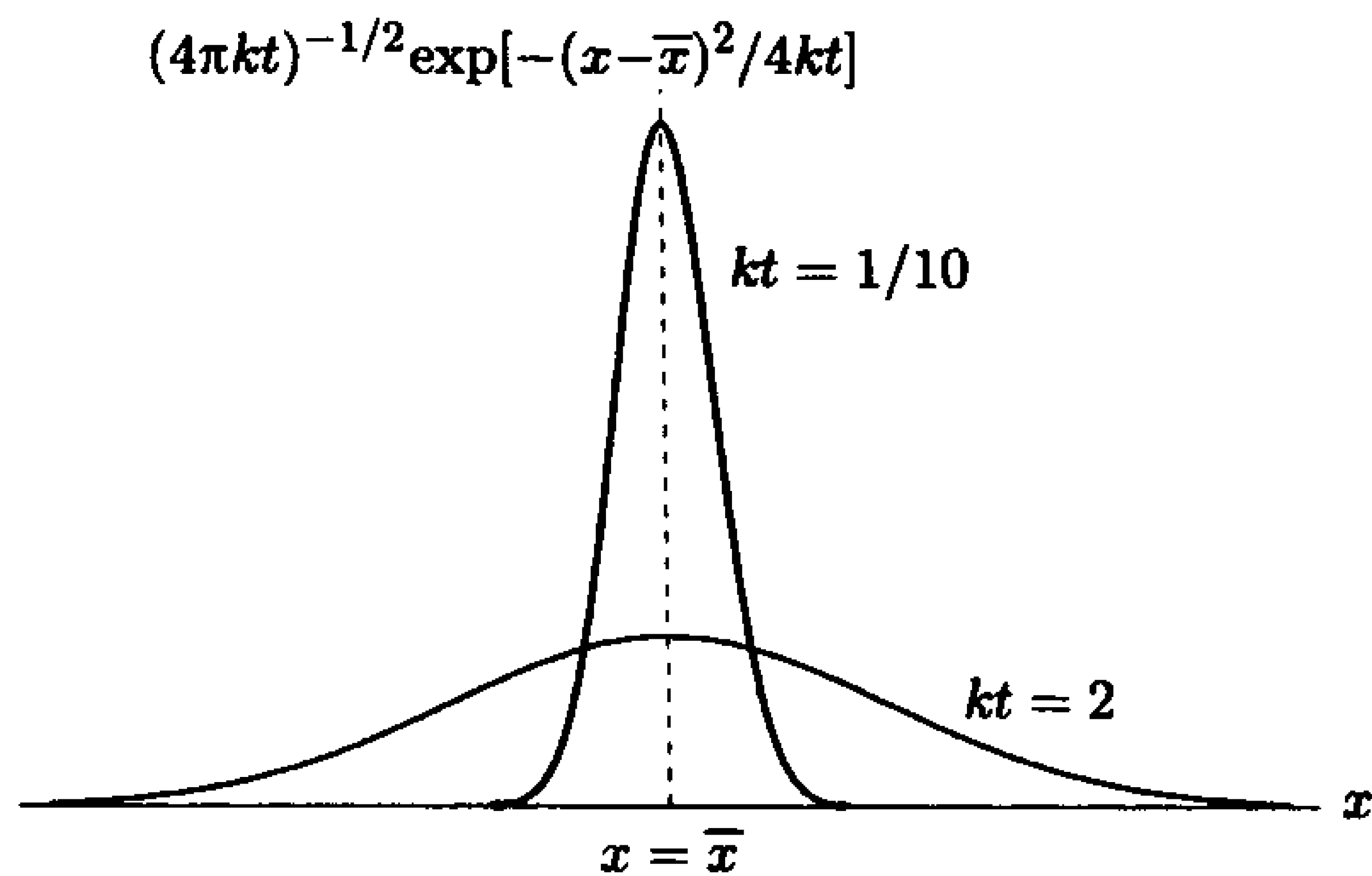


图 10.4.1 热传导方程的基本解

例. 为了研究间断的初始条件如何传播，考虑下面有趣的初值问题：

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 100 & x > 0. \end{cases}$$

问题是，热能如何由开始时均匀地集中在杆的右半部分而扩散到整个连杆？由(10.4.6)，

$$u(x,t) = \frac{100}{\sqrt{4\pi kt}} \int_0^{\infty} e^{-(x-\bar{x})^2/4kt} d\bar{x} = \frac{100}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/\sqrt{4kt}}^{\infty} e^{-z^2} dz,$$

其中积分用变量替换 $z=(\bar{x}-x)/\sqrt{4kt}(\mathrm{d}z=\mathrm{d}\bar{x}/\sqrt{4kt})$ 作了化简．这样，被积函数就不再依赖任何参数．这个积分表示高斯(正态)曲线下的面积，如图 10.4.2 所示．因为 e^{-z^2} 是偶函数

$$\int_{-x/\sqrt{4kt}}^{\infty}=\int_{0}^{\infty}+\int_{0}^{x/\sqrt{4kt}}.$$

由前面所证明的结果，$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z=\sqrt{\pi}/2$，

$$u(x,t)=50+\frac{100}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/\sqrt{4kt}}\mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z. \tag{10.4.9}$$

461

当 $x/\sqrt{4kt}$ 是常数时，温度就是常数，$x-t$ 平面上的抛物线见图 10.4.3．$x/\sqrt{4kt}$ 叫做相似变量．例如，60°和 70°抛物线之间的距离与 $\sqrt{t}$ 成比例．温度分布向外散开，称为扩散的现象．(10.4.9)给出的对各个固定 t 的温度分布见图 10.4.4．

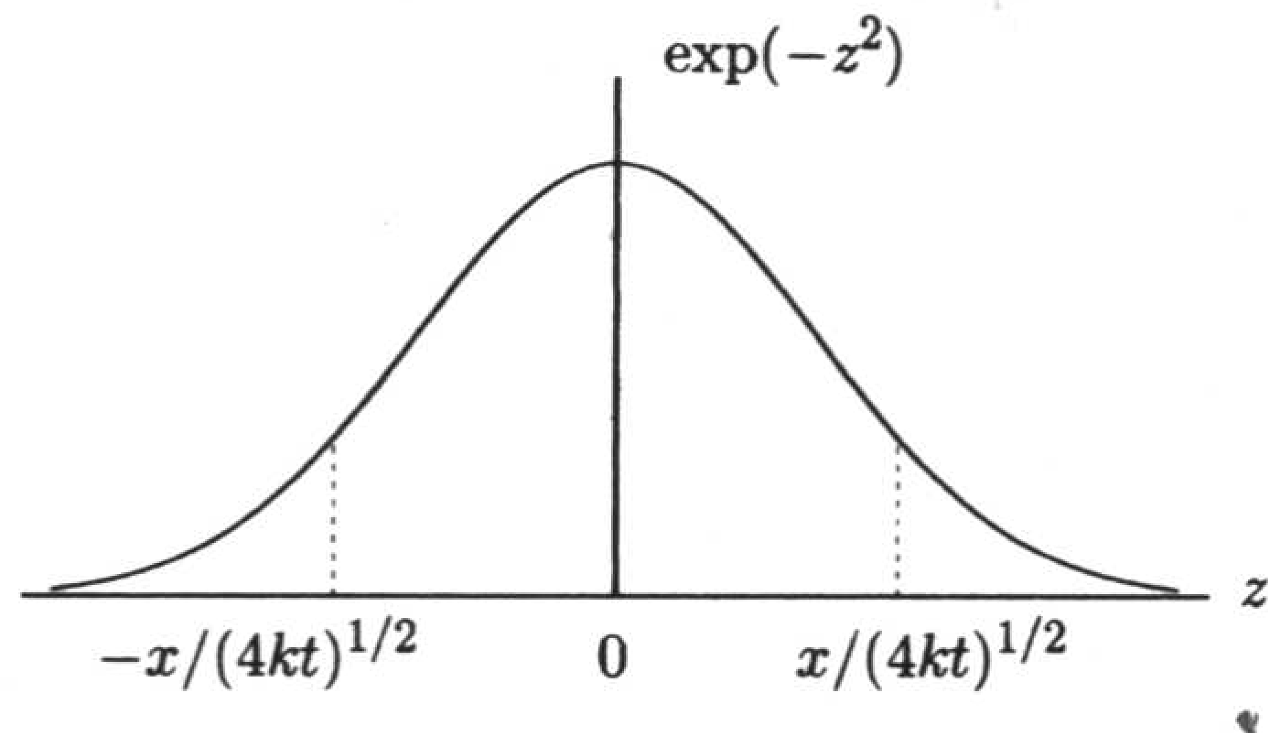


图 10.4.2　高斯曲线下的面积

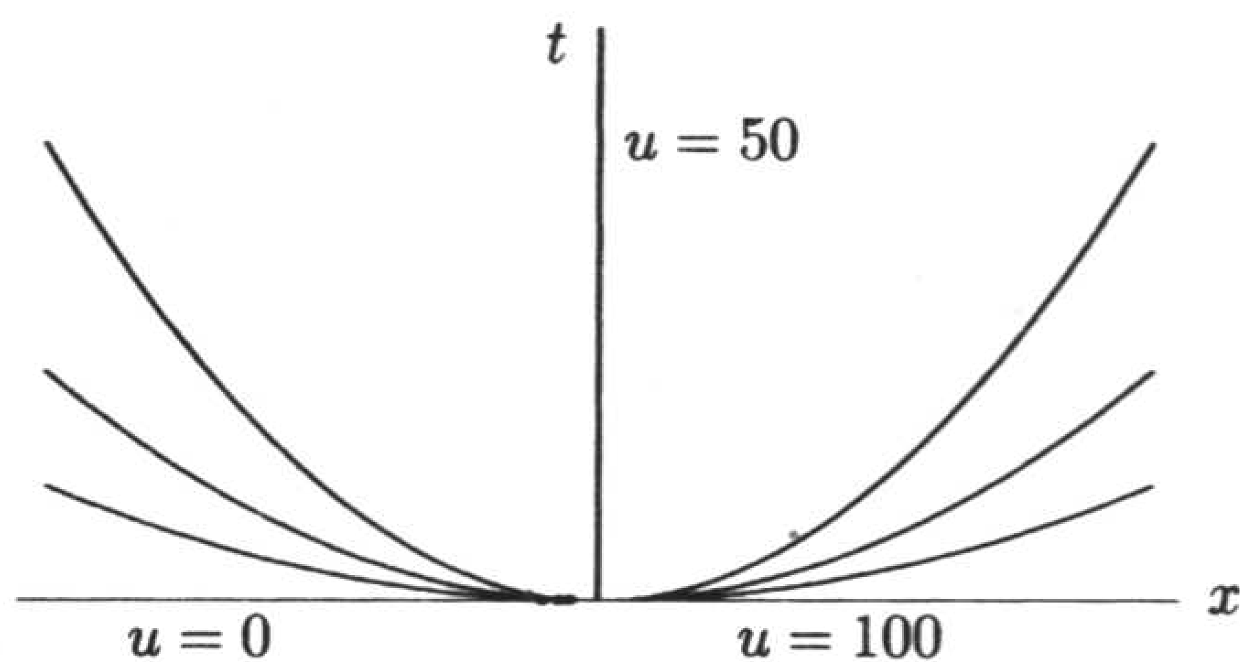
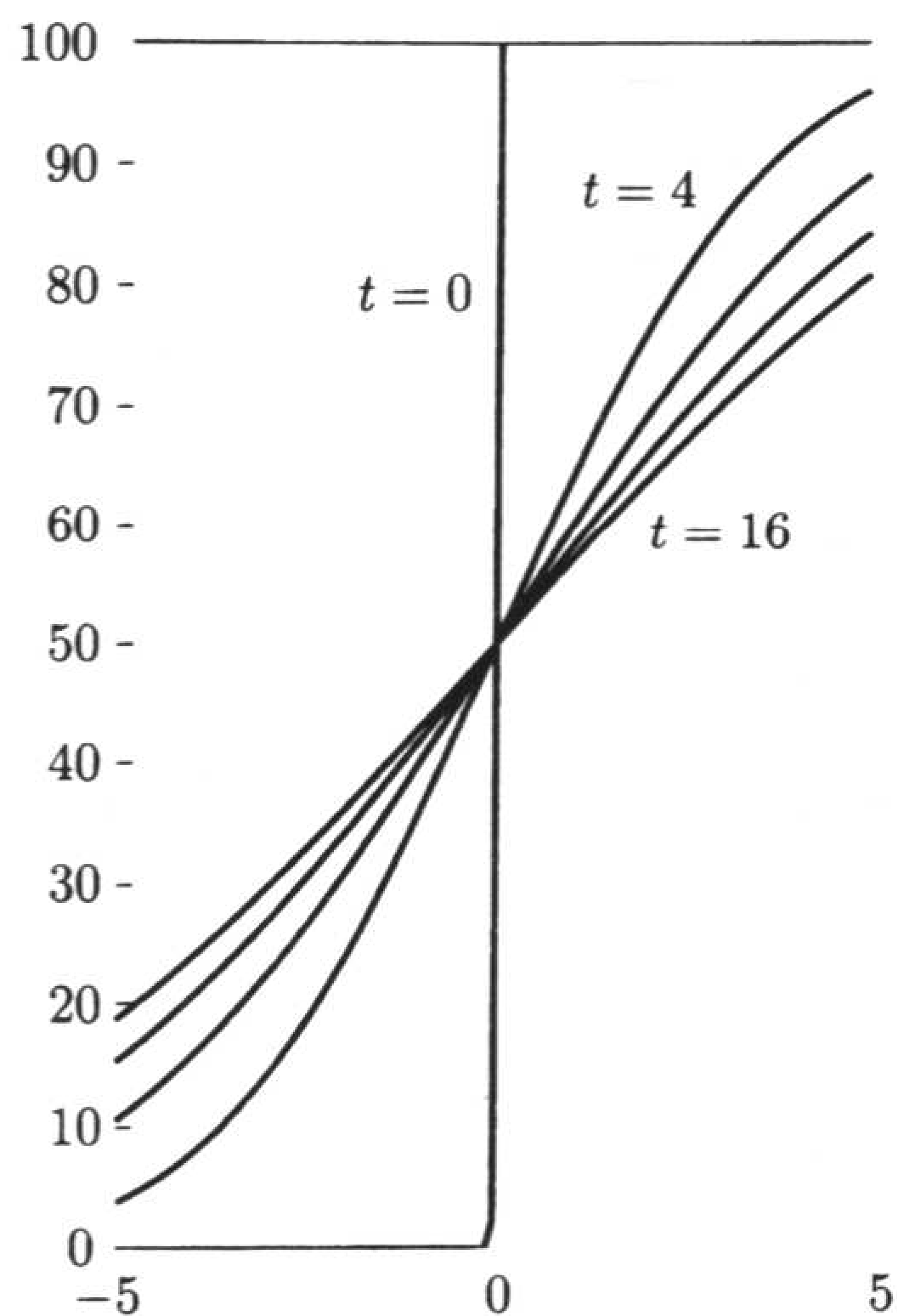


图 10.4.3　常温线



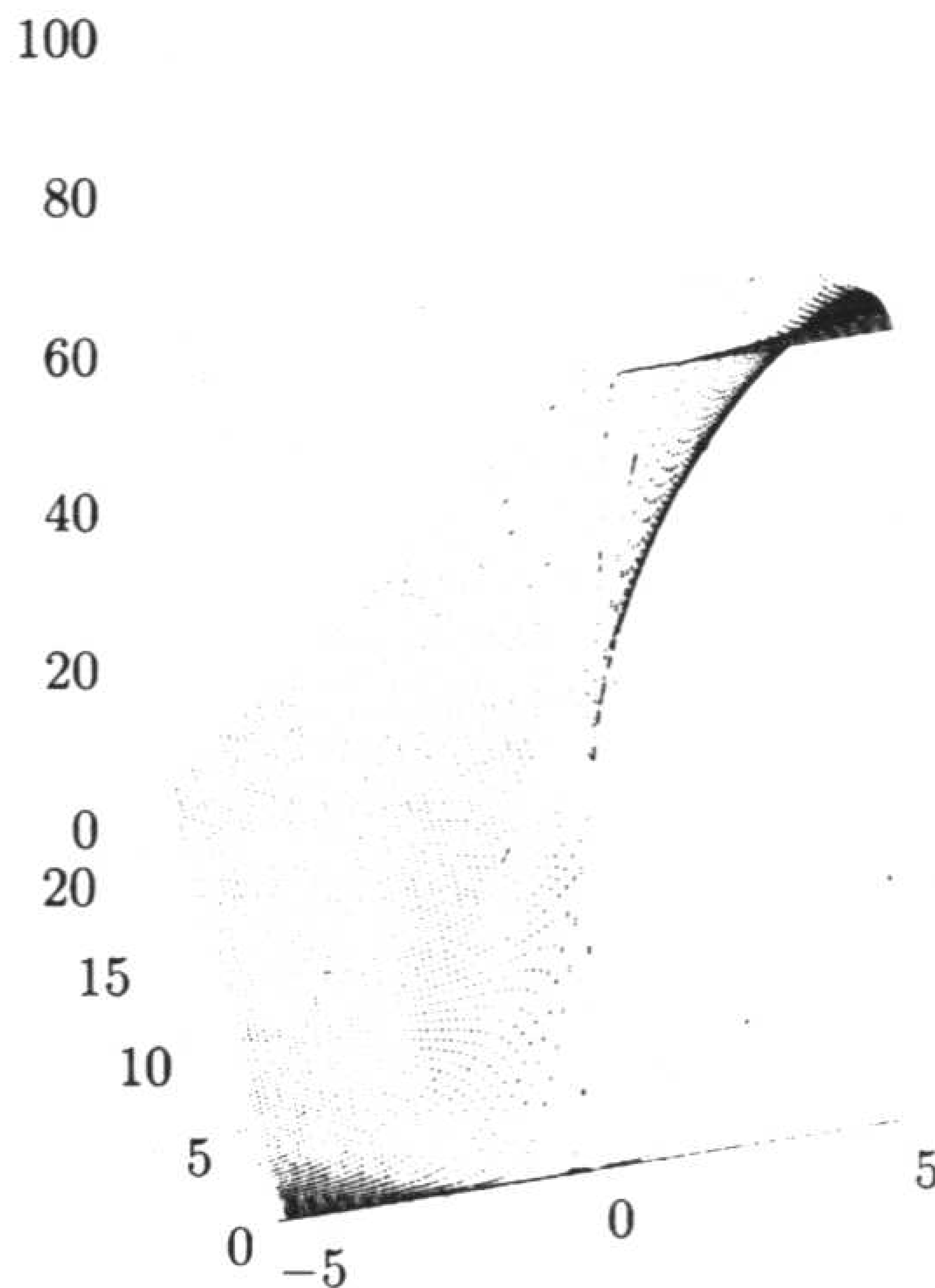


图 10.4.4　无穷长杆上的温度扩散

注意到，尽管在 $t=0$ 处，$x<0$ 时，$u=0$，但对任何正 $t(t>0)$，温度对所有 x 都是非零的．*热量以无穷速度扩展*．这是扩散方程的基本性质．它与第 12 章中描述的(也可见 10.6.1 节)有限传播速度的波动方程形成对比．

正态曲线下的面积已有很好的表. 可以用误差函数 $\operatorname{erf}z = (2/\sqrt{\pi})\int_0^z e^{-t^2}dt$ 或互补误差函数 $\operatorname{erfc}z = (2/\sqrt{\pi})\int_z^\infty e^{-t^2}dt = 1 - \operatorname{erf}z$ 来表示这个解. 利用这些函数,满足

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 100 & x > 0 \end{cases}$$

的解是

462

$$\boxed{u(x,t) = 50\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right)\right] = 50\left[2 - \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right)\right].}$$

相似解. 要寻找扩散方程 $\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的非常特殊解, 这种解具有在基本空间变量伸缩变换 $x = Lx'$ 下保持不变的性质. 而偏微分方程只在时间变量作伸缩变换 $t = L^2t'$ 时保持不变. 为了使解在这两种伸缩下都不变,

$$u(x,t) = f(x/t^{1/2}),$$

变量 $\xi = x/t^{1/2}$ 被称为相似变量. 由于 $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{x}{t^{3/2}}f'(\xi)$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{t}f''(\xi)$, 得到 $f(\xi)$ 满足线性常微分方程:

$$-\frac{1}{2}\xi f' = kf''.$$

这是 f' 的一阶方程, 其通解(应用分离变量)是

$$f' = c_1 e^{-\frac{\xi^2}{4k}}.$$

积分给出扩散方程的相似解

$$u(x,t) = f(x/t^{1/2}) = c_2 + c_1\int_0^{x/t^{1/2}} e^{-\frac{s^2}{4k}}ds = c_2 + c_3\int_0^{x/\sqrt{4kt}} e^{-z^2}dz,$$

其中无量纲形式($s = \sqrt{4k}z$)更好, 这也可以从量纲分析导出. 这些自相似解一定有特殊的自相似初始条件, 它在 $x = 0$ 处有一个阶跃, 因此, 这些解正好对应(10.4.9). 若假设 $u = t^{-\frac{1}{2}}g(\xi)$, 则可求得基本解(10.4.7), 它恰好以狄拉克 δ 函数为初始条件. 用相关的方法还可以获得其他解, 但这里只关注这些基本结果.

463

10.4.2 傅里叶变换热传导方程: 导数的变换

已经用分离变量法求解了无穷区间上的热传导方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad -\infty < x < \infty$$
$$u(x,0) = f(x). \tag{10.4.10}$$

分离变量给出了引入傅里叶变换的动机. 如果知道应当用傅里叶变换, 就能够避免使用分离变量. 下面说明这种更简单的方法; 对问题中的空间变量作傅里叶变换. 由热传导方程(10.4.10), $\partial u/\partial t$ 的傅里叶变换等于 k 倍的 $\partial^2 u/\partial x^2$ 之傅里叶变换:

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = k\,\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]. \qquad (10.4.11)$$

这样，需要计算 $u(x, t)$ 导数的傅里叶变换. 定义 $u(x, t)$ 的空间傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[u] = \bar{U}(\omega,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,e^{i\omega x}dx. \qquad (10.4.12)$$

注意这也是时间变量的函数；它是 t 取定值时的普通傅里叶变换. 为了求得(空间)傅里叶变换，先对 $u(x, t)$ 乘以 $e^{i\omega x}$，然后积分. 计算对时间导数的空间傅里叶变换并不难：

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial t}e^{i\omega x}dx = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\,e^{i\omega x}dx\right] = \frac{\partial}{\partial t}\bar{U}(\omega,t). \qquad (10.4.13)$$

对时间导数的空间傅里叶变换等于傅里叶变换对时间的导数.

更有趣(并且有用)的结果是对空间变量导数的空间傅里叶变换：

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial x}e^{i\omega x}dx = \frac{ue^{i\omega x}}{2\pi}\bigg|_{-\infty}^{\infty} - \frac{i\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\,e^{i\omega x}dx, \qquad (10.4.14)$$

464

上式用到了分部积分的化简：

$$df = \frac{\partial u}{\partial x}dx \qquad g = e^{i\omega x}$$

$$f = u \qquad dg = i\omega e^{i\omega x}dx.$$

若当 $x \to \pm\infty$ 时 $u \to 0$，则分部积分的端点基值是零. 于是表达式(10.4.14)变为

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = -i\omega\,\mathcal{F}[u] = -i\omega\,\bar{U}(\omega,t). \qquad (10.4.15)$$

相似地，高阶导数的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = -i\omega\,\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = (-i\omega)^2\,\bar{U}(\omega,t). \qquad (10.4.16)$$

一般来说，若当 $x \to \pm\infty$ 时，$u(x,t) \to 0$ 足够快，那么函数对 x 的 n 阶导数的傅里叶变换等于 $(-i\omega)^n$ 乘以函数的傅里叶变换[⊖].

对热传导方程(10.4.10)作傅里叶变换，得到(10.4.11). 由导数的傅里叶变换性质，(10.4.11)变为

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{U}(\omega,t) = k(-i\omega)^2\,\bar{U}(\omega,t) = -k\omega^2\,\bar{U}(\omega,t). \qquad (10.4.17)$$

因为对空间变量导数被变换成原变换的代数倍数，傅里叶变换把常系数线性偏微分方程变成了常微分方程.

方程(10.4.17)是一阶常系数微分方程，其通解是

$$\bar{U}(\omega,t) = ce^{-k\omega^2 t}.$$

不过，ω 固定时，$\partial/\partial t$ 是常导数，这样，ω 固定时，c 为常数. 对 ω 其他固定的值，c 可能是

⊖ 还需要高阶导数在 $x \to \pm\infty$ 时趋于零. 另外，在作分部积分时还需要相关函数是连续的.

不同的常数；c 的值与 ω 值相关. c 实际上是 ω 的一个任意函数 $c(\omega)$. 的确，由代换，易验证

465

$$\boxed{\bar{U}(\omega,t) = c(\omega)\mathrm{e}^{-k\omega^2 t}} \tag{10.4.18}$$

满足(10.4.17). 根据(10.4.18)，$c(\omega)$ 等于变换的初值(由对初始条件 $f(x)$ 的变换得到) $c(\omega) = 1/2\pi\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x$. 这与分离变量法得到的结果相同. 因此就可以重新给出前面求得的解，但下面要说明一种得到这些解的更简单方法.

10.4.3 卷积定理

易见 $\bar{U}(\omega, t)$ 是两个 ω 函数 $c(\omega)$ 和 $\mathrm{e}^{-k\omega^2 t}$ 的乘积，两个都是其他函数的傅里叶变换；$c(\omega)$ 是初始条件 $f(x)$ 的变换，$\mathrm{e}^{-k\omega^2 t}$ 是某个函数的变换(幸运的是，$\mathrm{e}^{-k\omega^2 t}$ 是一个高斯函数，已知它是另一个高斯函数 $\sqrt{\pi/kt}\mathrm{e}^{-x^2/4kt}$ 的变换). 求两个已知函数变换乘积的逆变换是很常见的数学问题(特别在用傅里叶变换解偏微分方程时). 这样，下面一般性地研究这个问题.

假设 $F(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 分别是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的傅里叶变换：

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x \qquad & G(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x \\ f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega \qquad & g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega. \end{aligned} \tag{10.4.19}$$

要确定函数 $h(x)$，其傅里叶变换 $H(\omega)$ 等于两个变换的乘积：

$$\boxed{H(\omega) = F(\omega)G(\omega)} \tag{10.4.20}$$

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega. \tag{10.4.21}$$

由(10.4.19)消去 $F(\omega)$ 或 $G(\omega)$，得到

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\bar{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\bar{x}}\mathrm{d}\bar{x}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega.$$

假定可以交换积分次序，那么

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\bar{x})\left[\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x-\bar{x})}\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}\bar{x}.$$

可看出内积分等于函数 $f(x-\bar{x})$ [参看(10.4.19)]，于是

466

$$\boxed{h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\bar{x})f(x-\bar{x})\mathrm{d}\bar{x}.} \tag{10.4.22}$$

(10.4.22)中的积分称为函数 $g(x)$ 和 $f(x)$ 的卷积；有时记为 $g*f$. 两个傅里叶变换乘积的逆变换是二个函数卷积的 $1/2\pi$ 倍.

若取 $x-\bar{x}=w\left(\mathrm{d}\bar{x} = -\mathrm{d}w \text{ 但}\int_{\infty}^{-\infty} = -\int_{-\infty}^{\infty}\right)$，可得到另一个表达式

$$\boxed{h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(w)g(x-w)\mathrm{d}w,} \tag{10.4.23}$$

将它记为 $f*g$，于是，$g*f=f*g$.

热传导方程. 现在就应用卷积定理于这里的偏微分方程. 解 $u(x, t)$ 的变换 $\bar{U}(\omega, t)$ 是 $c(\omega)$ 和 $e^{-k\omega^2 t}$ 的乘积，其中 $c(\omega)$ 是初始温度分布的变换，$e^{-k\omega^2 t}$ 是 $\sqrt{\pi/kt}\ e^{-x^2/4kt}$ 的变换. 因此，由卷积定理

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x})\sqrt{\frac{\pi}{kt}}e^{-(x-\bar{x})^2/4kt}d\bar{x}.}$$

这和前面已得到(讨论过)的结果相同. 总之，求解过程为：

1. 对偏微分方程进行傅里叶变换.
2. 求解常微分方程.
3. 应用初始条件，确定初始傅里叶变换.
4. 应用卷积定理.

通过利用卷积定理，就避免了对每个问题都要代入傅里叶逆变换和交换积分次序.

帕塞瓦尔恒等式. 由 $h(x)$ 是 $F(\omega)G(\omega)$ 的逆变换，卷积定理可以陈述为

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\bar{x})f(x-\bar{x})d\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\omega)e^{-i\omega x}d\omega. \tag{10.4.24}$$

(10.4.24)对任何 x 都成立. 特别地，在 $x=0$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\bar{x})f(-\bar{x})d\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\omega)d\omega. \tag{10.4.25}$$

如果取 $g(x)$ 满足

$$\boxed{g^*(x) = f(-x),} \tag{10.4.26}$$

467

会产生一个有趣的结果，这里 * 是复共轭. [对实函数 $g(x)$ 是函数 $f(x)$ 关于 $x=0$ 的反射.] 一般而言，它们的傅里叶变换是相联系的：

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(-s)e^{-i\omega s}ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g^*(x)e^{-i\omega x}dx = G^*(\omega), \end{aligned} \tag{10.4.27}$$

其中取 $s=-x$. 这样，(10.4.25)就是帕塞瓦尔恒等式

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)g^*(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)G^*(\omega)d\omega,} \tag{10.4.28}$$

其中 $g(x)g^*(x) = |g(x)|^2$ 和 $G(\omega)G^*(\omega) = |G(\omega)|^2$. 对于广义的傅里叶级数已经证明过类似的关系(见 5.10 节). 因此对公式(10.4.28)给出如下解释，通常单位距离的能量与 $|g(x)|^2$ 成比例，所以，$1/2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2dx$ 表示全部能量. 由(10.4.28)，$|G(\omega)|^2$ 可以定义为单位波数的能量(谱能量密度). 全部能量包含于所有波数之中. 函数 $g(x)$ 的傅里叶变换 $G(\omega)$ 模的平方是谱能量密度(单位波数的能量值)的一个复数量.

10.4.4 傅里叶变换性质小结

傅里叶变换表是非常有用的. 前面所获得的结果都总结在表 10.4.1 中.

表 10.4.1 傅里叶变换

$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{-i\omega x}d\omega$	$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\omega x}dx$	参考
$e^{-\alpha x^2}$ $\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}e^{-x^2/4\beta}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}}e^{-\omega^2/4\alpha}$ $e^{-\beta\omega^2}$	高斯函数(10.3.3 节)
$\frac{\partial f}{\partial t}$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$\frac{\partial F}{\partial t}$ $-i\omega F(\omega)$ $(-i\omega)^2F(\omega)$	导数(10.4.2 节)
$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\bar{x})g(x-\bar{x})d\bar{x}$	$F(\omega)G(\omega)$	卷积(10.4.3 节)
$\delta(x-x_0)$	$\frac{1}{2\pi}e^{i\omega x_0}$	狄拉克 δ 函数(习题 10.3.18)
$f(x-\beta)$	$e^{i\omega\beta}F(\omega)$	移位定理(习题 10.3.5)
$xf(x)$	$-i\frac{dF}{d\omega}$	用 x 乘(习题 10.3.8)
$\frac{2\alpha}{x^2+\alpha^2}$	$e^{-\lvert\omega\rvert\alpha}$	习题 10.3.7
$f(x)=\begin{cases}0 & \lvert x\rvert>a\\ 1 & \lvert x\rvert<a\end{cases}$	$\frac{1}{\pi}\frac{\sin a\omega}{\omega}$	习题 10.3.6

下面列出的是一些重要和能得到的傅里叶变换表. 请读者注意记号的不同.

F. Oberhettinger, *Tabellen zur Fourier Transformation*, Springer-Verlag, New York, 1957.

R. V. Churchill, *Operational Mathematics*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1972.

G. A. Campbell and R. M. Foster, *Fourier Integrals for Practical Applications*, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1948.

习题 10.4

10.4.1 用格林公式证明

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^2f}{dx^2}\right]=-\omega^2F(\omega)+\frac{e^{i\omega x}}{2\pi}\left(\frac{df}{dx}-i\omega f\right)\bigg|_{-\infty}^{\infty}.$$

10.4.2 对于热传导方程, 解 $u(x,t)$ 由(10.4.1)给出. 证明: 在 $x\to\infty$ 时 $u\to 0$, 即使 $x\to\infty$ 时 $\phi(x)=e^{-i\omega x}$ 不衰减. (提示: 用分部积分.)

10.4.3 *(a)求解带对流项的扩散方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+c\frac{\partial u}{\partial x}\quad -\infty<x<\infty$$
$$u(x,0)=f(x).$$

[提示：利用卷积定理和移位定理(见习题 10.4.5).]

(b)假设初始条件为 $\delta(x)$，对不同的 $t>0$，画出 $u(x,t)$ 的相应曲线. 并评述对流项 $c\partial u/\partial x$ 的重要性.

468
~
469

10.4.4 (a)求解

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\gamma u\quad -\infty<x<\infty$$
$$u(x,0)=f(x).$$

(b)在上面的求解过程中发现有一个简化的变换吗?

10.4.5 假设

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Q(x,t)\quad -\infty<x<\infty$$
$$u(x,0)=f(x).$$

(a)证明一个特解的傅里叶变换 $\bar{U}$ 是

$$\bar{U}=\mathrm{e}^{-k\omega^2 t}\int_0^t\bar{Q}(\omega,\tau)\mathrm{e}^{k\omega^2\tau}\mathrm{d}\tau.$$

(b)确定 $\bar{U}$.

(c)解出 $u(x,t)$(用可能的最简便形式).

*10.4.6 艾里函数 $\mathrm{Ai}(x)$ 是下列问题的唯一解：

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}-xy=0,$$

满足条件

(1) $\lim_{x\to\pm\infty}y=0$.

(2) $y(0)=3^{-2/3}/\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=3^{-2/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{3}/2\pi=1/\pi\int_0^\infty\cos(\omega^3/3)\mathrm{d}\omega$(不需要借助习题 10.4.15 和 10.4.17 的结果).

确定这个问题解 $\mathrm{Ai}(x)$ 的傅里叶变换表示.（提示：见习题 10.4.8.）

10.4.7 (a)求解线性化科尔泰沃赫–德弗里斯(KdV)方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\quad -\infty<x<\infty$$
$$u(x,0)=f(x).$$

(b)用卷积理论化简.

*(c)用习题 10.4.6 的结果作进一步化简.

(d)特殊化所得的结果，其中

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x>0.\end{cases}$$

10.4.8 求解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\qquad \begin{matrix}0<x<L\\ -\infty<y<\infty,\end{matrix}$$

其中

$$u(0,y) = g_1(y)$$

470

$$u(L,y) = g_2(y).$$

10.4.9 求解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \begin{matrix} y > 0 \\ -\infty < x < \infty, \end{matrix}$$

其中

$$u(x,0) = f(x).$$

（提示：如果需要，参考 10.7.3 节.）

10.4.10 求解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

（提示：如果需要，可参考 10.6.1 节.）

10.4.11 推导函数乘积 $f(x)g(x)$ 的傅里叶变换表达式.

10.5 傅里叶正弦和余弦变换：半无穷区间上的热传导方程

10.5.1 概述

前面看到，为求解在有限区间 $-L<x<L$ 上带周期边界条件的偏微分方程，引入了傅里叶级数. 对定义在区间 $0<x<L$ 上的问题，分析了傅里叶级数的特殊情形，正弦和余弦级数，使其满足适当的边界条件.

而在无穷区域 $-\infty<x<\infty$ 上，应用了傅里叶变换. 这一节，要讨论如何求解半无穷区间 $0<x<\infty$ 上的偏微分方程. 将引入傅里叶变换的特殊情形，正弦和余弦变换. 对傅里叶变换修改的想法与有限区间上级数的情形类似.

10.5.2 半无穷区间上的热传导方程 I

下面通过一个简单物理问题引入傅里叶正弦和余弦变换. 如果在 $x=0$ 处温度固定为 $0°$，那么在半无穷区间 $x>0$ 上，热扩散的数学问题是

$$\text{PDE:} \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0} \tag{10.5.1}$$

471

$$\text{BC:} \boxed{u(0,t) = 0} \tag{10.5.2}$$

$$\text{IC:} \boxed{u(x,0) = f(x).} \tag{10.5.3}$$

此问题中有一个边界条件，并且是齐次的.

如果对热传导方程分离变量

$$u(x,t) = \phi(x)h(t),$$

与前面一样得到

$$\frac{dh}{dt} = -\lambda kh \tag{10.5.4}$$

$$\boxed{\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda\phi.} \tag{10.5.5}$$

确定特征值 λ 的边界条件是

$$\boxed{\phi(0) = 0}. \tag{10.5.6}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}|\phi(x)| < \infty.} \tag{10.5.7}$$

通常假设$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，上面的第二个条件对应$\lim\limits_{x\to\infty}u(x,t)=0$.

仅对正的 $\lambda(\lambda>0)$，方程(10.5.5)才有满足(10.5.6)和(10.5.7)的非平凡解

$$\phi(x) = c_1\sin\sqrt{\lambda}x = c_1\sin\omega x, \tag{10.5.8}$$

其中，如傅里叶变换的情形，引入变量 $\omega=\sqrt{\lambda}$. 这里要求 $\omega>0$. 对应的时间相关函数是

$$h(t) = ce^{-\lambda kt} = ce^{-kt\omega^2}, \tag{10.5.9}$$

因此乘积解为

$$u(x,t) = A\sin\omega x e^{-kt\omega^2}. \tag{10.5.10}$$

由广义叠加原理，初值问题解的形式应该为

$$\boxed{u(x,t) = \int_0^\infty A(\omega)\sin\omega x e^{-k\omega^2 t}d\omega.} \tag{10.5.11}$$

472

要满足初始条件 $u(x,0)=f(x)$，只要

$$f(x) = \int_0^\infty A(\omega)\sin\omega x d\omega. \tag{10.5.12}$$

下一小节要证明 $A(\omega)$是$f(x)$的傅里叶正弦变换；$A(\omega)$可由(10.5.12)确定：

$$\boxed{A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx.} \tag{10.5.13}$$

10.5.3 傅里叶正弦和余弦变换

在前一小节中要求仅用正弦函数表示函数. 已知傅里叶变换，用复指数函数表示函数：

$$f(x) = \frac{1}{\gamma}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega x}d\omega \tag{10.5.14}$$

$$F(\omega) = \frac{\gamma}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}dx. \tag{10.5.15}$$

对任何 γ，(10.5.14)～(10.5.15)均成立.

傅里叶正弦变换. 由于打算在变换中仅用 $\sin\omega x$(对所有 ω)，考虑$f(x)$为奇函数的情形. 如果物理区域是 $x\geqslant 0$，那么函数对 $x<0$ 没有物理意义. 这样，对 $x<0$ 就可以随意定义函数；下面引入函数$f(x)$的奇延拓. 因此$f(x)\cos\omega x$ 是 x 的奇函数，$f(x)\sin\omega x$ 是 x 的偶函数. 其傅里叶变换 $F(\omega)$可简化为

$$F(\omega) = \frac{\gamma}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos\omega x + \mathrm{i}\sin\omega x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{i}\gamma}{2\pi}\int_0^{\infty} f(x)\sin\omega x\,\mathrm{d}x, \qquad (10.5.16)$$

注意 $F(\omega)$ 是 ω 的奇函数[当 $f(x)$ 为 x 的奇函数时]. 所以，类似地可得

$$f(x) = \frac{1}{\gamma}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)(\cos\omega x - \mathrm{i}\sin\omega x)\,\mathrm{d}\omega = \frac{-2\mathrm{i}}{\gamma}\int_0^{\infty} F(\omega)\sin\omega x\,\mathrm{d}\omega. \qquad (10.5.17)$$

其中 γ 可任意选择. 注意两个积分前系数的乘积是 $(2\mathrm{i}\gamma/2\pi)(-2\mathrm{i}/\gamma) = 2/\pi$，而不是傅里叶变换的 $1/2\pi$. 为方便，取 $-2\mathrm{i}/\gamma = 1$ (即 $\gamma = -2\mathrm{i}$)，使得若 $f(x)$ 是奇函数，

473

$$\boxed{f(x) = \int_0^{\infty} F(\omega)\sin\omega x\,\mathrm{d}\omega} \qquad (10.5.18)$$

$$\boxed{F(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\sin\omega x\,\mathrm{d}x.} \qquad (10.5.19)$$

也有人喜欢对称性定义，$-2\mathrm{i}/\gamma = \sqrt{2/\pi}$. 这两个表达式称为傅里叶正弦变换对. $F(\omega)$ 称为 $f(x)$ 的正弦变换，有时记为 $S[f(x)]$，而 $f(x)$ 称为 $F(\omega)$ 的逆正弦变换，记为 $S^{-1}[F(\omega)]$. (10.5.18)与(10.5.19)由对 x 奇函数的傅里叶变换公式而联系起来.

如果用 $f(x)$ 的正弦变换表示(10.5.18)，则在 $x=0$ 总得到零，即便 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq 0$. 等式(10.5.18)在 $x=0$ 并不总是成立. $f(x)$ 的奇延拓在 $x=0$ 有从 $-f(0)$ 到 $f(0)$ 的跳跃间断[若 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq 0$]. $f(x)$ 的傅里叶正弦变换表示收敛于平均值，其(在 $x=0$)为零.

傅里叶余弦变换. 类似地，若函数 $f(x)$ 为偶函数，可以推导出傅里叶余弦变换对：

$$\boxed{f(x) = \int_0^{\infty} F(\omega)\cos\omega x\,\mathrm{d}\omega} \qquad (10.5.20)$$

$$\boxed{F(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x\,\mathrm{d}x.} \qquad (10.5.21)$$

其他形式是等价的(只要两个数值系数的乘积为 $2/\pi$). $F(\omega)$ 称为 $f(x)$ 的余弦变换，有时记为 $C[f(x)]$，而 $f(x)$ 被称为 $F(\omega)$ 的逆余弦变换，记为 $C^{-1}[F(\omega)]$. 同样，如果 $f(x)$ 是只对 $x>0$ 定义的，为了使用傅里叶余弦变换，必须引入 $f(x)$ 的偶延拓.

傅里叶正弦和余弦变换的两个简表列在本节末尾(表 10.5.1 和表 10.5.2).

10.5.4 导数的变换

在 10.5.2 节，推出了导数的傅里叶变换的重要性质. 下面是傅里叶正弦和余弦变换的类似性质.

傅里叶余弦和正弦变换的定义是

474

$$\boxed{C[f(x)] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x\,\mathrm{d}x} \qquad (10.5.22)$$

$$\boxed{S[f(x)] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\sin\omega x\,\mathrm{d}x.} \qquad (10.5.23)$$

分部积分可用于得到一阶导数变换的公式：

$$C\left[\frac{df}{dx}\right] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{df}{dx}\cos\omega x dx = \frac{2}{\pi}f(x)\cos\omega x\Big|_0^\infty + \omega\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx$$

$$S\left[\frac{df}{dx}\right] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{df}{dx}\sin\omega x dx = \frac{2}{\pi}f(x)\sin\omega x\Big|_0^\infty - \omega\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx.$$

假设 $f(x)$ 是连续的即 $x\to\infty$ 时 $f(x)\to 0$. 就得到下面的公式：

$$\boxed{C\left[\frac{df}{dx}\right] = -\frac{2}{\pi}f(0) + \omega S[f]} \tag{10.5.24}$$

$$\boxed{S\left[\frac{df}{dx}\right] = -\omega C[f],} \tag{10.5.25}$$

从上面的两个公式可以看出，一阶导数的正弦变换包含余弦变换，一阶导数的余弦变换包含正弦变换. 这样，如果偏微分方程中包含要作变换变量的一阶导数，傅里叶正弦或余弦变换就不再有效. 此时不要使用傅里叶正弦或余弦变换. 注意热传导方程 $\partial u/\partial t = k\partial^2 u/\partial x^2$，要变换变量是 x. 方程中没有 x 的一阶导数.

二阶导数的变换有更简单的公式. 根据(10.5.24)和(10.5.25)，

$$\boxed{C\left[\frac{d^2f}{dx^2}\right] = -\frac{2}{\pi}\frac{df}{dx}(0) + \omega S\left[\frac{df}{dx}\right] = -\frac{2}{\pi}\frac{df}{dx}(0) - \omega^2 C[f]} \tag{10.5.26}$$

$$\boxed{S\left[\frac{d^2f}{dx^2}\right] = -\omega C\left[\frac{df}{dx}\right] = \frac{2}{\pi}\omega f(0) - \omega^2 S[f].} \tag{10.5.27}$$

由(10.5.26)和(10.5.27)得到一些重要原理. 为了应用傅里叶余弦变换求解定义在半无穷区间($x\geq 0$)的偏微分方程(包含二阶导数)，必须知道 $df/dx(0)$. 类似地，如果给定 $f(0)$，傅里叶正弦变换可以用于求解半无穷区间问题，而且，如果边界条件是齐次的，能更好地求解问题. 如果 $f(0)=0$，傅里叶正弦变换通常会给出一个相对简单的解. 如果 $df/dx(0)=0$，傅里叶余弦变换时常是会极其方便的. 这些条件并不奇怪，如果 $f(0)=0$，分离变量建议只用正弦. 类似地，$df/dx(0)=0$ 表明要用余弦变换. [475]

10.5.5 半无穷区间上的热传导方程 II

现在说明如何应用导数的变换公式求解偏微分方程. 考虑一个比前面更一般的问题. 假设要研究半无穷区间上的热流问题，在 $x=0$ 处设定的温度是时间的函数：

$$\text{PDE:}\ \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \tag{10.5.28}$$

$$\text{BC:}\ \boxed{u(0,t) = g(t)} \tag{10.5.29}$$

$$\text{IC:}\ \boxed{u(x,0) = f(x).} \tag{10.5.30}$$

边界条件 $u(0,t)=g(t)$ 是非齐次的. 不能用分离变量法. 既然 $0<x<\infty$，可以试着用变换法. 由于在 $x=0$ 处指定了 u，应尽量用傅里叶正弦变换(而不是傅里叶余弦变换). 这样，引入函数 $u(x,t)$ 的傅里叶正弦变换 $\bar{U}(\omega,t)$：

$$\bar{U}(\omega,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty u(x,t)\sin\omega x \mathrm{d}x. \tag{10.5.31}$$

利用(10.5.27)，偏微分方程(10.5.28)变成常微分方程

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = k\left(\frac{2}{\pi}\omega g(t) - \omega^2 \bar{U}\right), \tag{10.5.32}$$

由初始条件给出傅里叶正弦变换的初值：

$$\bar{U}(\omega,0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x \mathrm{d}x. \tag{10.5.33}$$

一般来说求解(10.5.32)有些复杂(用到积分因子 $\mathrm{e}^{k\omega^2 t}$；见 8.3 节)，所以把这部分讨论留

476 作习题.

例. 对齐次边界条件的特殊情形，$g(t)=0$，由方程(10.5.32)得到

$$\bar{U}(\omega,t) = c(\omega)\mathrm{e}^{-k\omega^2 t}, \tag{10.5.34}$$

其中由初始条件

$$c(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x \mathrm{d}x. \tag{10.5.35}$$

因此，所求的解是

$$u(x,t) = \int_0^\infty c(\omega)\mathrm{e}^{-k\omega^2 t}\sin\omega x \mathrm{d}\omega. \tag{10.5.36}$$

这是前面用分离变量所得到的解. 为了化简，注意 $c(\omega)$ 是 ω 的奇函数，这样

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty c(\omega)\mathrm{e}^{-k\omega^2 t}\sin\omega x \mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^\infty \frac{c(\omega)}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-k\omega^2 t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega. \tag{10.5.37}$$

如果引入 $f(x)$ 的奇延拓，那么

$$\frac{c(\omega)}{2\mathrm{i}} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\frac{\sin\omega x}{2\mathrm{i}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x)\frac{\sin\omega x}{2\mathrm{i}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x. \tag{10.5.38}$$

注意：(10.5.37)和(10.5.38)正是热传导方程在半无穷区域上的解. 于是

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^\infty f(\bar{x})\mathrm{e}^{-(x-\bar{x})^2/4kt}\mathrm{d}\bar{x}.$$

这里，$f(x)$ 奇拓展到 $-\infty < x < \infty$ 上 $[f(-x) = -f(x)]$. 为了只在 $\bar{x}>0$ 上用 $f(\bar{x})$，由奇数性质

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\left[\int_{-\infty}^0 -f(-\bar{x})\mathrm{e}^{-(x-\bar{x})^2/4kt}\mathrm{d}\bar{x} + \int_0^\infty f(\bar{x})\mathrm{e}^{-(x-\bar{x})^2/4kt}\mathrm{d}\bar{x}\right].$$

在第一个积分中，设 $\bar{x} = -\bar{\bar{x}}$ (然后用 $\bar{x}$ 代替 $\bar{\bar{x}}$). 这样就有

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_0^\infty f(\bar{x})\left[\mathrm{e}^{-(x-\bar{x})^2/4kt} - \mathrm{e}^{-(x+\bar{x})^2/4kt}\right]\mathrm{d}\bar{x}. \tag{10.5.39}$$

括号里的函数是初始条件的影响函数. 有关解的进一步讨论放在第 11 章. 从(10.5.34)和(10.5.35)得到(10.5.39)的一个(更简单)等价方法是利用傅里叶正弦变换的卷积定理

477 (见习题 10.6.6).

10.5.6 傅里叶正弦和余弦变换表

下面给出简短的傅里叶正弦变换表(表 10.5.1)和傅里叶余弦变换表(表 10.5.2).

表 10.5.1 傅里叶正弦变换

$f(x)=\int_0^\infty F(\omega)\sin\omega x\,d\omega$	$S[f(x)]=F(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,dx$	参 考
$\frac{df}{dx}$	$-\omega C[f(x)]$	导数(10.5.4 节)
$\frac{d^2f}{dx^2}$	$\frac{2}{\pi}\omega f(0)-\omega^2F(\omega)$	导数(10.5.4 节)
$\frac{x}{x^2+\beta^2}$	$e^{-\omega\beta}$	习题 10.5.1
$e^{-\varepsilon x}$	$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\omega}{\varepsilon^2+\omega^2}$	习题 10.5.2
1	$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\omega}$	习题 10.5.9
$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(\bar{x})[g(x-\bar{x})-g(x+\bar{x})]d\bar{x}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty g(\bar{x})[f(x+\bar{x})-f(\bar{x}-x)]d\bar{x}$	$S[f(x)]C[g(x)]$	卷积(习题10.5.6)

表 10.5.2 傅里叶余弦变换

$f(x)=\int_0^\infty F(\omega)\cos\omega x\,d\omega$	$C[f(x)]=F(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\,dx$	参 考
$\frac{df}{dx}$	$-\frac{2}{\pi}f(0)+\omega S[f(x)]$	导数(10.5.4 节)
$\frac{d^2f}{dx^2}$	$-\frac{2}{\pi}\frac{df}{dx}(0)-\omega^2F(\omega)$	导数(10.5.4 节)
$\frac{\beta}{x^2+\beta^2}$	$e^{-\omega\beta}$	习题 10.5.1
$e^{-\varepsilon x}$	$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\omega^2}$	习题 10.5.2
$e^{-\alpha x^2}$	$2\frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}}e^{-\omega^2/4\alpha}$	习题 10.5.3
$\int_0^\infty g(\bar{x})[f(x-\bar{x})+f(x+\bar{x})]d\bar{x}$	$F(\omega)G(\omega)$	卷积(习题10.5.7)

478

习题 10.5

10.5.1 设 $F(\omega)=e^{-\omega\beta}$, $\beta>0(\omega\geqslant0)$.

(a)推导 $F(\omega)$ 的傅里叶逆正弦变换.

(b)推导 $F(\omega)$ 的傅里叶逆余弦变换.

10.5.2 设 $f(x)=e^{-\alpha x}$, $\alpha>0(x\geqslant0)$.

(a)推导 $f(x)$ 的傅里叶正弦变换.

(b)推导 $f(x)$ 的傅里叶余弦变换.

*10.5.3 推导 $e^{-\alpha x^2}$ 的傅里叶余弦变换或傅里叶正弦变换.

10.5.4 (a)用格林公式推导公式(10.5.26).

(b)用格林公式推导公式(10.5.27).

10.5.5 (a)证明 $f(x)$ 的傅里叶正弦变换是 ω 的奇函数(如果对所有的 ω 定义).

(b)证明 $f(x)$ 的傅里叶余弦变换是 ω 的偶函数(如果对所有的 ω 定义).

10.5.6 对傅里叶正弦变换存在一个有趣的卷积型定理. 假设要求 $h(x)$，但仅知道它的正弦变换 $H(\omega)$ 是个乘积

$$H(\omega) = \bar{S}(\omega)\bar{C}(\omega),$$

其中 $\bar{S}(\omega)$ 是 $s(x)$ 的正弦变换，$\bar{C}(\omega)$ 是 $c(x)$ 的余弦变换. 假定 $c(x)$ 是偶函数，$s(x)$ 是奇函数，证明

$$h(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty s(\bar{x})[c(x-\bar{x}) - c(x+\bar{x})]\mathrm{d}\bar{x} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty c(\bar{x})[s(x+\bar{x}) - s(\bar{x}-x)]\mathrm{d}\bar{x}.$$

10.5.7 证明：如果傅里叶余弦变换 $H(\omega)$ 是两个傅里叶余弦变换的乘积：

$$H(\omega) = F(\omega)G(\omega),$$

那么

$$h(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty g(\bar{x})[f(x-\bar{x}) + f(x+\bar{x})]\mathrm{d}\bar{x}.$$

479 其中 f 与 g 可以交换.

10.5.8 利用习题 10.5.6 中的卷积定理求解(10.5.1)~(10.5.3). 可参阅习题 10.5.3.

10.5.9 设 $S[f(x)]$ 表示 $f(x)$ 的傅里叶正弦变换.

(a)证明：

$$S[e^{-\varepsilon x}] = \frac{2}{\pi}\frac{\omega}{\varepsilon^2+\omega^2}, \quad \varepsilon > 0,$$

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} S[e^{-\varepsilon x}] = 2/\pi\omega$. 下面设 $S[1] = 2/\pi\omega$. 为什么以极限定义 $S[1]$?

(b)证明：

$$S^{-1}\left[\frac{2/\pi}{\omega}\right] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z,$$

已经知道它等于 1.

*10.5.10 求 $\omega e^{-\omega\alpha}$ 的傅里叶逆余弦变换. (提示：利用对参数求导.)

*10.5.11 假设

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \begin{matrix} x > 0 \\ t > 0 \end{matrix}$$

$$u(0,t) = 1$$

$$u(x,0) = f(x).$$

(a)直接用正弦变换求解. (提示：用习题 10.5.8 和习题 10.5.6 的卷积定理.)

(b)如果 $x\to\infty$ 时 $f(x)\to 1$，设 $v(x,t) = u(x,t) - 1$，求解 $v(x,t)$.

(c)比较(a)与(b).

10.5.12 求解

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x > 0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$$

$$u(x,0) = f(x).$$

10.5.13 通过求解方程(10.5.32)来求解(10.5.28)~(10.5.30).

10.5.14 设

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v_0\frac{\partial u}{\partial x} \quad (x > 0)$$

$$u(0,t) = 0$$

$$u(x,0) = f(x).$$

(a)证明傅里叶正弦变换不能直接给出解.

480

(b)引入

$$u = e^{[x-(v_0/2)t]v_0/2k}w,$$

并证明

$$\frac{\partial w}{\partial t} = k\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$w(0,t) = 0$$

$$w(x,0) = f(x)e^{-v_0x/2k}.$$

(c)用(b)求解 $u(x,\ t)$.

10.5.15 求解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \begin{matrix} 0 < x < L \\ 0 < y < \infty \end{matrix}$$

$$u(x,0) = 0$$

$$u(0,y) = g_1(y)$$

$$u(L,y) = g_2(y).$$

(提示：可参考 10.7.2 节.)

10.5.16 求解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \begin{matrix} 0 < x < \infty \\ 0 < y < \infty \end{matrix}$$

$$u(0,y) = g(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}u(x,0) = 0.$$

(提示：可参考 10.7.4 节.)

10.5.17 周期(按天或按季)地表加热对地球内部的影响可以有如下数学模型：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < \infty$$

$$u(x,0) = 0$$

$$u(0,t) = Ae^{i\omega_0 t},$$

其中 $u(x,\ t)$ 的实部表示温度(x 表示离地表的距离).

(a)求 $u(x,\ t)$ 的傅里叶正弦变换 $\bar{U}(\omega,\ t)$.

*(b)对大 t，近似 $\bar{U}(\omega,\ t)$.

(c)为了得到对大 t 成立的 $u(x,\ t)$ 的近似，求(b)结果的傅里叶逆正弦变换. [提示：可参考习题 10.5.2(a)或表 10.5.1.]

(d)作近似的温度曲线图(固定的大 t).

(e)在地表下多少距离时，温度变化可以忽略？

10.5.18 重做习题 10.5.17，准确求出 $u(x,\ t)$. (提示：可参考习题 10.5.6.)

481

10.5.19 (a)确定习题 10.5.17 满足边界条件(非初始条件) $u(x,\ t) = F(x)G(t)$ 形式的特解.

(b)把(a)的结果与习题 10.5.17 或习题 10.5.18 的结果进行比较.

10.6 应用变换求解的例子

10.6.1 无穷区间上的一维波动方程

前面分析了有限区间 $0\leqslant x\leqslant L$ 上的振动弦. 这里要研究无穷区间上的振动弦. 分析无穷区间(或半无穷区间)振动弦的最好方法是第12章中介绍的特征线法. 在那里对波的传播概念作了更深入完全的讨论. 这里只分析下面的例子, 并简要介绍如何用傅里叶变换求解一维波动方程:

$$\text{PDE:}\ \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad -\infty<x<\infty} \tag{10.6.1}$$

$$\text{IC1:}\ \boxed{u(x,0)=f(x)} \tag{10.6.2}$$

$$\text{IC2:}\ \boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0.} \tag{10.6.3}$$

此处给定弦的初始位置 $f(x)$, 为了数学上的简单化, 要求弦是静止的, $\partial u/\partial t(x, 0)=0$.

可以用分离变量得到乘积解. 但这里要用 $u(x, t)$ 的傅里叶变换:

$$\bar{U}(\omega,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{i\omega x}dx \tag{10.6.4}$$

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\bar{U}(\omega,t)e^{-i\omega x}d\omega. \tag{10.6.5}$$

对一维波动方程作傅里叶变换得到

482

$$\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial t^2}=-c^2\omega^2\bar{U}, \tag{10.6.6}$$

其中初始条件变为

$$\bar{U}(\omega,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\omega x}dx \tag{10.6.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{U}(\omega,0)=0. \tag{10.6.8}$$

(10.6.6)的通解是正弦与余弦的一个线性组合:

$$\bar{U}(\omega,t)=A(\omega)\cos c\omega t+B(\omega)\sin c\omega t. \tag{10.6.9}$$

由初始条件可得

$$B(\omega)=0 \tag{10.6.10}$$

$$A(\omega)=\bar{U}(\omega,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\omega x}dx. \tag{10.6.11}$$

应用傅里叶逆变换, 一维波动方程的解为

$$\boxed{u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\bar{U}(\omega,0)\cos c\omega t\,e^{-i\omega x}d\omega,} \tag{10.6.12}$$

其中 $\bar{U}(\omega, 0)$ 是初始位置的傅里叶变换.

该解可以大大地简化. 利用欧拉公式,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}(\omega,0)[e^{-i\omega(x-ct)} + e^{-i\omega(x+ct)}]d\omega. \tag{10.6.13}$$

然而，$\bar{U}(\omega, 0)$是$f(x)$的傅里叶变换，因而

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}(\omega,0)e^{-i\omega x}d\omega. \tag{10.6.14}$$

比较(10.6.13)与(10.6.14)，得到

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-ct) + f(x+ct)].} \tag{10.6.15}$$

对于(由静止开始的)无穷弦，其解是$\frac{1}{2}f(x-ct)$与$\frac{1}{2}f(x+ct)$两项之和. $\frac{1}{2}f(x-ct)$是形状固定的波形. 如果 $x-ct$ 是常数，其波形的高度固定. 于是 $dx/dt = c$. 例如，原点对应 $x=ct$. 假定 $c>0$，该固定波形以速度 c 向右移动. 它称为行波. 类似地，$\frac{1}{2}f(x+ct)$是波形固定的左行波(速度为 c). 这个结果的解释是：如果从静止开始，弦的初始位置分裂成两个，以相同的速度 c，一半向左移动，另一半向右移动；其解就是两个行波的和. 483

10.6.2 半无穷带上的拉普拉斯方程

在半无穷带($0<x<L$, $y>0$)上稳态热传导的数学问题是

$$\boxed{\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0} \tag{10.6.16}$$

$$\boxed{u(0,y) = g_1(y)} \tag{10.6.17}$$

$$\boxed{u(L,y) = g_2(y)} \tag{10.6.18}$$

$$\boxed{u(x,0) = f(x).} \tag{10.6.19}$$

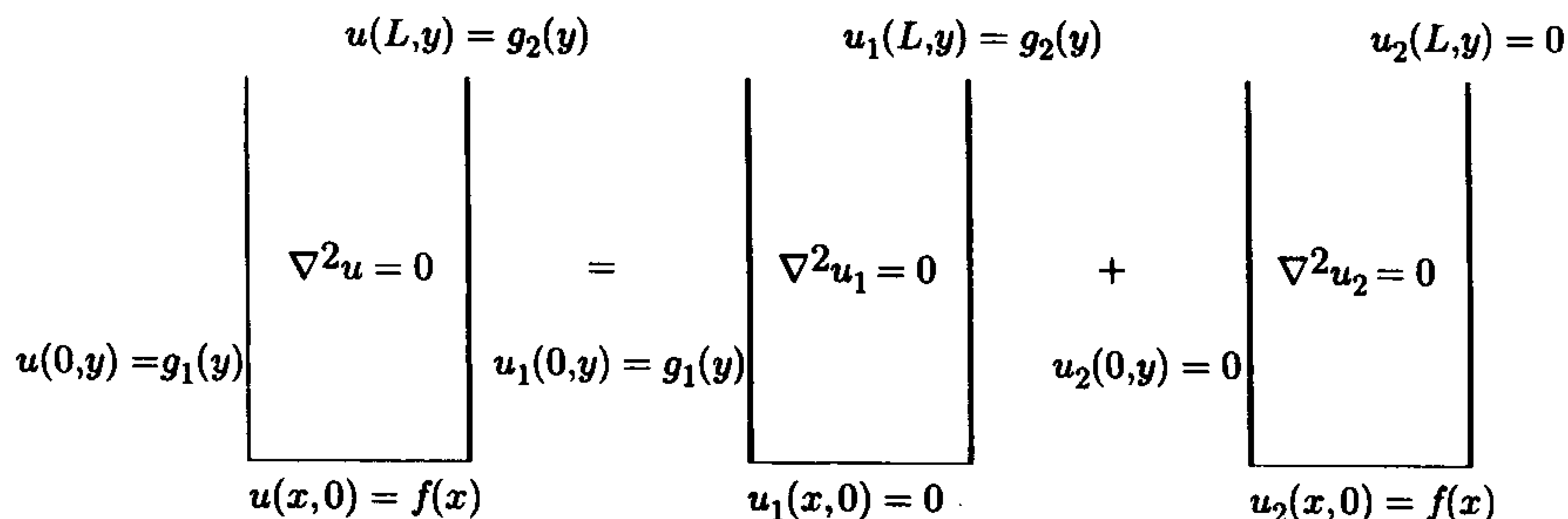


图 10.6.1 半无穷带上的拉普拉斯方程

假定 $y\to\infty$ 时，$g_1(y)$和 $g_2(y)$趋于零. 图 10.6.1 展示了三个非齐次边界条件及其简化

$$\boxed{u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y),} \tag{10.6.20}$$

其中 u_1 和 u_2 满足拉普拉斯方程. 半无穷带上拉普拉斯方程的分离变量对解法提供了启示：

$$u(x,y) = \phi(x)\theta(y), \tag{10.6.21}$$

484

此时

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda\phi \tag{10.6.22}$$

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} = \lambda\theta. \tag{10.6.23}$$

而对于特征值问题，两个齐次边界条件是必要的. 这就是为何要把问题分成两部分.

零温度侧面. 对于 u_2 问题，在 $x=0$ 和 $x=L$ 都有 $u_2=0$. 这样，x 的微分方程是定义在有限区间上的特征值问题. 而边界条件正是 x 的傅里叶正弦级数的条件. 依赖 y 的解是指数函数. 因此对于 u_2，分离解是

$$u_2(x,y) = \sin\frac{n\pi x}{L}e^{-n\pi y/L} \quad 和 \quad u_2(x,y) = \sin\frac{n\pi x}{L}e^{+n\pi y/L}.$$

由叠加原理得到

$$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{L}e^{-n\pi y/L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}e^{n\pi y/L}. \tag{10.6.24}$$

当 $y\to\infty$ 时 $u_2\to 0$ 就有 $b_n=0$，u_2 还有另外两个条件：

$$u_2(x,0) = f(x) \tag{10.6.25}$$

$$\lim_{y\to\infty} u_2(x,y) = 0. \tag{10.6.26}$$

非齐次条件为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{10.6.27}$$

于是 a_n 是在 $y=0$ 非齐次边界条件的傅里叶正弦系数：

$$\boxed{a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.} \tag{10.6.28}$$

由这些系数，解就是

$$\boxed{u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{L}e^{-n\pi y/L}.} \tag{10.6.29}$$

485 u_2 问题的求解根本不需要用傅里叶变换. u_2 的偏微分方程在本书中早就分析过了(例如第 2 章).

零温度底面. 对于 u_1 问题，第二个齐次边界条件是不明显的，

$$u_1(x,0) = 0 \tag{10.6.30}$$

$$\lim_{y\to\infty} u_1(x,y) = 0. \tag{10.6.31}$$

依赖 y 的部分是边值问题. $y\to\infty$ 时，"分离"解要保持有界(不必为零). 对(10.6.23)合适的解是正弦和余弦(对应 $\lambda<0$). 在 $y=0$ 的齐次边界条件(10.6.30)意味着只应当采用正弦. 下面不再讨论分离变量法，而是引入 y 的傅里叶正弦变换：

$$\boxed{u_1(x,y) = \int_0^{\infty} \bar{U}_1(x,\omega)\sin\omega y\, d\omega.} \tag{10.6.32}$$

$$\bar{U}_1(x,\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} u_1(x,y)\sin\omega y\, dy. \tag{10.6.33}$$

直接对拉普拉斯方程(10.6.16)关于 y 作傅里叶正弦变换. 而导数的变换性质表明拉普拉斯方

程变成了常微分方程：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{U}_1(x,\omega)-\omega^2\bar{U}_1(x,\omega)=0. \tag{10.6.34}$$

这个结果的化简用到了在 $y=0$ 的边界条件 $u_1(x,\ 0)=0$. (10.6.34)的解是非振荡(指数)函数的一个线性组合. 其实用下面的双曲线函数是最简便的(虽然不必需)：

$$\boxed{\bar{U}_1(x,\omega)=a(\omega)\sinh\omega x+b(\omega)\sinh\omega(L-x).} \tag{10.6.35}$$

在 $x=0$ 和 $x=L$ 的两个非齐次条件给出

$$\boxed{\bar{U}_1(0,\omega)=b(\omega)\sinh\omega L=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty g_1(y)\sin\omega y\mathrm{d}y} \tag{10.6.36}$$

$$\boxed{\bar{U}_1(L,\omega)=a(\omega)\sinh\omega L=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty g_2(y)\sin\omega y\mathrm{d}y.} \tag{10.6.37}$$

486

$u_1(x,\ y)$的傅里叶正弦变换$\bar{U}_1(x,\ \omega)$由(10.6.35)给出，其中的 $a(\omega)$和 $b(\omega)$由(10.6.36)和(10.6.37)确定[⊖]. 这就求得了拉普拉斯方程在半无穷带上有点复杂的解. 它是两个解之和，一个是由傅里叶正弦级数求得，另一个是由傅里叶正弦变换求得.

非齐次边界条件. 如果指望，不拆成两个问题，而直接对带三个非齐次边界条件(10.6.17)~(10.6.19)的拉普拉斯方程(10.6.16)，关于 y 作傅里叶正弦变换：

$$\boxed{u(x,y)=\int_0^\infty \bar{U}(x,\omega)\sin\omega y\mathrm{d}\omega.} \tag{10.6.38}$$

由于在 $y=0$ 的边界条件 $u(x,\ 0)=f(x)$是非齐次的，所以拉普拉斯方程(10.6.16)的傅里叶正弦变换多出来一项：

$$\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial y^2}-\omega^2\bar{U}=-\frac{2}{\pi}\omega f(x). \tag{10.6.39}$$

此时，傅里叶正弦变换满足二阶线性常系数非齐次常微分方程. 这个方程必须在 $x=0$ 和 $x=L$ 处的两个非齐次边界条件下求解. 可以用参数变易法求解方程(10.6.39). 这个解大概要比由级数与变换和所组成的解更复杂，而且它在 $y=0$ 处还有一个跳跃间断；(10.6.38)中的积分在 $y=0$ 时为零，而 $y\to0$ 时收敛于 $f(x)$. 通常，把这个问题分成两个问题是更可取的.

10.6.3　半平面上的拉普拉斯方程

如果在无穷障碍 $y=0$ 上温度指定为 $f(x)$，那么对 $y>0$ 的定常温度分布函数满足拉普拉斯方程

$$\boxed{\nabla^2u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0,} \tag{10.6.40}$$

其边界条件是

$$\boxed{u(x,0)=f(x).} \tag{10.6.41}$$

487

⊖ 不巧的是，$\bar{U}_1(x,\ \omega)$并不是两个简单函数变换的乘积. 因此，这里不用卷积定理.

如果 $x\to\pm\infty$ 时 $f(x)\to 0$，则有另外三个暗含的边界条件，

$$\lim_{x\to+\infty} u(x,y) = 0 \tag{10.6.42}$$

$$\lim_{x\to-\infty} u(x,y) = 0 \tag{10.6.43}$$

$$\lim_{y\to+\infty} u(x,y) = 0; \tag{10.6.44}$$

在离障碍的距离远时，温度趋于零.

分离变量法导致使用对 x 的傅里叶变换，因为 $x\to\pm\infty$ 时，有两个齐次边界条件：

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}(\omega,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega \tag{10.6.45}$$

$$\bar{U}(\omega,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x. \tag{10.6.46}$$

对方程(10.6.40)关于 x 作傅里叶变换，得到变换满足的常微分方程

$$\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial y^2} - \omega^2\bar{U} = 0. \tag{10.6.47}$$

由 $y\to+\infty$ 时 $u(x, y)\to 0$，关于 x 的傅里叶变换当 $y\to+\infty$ 时也趋于零，即

$$\bar{U}(\omega,y)\to 0,\quad 当\ y\to+\infty. \tag{10.6.48}$$

另外，在 $y=0$ 处，$\bar{U}(\omega, 0)$是边界条件的傅里叶变换：

$$\bar{U}(\omega,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x. \tag{10.6.49}$$

一定要小心求解方程(10.6.47)，对于所有关心的 ω，方程的通解是

$$\bar{U}(\omega,y) = a(\omega)\mathrm{e}^{\omega y} + b(\omega)\mathrm{e}^{-\omega y}, \tag{10.6.50}$$

有两个边界条件可确定这两个任意函数 $a(\omega)$ 和 $b(\omega)$. 方程(10.6.48)表明 $y\to+\infty$ 时，$\bar{U}(\omega, y)\to 0$. 起初可能会认为 $a(\omega)=0$，这是不对的. 而应当是，$y\to+\infty$ 时，要 $\bar{U}(\omega, y)$ 趋于零，只在 $\omega>0$ 时 $a(\omega)=0$. 若 $\omega<0$，$y\to+\infty$ 时，$b(\omega)\mathrm{e}^{-\omega y}$指数增长. 这样，$\omega<0$ 时，$b(\omega)=0$. 因此证明了

$$\bar{U}(\omega,y) = \begin{cases} a(\omega)\mathrm{e}^{\omega y} & 对\ \omega<0 \\ b(\omega)\mathrm{e}^{-\omega y} & 对\ \omega>0, \end{cases}$$

其中 $a(\omega)$在 $\omega<0$ 时是任意的，而 $b(\omega)$在 $\omega>0$ 时任意. 对所有 ω，较方便的等价表示是

488

$$\boxed{\bar{U}(\omega,y) = c(\omega)\mathrm{e}^{-|\omega|y},} \tag{10.6.51}$$

非齐次边界条件(10.6.41)表明 $c(\omega)$是障碍上温度 $f(x)$ 的傅里叶变换. 这就完成了求解过程. 下面要确定一种更简单的解表达式.

卷积定理的应用. 化简解的最简单方法是注意到 $\bar{U}(\omega, y)$是两个傅里叶变换的乘积. $f(x)$ 有傅里叶变换 $c(\omega)$，而未知函数 $g(x, y)$有傅里叶变换 $\mathrm{e}^{-|\omega|y}$. 由卷积定理，问题的解是

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x})g(x-\bar{x},y)\mathrm{d}\bar{x}. \tag{10.6.52}$$

现在需要确定什么函数 $g(x, y)$有傅里叶变换 $\mathrm{e}^{-|\omega|y}$. 由逆变换积分公式

$$g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\omega| y} e^{-i\omega x} d\omega,$$

这可以直接积分

$$g(x,y) = \int_{-\infty}^{0} e^{\omega y} e^{-i\omega x} d\omega + \int_{0}^{\infty} e^{-\omega y} e^{-i\omega x} d\omega$$

$$= \left.\frac{e^{\omega(y-ix)}}{y-ix}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{-\omega(y+ix)}}{-(y+ix)}\right|_{0}^{\infty} = \frac{1}{y-ix} + \frac{1}{y+ix} = \frac{2y}{x^2+y^2}.$$

于是，半平面上($y>0$)拉普拉斯方程满足 $u(x,\ 0)=f(x)$ 的解是

$$\boxed{u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x})\ \frac{2y}{(x-\bar{x})^2+y^2} d\bar{x}.} \qquad (10.6.53)$$

这个解是在假定 $x\to\pm\infty$ 时，$f(x)\to 0$ 条件下得到的. 事实上，粗略地说，只要积分收敛，它就成立. 在第 9 章用格林函数得到了(10.6.53)式. 那里证明了[见(9.5.47)]，非齐次边界条件的影响函数[见(10.6.53)]是格林函数(关于源点)的外法向导数：

$$-\left.\frac{\partial}{\partial \bar{y}} G(x,y;\bar{x},\bar{y})\right|_{\bar{y}=0} = \frac{y}{\pi}\frac{1}{(x-\bar{x})+y^2},$$

其中 $G(x,\ x_0)$ 是格林函数——源点在半平面($y>0$)内的影响函数. 489

例. 一个简单而有趣的解是取

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x>0. \end{cases} \qquad (10.6.54)$$

这个边界条件对应均匀加热为两个不同温度的障碍，要确定对 $y>0$ 的平衡温度分布. 由(10.6.53)，

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{2y}{y^2+(x-\bar{x})^2} d\bar{x} = \left.\frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\bar{x}-x}{y}\right)\right|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1}\left(\frac{-x}{y}\right)\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)\right]. \qquad (10.6.55)$$

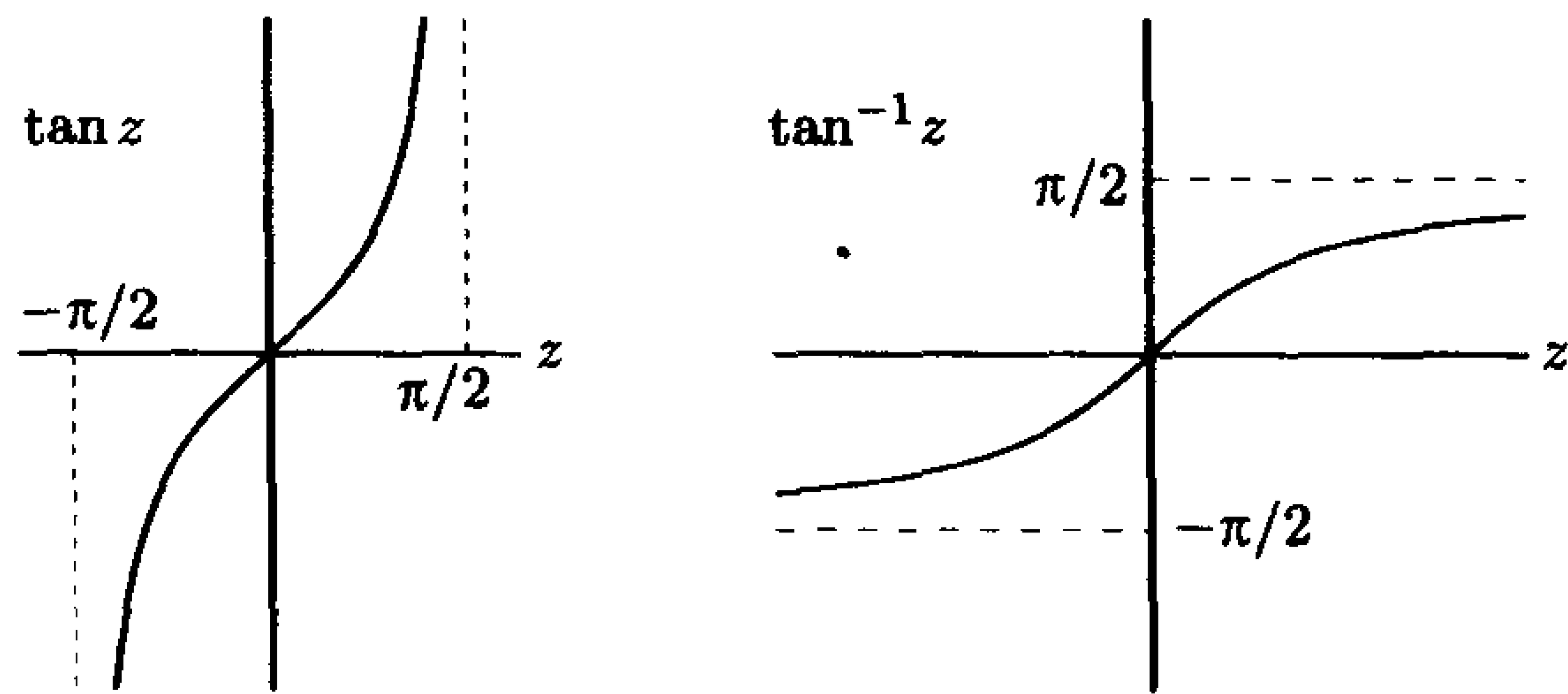


图 10.6.2 正切与反正切函数

沿着反正切函数的连续分支计算时要仔细些. 图 10.6.2 中的正切函数与反正切函数的图像是有帮助的. 如果引入通常以 x 轴为起始边的 θ 角，

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right),$$

则温度分布函数为

$$\boxed{u(x,y) = 1 - \frac{\theta}{\pi}.} \tag{10.6.56}$$

可以单独检验这个结果，在极坐标中重新考虑．其中的拉普拉斯方程为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,$$

边界条件为 $u(r,\ 0) = 1$，$u(r,\ -\pi) = 0$. 这样解只依赖角度 $u(r,\ \theta) = u(\theta)$，此时 $u(0) = 1$，$u(\pi) = 0$，

490

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} = 0,$$

并验证了(10.6.56)式．拉普拉斯方程的这个以及更复杂些的结果均可用复平面共形映射得到．

10.6.4 四分之一平面上的拉普拉斯方程

这一小节考虑四分之一平面($x>0$，$y>0$)上的定常温度分布，其中在一个半无穷障碍上给定温度，而在另一半上给定热流：

$$\boxed{\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0} \tag{10.6.57}$$

$$\boxed{u(0,y) = g(y) \quad y > 0} \tag{10.6.58}$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = f(x) \quad x > 0.} \tag{10.6.59}$$

$u(0,y) = g(y)$ $\qquad$ $u_1(0,y) = g(y)$ $\qquad$ $u_2(0,y) = 0$

$\nabla^2 u = 0$ $\quad = \quad$ $\nabla^2 u_1 = 0$ $\quad + \quad$ $\nabla^2 u_2 = 0$

$\frac{\partial}{\partial y}u(x,0) = f(x)$ $\qquad$ $\frac{\partial}{\partial y}u_1(x,0) = 0$ $\qquad$ $\frac{\partial}{\partial y}u_2(x,0) = f(x)$

图 10.6.3 四分之一平面上的拉普拉斯方程

假定 $y\to\infty$ 时 $g(y)\to 0$，$x\to\infty$ 时 $f(x)\to 0$，使得 $y\to\infty$ 和 $x\to\infty$ 时，$u(x,\ y)\to 0$. 有两个非齐次边界条件．这样，如图 10.6.3 所示，把问题分成两个是很方便的：

$$\boxed{u = u_1(x,y) + u_2(x,y),} \tag{10.6.60}$$

其中

$$\boxed{\nabla^2 u_1 = 0} \tag{10.6.61}$$

$$\boxed{u_1(0,y) = g(y)} \tag{10.6.62}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y}u_1(x,0) = 0} \tag{10.6.63}$$

$$\boxed{\nabla^2 u_2 = 0} \tag{10.6.64}$$

491

$$\boxed{u_2(0,y) = 0} \tag{10.6.65}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y}u_2(x,0) = f(x).} \tag{10.6.66}$$

这里只分析 u_1 问题，把 u_2 问题留作习题.

对 y 的余弦变换法. 可以用两种方法分析 u_1 问题. 问题对 x 和 y 都是半无穷的. 由于 u_1 在 $x=0$ 处给定，可以用关于 x 的傅里叶正弦变换. 在 $y=0$ 处给定 $\partial u_1/\partial y$，因此可以采用对 y 的傅里叶余弦变换. 事实上，在 $y=0$ 处 $\partial u_1/\partial y=0$. 由于希望所得到的常微分方程是齐次的，所以就更愿意用对 y 的傅里叶余弦变换：

$$\boxed{u_1(x,y) = \int_0^\infty \bar{U}_1(x,\omega)\cos\omega y\,d\omega} \tag{10.6.67}$$

$$\boxed{\bar{U}_1(x,\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty u_1(x,y)\cos\omega y\,dy.} \tag{10.6.68}$$

如果 u_1 问题是对 y 作傅里叶余弦变换，就得到

$$\frac{\partial^2 \bar{U}_1}{\partial x^2} - \omega^2 \bar{U}_1 = 0. \tag{10.6.69}$$

x 的取值范围是 0 到∞. 这个常微分方程的两个边界条件是

$$\bar{U}_1(0,\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty g(y)\cos\omega y\,dy \quad 和 \quad \lim_{x\to\infty}\bar{U}_1(x,\omega) = 0. \tag{10.6.70}$$

492

方程(10.6.69)对于 $x>0$ 和 $\omega>0$ 的通解是

$$\boxed{\bar{U}_1(x,\omega) = a(\omega)e^{-\omega x} + b(\omega)e^{\omega x},} \tag{10.6.71}$$

由边界条件(10.6.70)得到

$$\boxed{b(\omega) = 0 \quad 和 \quad a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty g(y)\cos\omega y\,dy.} \tag{10.6.72}$$

卷积定理. 用傅里叶余弦变换的卷积定理可以得到解的更简单形式. 在习题 10.5.7 中得到了下面的定理，其中假定 $f(x)$ 是偶函数：

> 如果对 x 的傅里叶余弦变换 $H(\omega)$ 是两个傅里叶余弦变换的乘积 $H(\omega)=F(\omega)G(\omega)$，那么
> $$h(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty g(\bar{x})[f(x-\bar{x}) + f(x+\bar{x})]d\bar{x}.$$

(10.6.73)

这里 $u_1(x, y)$ 的傅里叶余弦变换 $\bar{U}_1(x, \omega)$ 是 $g(y)$ 的傅里叶余弦变换 $a(\omega)$ 和 $e^{-\omega x}$ 的

乘积：

$$\bar{U}_1(x,\omega) = a(\omega)e^{-\omega x}.$$

利用余弦变换对[见(10.6.67)]得到函数 $Q(y)$，即傅里叶余弦变换为 $e^{-\omega x}$ 的函数：

$$Q(y) = \int_0^\infty e^{-\omega x}\cos\omega y\mathrm{d}\omega = \int_0^\infty e^{-\omega x}\frac{e^{i\omega y}+e^{-i\omega y}}{2}\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-iy}+\frac{1}{x+iy}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

于是，由卷积定理得到

$$\boxed{u_1(x,y) = \frac{x}{\pi}\int_0^\infty g(\bar{y})\left[\frac{1}{x^2+(y-\bar{y})^2}+\frac{1}{x^2+(y+\bar{y})^2}\right]\mathrm{d}\bar{y}.} \quad (10.6.74)$$

这个结果已经通过格林函数的方法得到了(见第9章). 此时，引入适当的像源以便利用无穷

493

空间拉普拉斯方程的格林函数.

对 x 的正弦变换. 求解 $u_1(x, y)$的另一个方法是对 x 作傅里叶正弦变换：

$$u_1(x,y) = \int_0^\infty \bar{U}_1(\omega,y)\sin\omega x\mathrm{d}\omega$$

$$\bar{U}_1(\omega,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty u_1(x,y)\sin\omega x\mathrm{d}x.$$

其中$\bar{U}_1(\omega, y)$的常微分方程是非齐次的：

$$\frac{\partial^2\bar{U}_1}{\partial y^2} - \omega^2\bar{U}_1 = -\frac{2}{\pi}\omega g(y).$$

这个方程必须在 $y=0$ 和 $y=\infty$ 处的边界条件下求解

$$\frac{\partial\bar{U}_1}{\partial y}(\omega,0) = 0 \quad 和 \quad \lim_{y\to\infty}\bar{U}_1(\omega,y) = 0.$$

这种方法将在习题中作进一步的讨论.

10.6.5 平面上的热传导方程(二维傅里叶变换)

变换可以用于求解对 x 和 y 都是无穷的问题. 考虑在 x-y 平面($-\infty<x<\infty$， $-\infty<y<\infty$)上的热传导方程：

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),} \quad (10.6.75)$$

其初始条件为

$$\boxed{u(x,y,0) = f(x,y).} \quad (10.6.76)$$

如果分离变量，得到如下形式的乘积解，对于任何 ω_1 和 ω_2，

$$u(x,y,t) = e^{-i\omega_1 x}e^{-i\omega_2 y}e^{-k(\omega_1^2+\omega_2^2)t}$$

对应 $x\to\pm\infty$ 及 $y\to\pm\infty$ 时，$u\to0$ 的边界条件是，分离解在 $x\to\pm\infty$ 及 $y\to\pm\infty$ 时有界. 于是，

这种类型的解对于任意实数 ω_1 和 ω_2 都满足. 广义的叠加原理给出了解的积分表达式

$$\boxed{u(x,y,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega_1,\omega_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2 y}\mathrm{e}^{-k(\omega_1^2+\omega_2^2)t}\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2.} \qquad (10.6.77)$$

494

要满足初始条件，只要

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega_1,\omega_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2 y}\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2.$$

要证明 $A(\omega_1,\ \omega_2)$ 为

$$\boxed{A(\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_2 y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,} \qquad (10.6.78)$$

这就完成了求解. $A(\omega_1,\ \omega_2)$ 称为 $f(x,\ y)$ 的二重傅里叶变换.

二重傅里叶变换. 现在已经由分离变量得到了二维傅里叶变换. 假设 $x,\ y\to\pm\infty$ 时，二元函数 $f(x,\ y)$ 衰减得足够快. 对 x 的傅里叶变换(固定 y，变换变量是 ω_1)是

$$F(\omega_1,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 x}\mathrm{d}x;$$

其逆变换是

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_1,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 x}\mathrm{d}\omega_1.$$

$F(\omega_1,\ y)$ 是 y 的函数，也可以作傅里叶变换(这里变换变量是 ω_2)：

$$\tilde{F}(\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_1,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_2 y}\mathrm{d}y$$

$$F(\omega_1,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{F}(\omega_1,\omega_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2 y}\mathrm{d}\omega_2.$$

把这些综合起来，就得到二维(或二重)傅里叶变换对：

$$\tilde{F}(\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_2 y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (10.6.79)$$

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{F}(\omega_1,\omega_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2 y}\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2. \qquad (10.6.80)$$

波数向量. 下面引入更方便的记号. 在 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}$ 中，ω 称为波数(2π 距离中波的个数). 注意

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_2 y} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1 x+\omega_2 y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}},$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 是位置向量[⊖]，$\boldsymbol{\omega}$ 是波数向量：

$$\boldsymbol{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \qquad (10.6.81)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\hat{i} + \omega_2\hat{j}. \qquad (10.6.82)$$

495

为了解释 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}}$，例如讨论实部 $\cos(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}) = \cos(\omega_1 x+\omega_2 y)$. 波峰位于 $\omega_1 x+\omega_2 y = n(2\pi)$，见图 10.6.4. 垂直于波峰的方向是 $\nabla(\omega_1 x+\omega_2 y) = \omega_1\hat{i}+\omega_2\hat{j} = \boldsymbol{\omega}$. 这称为波的方向(波向). 这样，波数向量是在波的方向上. 引入波数向量的长度

⊖ 在其他的情形，位置向量的记号是 $\boldsymbol{x}$. 这样 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x}$.

$$\omega^2 = \omega \cdot \omega = |\omega|^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2.$$

在波向上的单位向量是 ω/ω. 如果在波向上(由原点)移动 s 距离，那么 $r = s\omega/\omega$. 于是，

$$\omega \cdot r = s\omega \quad 和 \quad \cos(\omega \cdot r) = \cos(\omega s).$$

这样，ω 是 2π 距离内波的个数. 因此也说明了波数向量 ω 名称的合理性；即波数向量是在波的方向上，它的长度为(在波的方向上)2π 距离内波的个数.

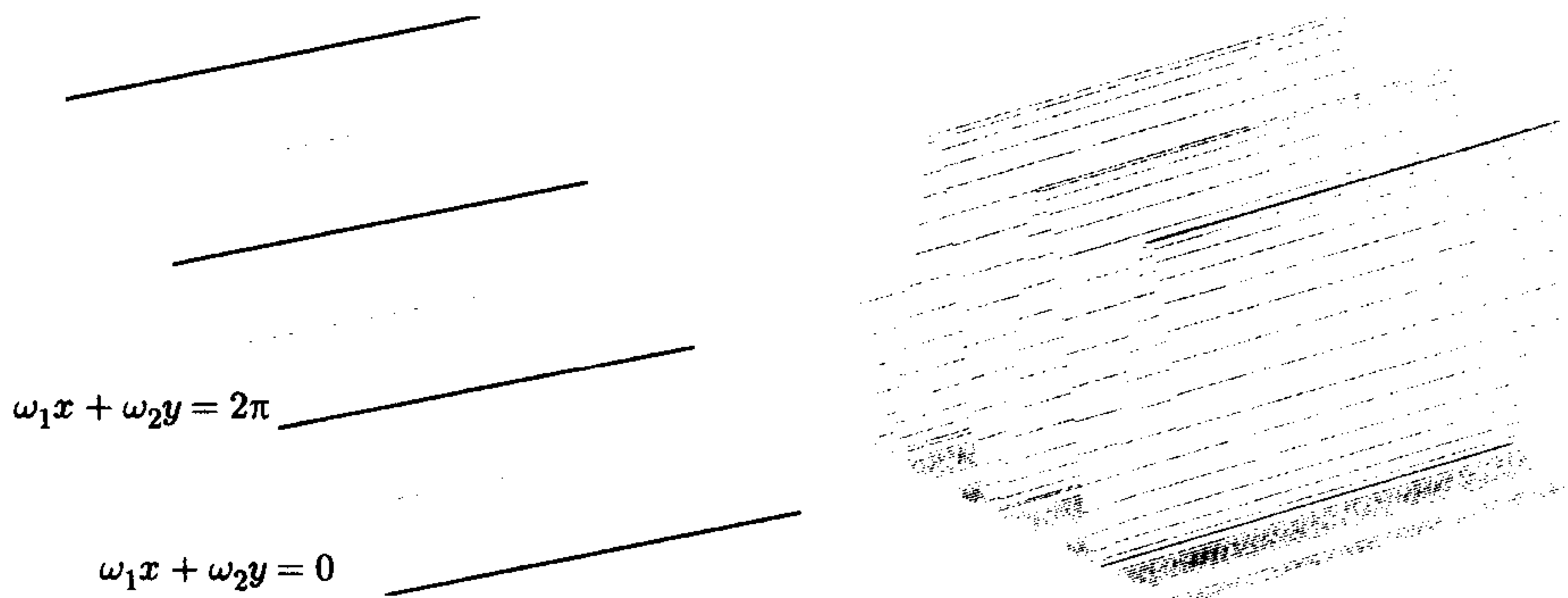


图 10.6.4 二维波及其波峰

用位置向量 $r = x\hat{i} + y\hat{j}$ 和波数向量 $\omega = \omega_1\hat{i} + \omega_2\hat{j}$，二重傅里叶变换对(10.6.79)和(10.6.80)变成

$$\boxed{F(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(r)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\cdot r}\,\mathrm{d}^2 r} \tag{10.6.83}$$

$$\boxed{f(r) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\cdot r}\,\mathrm{d}^2\omega,} \tag{10.6.84}$$

[496] 其中 $f(r) = f(x, y)$，$\mathrm{d}^2 r = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}^2\omega = \mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2$，$F(\omega)$ 是 $f(r)$ 的二重傅里叶变换.

用记号 $\mathcal{F}[u(x, y, t)]$ 表示 $u(x, y, t)$ 的二重空间傅里叶变换，只要 $x, y \to \pm\infty$ 时 u 衰减得足够快，它就具有如下很容易证明的性质：

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}[u] \tag{10.6.85}$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = -\mathrm{i}\omega_1\,\mathcal{F}[u] \tag{10.6.86}$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right] = -\mathrm{i}\omega_2\,\mathcal{F}[u] \tag{10.6.87}$$

$$\mathcal{F}[\nabla^2 u] = -\omega^2\,\mathcal{F}[u], \tag{10.6.88}$$

其中 $\omega^2 = \omega \cdot \omega = \omega_1^2 + \omega_2^2$. 本小节末附有二重傅里叶变换简表.

热传导方程. 不用分离变量法，而是直接对二维热传导方程(10.6.75)作二重傅里叶变换求解：

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = -k\omega^2\,\bar{U}, \tag{10.6.89}$$

其中$\bar{U}$是$u(x, y, t)$的二重空间傅里叶变换：

$$\mathcal{F}[u] = \bar{U}(\omega,t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\cdot r}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{10.6.90}$$

方程(10.6.89)的初等解是

$$\bar{U}(\omega,t) = A(\omega)\mathrm{e}^{-k\omega^2 t}. \tag{10.6.91}$$

由(10.6.76)可知，$A(\omega)$是初始条件的傅里叶变换：

$$\boxed{A(\omega) = \bar{U}(\omega,0) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\cdot r}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.} \tag{10.6.92}$$

于是，二维热传导方程的解是

$$\boxed{\begin{aligned} u(x,y,t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}(\omega,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\cdot r}\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\mathrm{e}^{-k\omega^2 t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\cdot r}\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2. \end{aligned}} \tag{10.6.93}$$

这就验证了前面分离变量法给出的结果. 497

卷积定理的应用. 在习题中证明了直接对二重傅里叶变换成立的卷积定理：如果$H(\omega) = F(\omega)G(\omega)$，那么

$$\boxed{h(r) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(r_0)g(r-r_0)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0.} \tag{10.6.94}$$

对于二维热传导方程，已经证明了$\bar{U}(\omega, t)$是$\mathrm{e}^{-k\omega^2 t}$与初始条件的二重傅里叶变换$A(\omega)$的乘积. 现在要确定其二重傅里叶变换为$\mathrm{e}^{-k\omega^2 t}$的函数：

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-k\omega^2 t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\cdot r}\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-k\omega_1^2 t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 x}\mathrm{d}\omega_1\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-k\omega_2^2 t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2 y}\mathrm{d}\omega_2 \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{kt}}\mathrm{e}^{-x^2/4kt}\sqrt{\frac{\pi}{kt}}\mathrm{e}^{-y^2/4kt} = \frac{\pi}{kt}\mathrm{e}^{-r^2/4kt}. \end{aligned}$$

$\mathrm{e}^{-k\omega^2 t}$的逆变换是两个一维逆变换的乘积；它是二维高斯函数$(\pi/kt)\mathrm{e}^{-r^2/4kt}$，其中$r^2 = x^2 + y^2$. 这样，无穷平面上二维热传导方程的初值问题解是

$$\boxed{u(x,y,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0,y_0)\frac{1}{4\pi kt}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{4kt}\right]\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0.} \tag{10.6.95}$$

初始条件的影响函数是

$$g(x,y,t;x_0,y_0,0) = \frac{1}{4\pi kt}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{4kt}\right] = \frac{1}{4\pi kt}\mathrm{e}^{-|r-r_0|^2/4kt}.$$

它表示了位于x_0，y_0的初始热能(t时刻)在x，y的影响. 影响函数是二维热传导方程的基本解，它可以通过取初始条件为集中于原点的二维狄拉克δ函数$f(x, y) = \delta(x)\delta(y)$得到. 二维热传导方程的基本解是两个一维热传导方程基本解的乘积.

10.6.6 二重傅里叶变换表

下面给出二重傅里叶变换简表(表10.6.1).

表10.6.1 二重傅里叶变换

$f(r)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{-i\omega\cdot r}d\omega_1 d\omega$	$F(\omega)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(r)e^{i\omega\cdot r}dxdy$	参 考
$\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ $\nabla^2 f$	$-i\omega_1 F(\omega),-i\omega_2 F(\omega)$ $-\omega^2 F(\omega)$	导数(10.6.5节)
$\frac{\pi}{\beta}e^{-r^2/4\beta}$	$e^{-\beta\omega^2}$	高斯函数(10.6.5节)
$f(r-\beta)$	$e^{i\omega\cdot\beta}F(\omega)$	习题10.6.8
$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(r_0)g(r-r_0)dx_0dy_0$	$F(\omega)G(\omega)$	卷积(习题10.6.7)

习题10.6

10.6.1 在 $-\infty<x<\infty$，$0<y<H$ 上，求解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

满足条件

*(a) $u(x,0)=f_1(x)$ 和 $u(x,H)=f_2(x)$

(b) $\frac{\partial}{\partial y}u(x,0)=f_1(x)$ 和 $u(x,H)=f_2(x)$

(c) $u(x,0)=0$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}(x,H)+hu(x,H)=f(x)$

10.6.2 求解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad 对\quad 0<x<L,\quad y>0,$$

满足条件

(a) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,y)=g_1(y)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L,y)=g_2(y)$, $u(x,0)=f(x)$

*(b) $u(0,y)=g_1(y)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L,y)=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=0$

(c) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,y)=0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L,y)=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=f(x)$

(d) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,y)=0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L,y)=g(y)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=0$

如果存在可解性条件，请叙述出来，并解释其物理意义.

10.6.3 (a)在 $x<0$，$-\infty<y<\infty$ 上，求解满足条件 $u(0,y)=g(y)$ 的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

(b)确定解的最简单形式，其中

$$g(y) = \begin{cases} 0 & |y| > 1 \\ 1 & |y| < 1. \end{cases}$$

10.6.4 对 $x>0$，$y>0$，求解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

满足条件

498~499

* (a) $u(0, y) = 0$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = f(x)$ [提示：求 $\frac{\partial \bar{U}}{\partial y}$ 的逆变换.]

(b) $u(0, y) = 0$ 和 $u(x, 0) = f(x)$

10.6.5 重新考虑习题 10.6.4(a). 设 $w = \partial u/\partial y$. 证明 w 满足习题 10.6.4(b). 按这种方式求解习题 10.6.4(a)和(b).

10.6.6 考虑方程(10.6.61)及条件(10.6.62)~(10.6.63). 正文求解中采用了对 y 的傅里叶余弦变换. 这里采用对 x 的傅里叶正弦变换.

(a)求解 $\bar{U}_1(\omega, y)$，其中

$$\frac{\partial^2 \bar{U}_1}{\partial y^2} - \omega^2 \bar{U}_1 = -\frac{2}{\pi}\omega g(y)$$

$$\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial y}(\omega, 0) = 0$$

$$\lim_{y\to\infty} \bar{U}_1(x, y) = 0.$$

(提示：参考(9.3.9)~(9.3.14)或(13.3.10)，用指数函数.)

(b)导出 $u_1(x, y)$. 并证明(10.6.74)成立.

10.6.7 推导二维卷积定理(10.6.94).

10.6.8 推导二维傅里叶变换的移位定理：$e^{i\omega\cdot\beta}F(\omega)$ 的逆变换是 $f(r-\beta)$.

10.6.9 求解

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_0 \cdot \nabla u = k\nabla^2 u,$$

其中初始条件为

$$u(x, y, 0) = f(x, y).$$

(提示：参看习题 10.6.7.)并说明对流项 $v_0 \cdot \nabla u$ 是如何改变影响函数的.

10.6.10 求解

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

其中初始条件为

$$u(x, y, 0) = f(x, y).$$

10.6.11 设

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad \begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}$$

满足初始条件

$$u(x, y, 0) = f(x, y).$$

在下列边界条件下求解：

500

* (a) $u(0, y, t) = 0$ 和 $u(x, 0, t) = 0$

(b) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y, t) = 0$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, t) = 0$

(c) $u(0, y, t)=0$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, t)=0$

10.6.12 设

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad \begin{matrix} 0<x<L \\ y>0 \end{matrix}$$

满足初始条件

$$u(x,y,0)=f(x,y).$$

在下列边界条件下求解：

*(a) $u(0, y, t)=0$, $u(L, y, t)=0$, $u(x, 0, t)=0$

(b) $u(0, y, t)=0$, $u(L, y, t)=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, t)=0$

(c) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y, t)=0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L, y, t)=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, t)=0$

10.6.13 求解

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad \begin{matrix} 0<y<H \\ -\infty<x<\infty \end{matrix}$$

其中初始条件为

$$u(x,y,0)=f(x,y),$$

边界条件为

$$u(x,0,t)=0$$
$$u(x,H,t)=0.$$

10.6.14 (a)不用推导或应用卷积定理，求解 $u(x, y, z, t)$：

$$\left.\begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\ \text{使得} \\ u(x,y,z,0)=f(x,y,z) \\ u(x,y,0,t)=0 \end{matrix}\right\} \text{满足} \quad \begin{matrix} t>0 \\ -\infty<x<\infty \\ -\infty<y<\infty \\ 0<z<\infty. \end{matrix}$$

(b)化简答案(如需要，可以运用卷积定理的想法).

10.6.15 考虑

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \quad z>0$$
$$u(x,y,0)=f(x,y).$$

501

*(a)确定 u 的二重傅里叶变换.

*(b)通过在极坐标系中计算反演积分，求出 $u(x, y, z)$. [提示：先求 w 比较容易，其中 $u=\partial w/\partial z$. 然后可以利用积分

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}=\frac{2\pi}{ab}$$

(此积分的值可由变量替换 $z=e^{i\theta}$ 及复变函数理论得到).]

(c)把所得到的结果与格林函数的结果作比较.

10.6.16 在四分之一圆内(如图 10.6.5 所示)，考虑拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u=0,$$

其边界条件为

$$u(a,\theta)=f(\theta),\quad u(r,0)=g_1(r),\quad u\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=g_2(r).$$

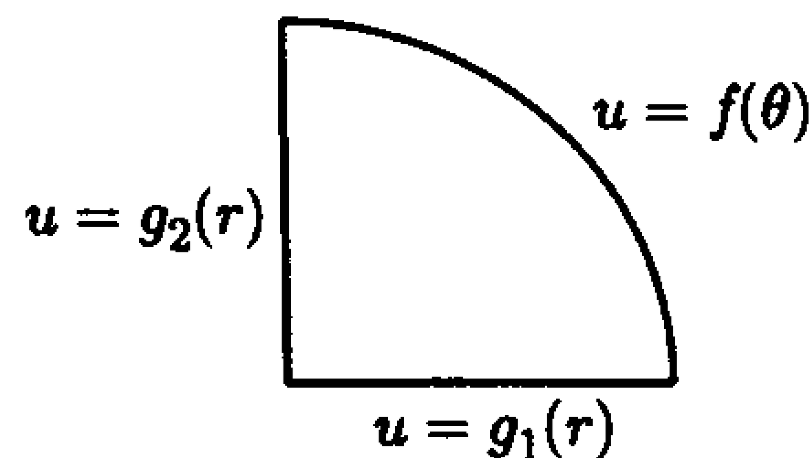


图 10.6.5

(a)分解成三个子问题：$u=u_1+u_2+u_3$，其中

$$u_1(a,\theta)=0,\quad u_2(a,\theta)=0,\quad u_3(a,\theta)=f(\theta)$$
$$u_1(r,0)=g_1(r),\quad u_2(r,0)=0,\quad u_3(r,0)=0$$
$$u_1\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=0,\quad u_2\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=g_2(r),\quad u_3\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

求 $u_3(r,\ \theta)$.

*(b)求 $u_2(r,\ \theta)$.［提示：试用分离变量法 $u_2(r,\ \theta)=\phi(r)h(\theta)$. 证明对 $\lambda>0$，$\phi(r)=\sin[\sqrt{\lambda}\ln(r/a)]$. 设 $\rho=-\ln(r/a)$，用对 ρ 的傅里叶正弦变换.］［评注：这是有限区间上的奇异施图姆-刘维尔问题，它有连续频谱. 对四分之一圆上的波动方程，相应的奇异施图姆-刘维尔问题(含贝塞尔函数)有离散谱.］ 502

10.6.17　重新考虑习题 10.6.16(b)中的 $u_2(r,\ \theta)$问题. 引入自变量 $\rho=-\ln(r/a)$代替 r. ［评注：在复变函数中，这是共形变换

$$w=-\ln\left(\frac{z}{a}\right),\quad 其中\quad z=x+\mathrm{i}y$$

(即 $\ln(z/a)=\ln|z/a|+\mathrm{i}\theta$).］

(a)确定 u_2 对 ρ 和 θ 的偏微分方程. 在直角坐标系中画出 ρ 和 θ 的边界.

(b)求解 u_2.(可参考 10.6.2 节.)

(c)把所得到的结果与习题 10.6.16 进行对比.

10.6.18　求解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad -\infty<x<\infty$$
$$u(x,0)=0$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x).$$

(提示：应用卷积理论，并参考习题 10.4.6.)

10.6.19　对于 10.6.1 中的问题，证明

$$\bar{U}(\omega,t)=F(\omega)\cos c\omega t.$$

并用卷积定理获得 $u(x,\ t)$.(提示：$\cos c\omega t$ 不存在通常的傅里叶逆变换. 然而，用狄拉克 δ 函数，可以求得 $\cos c\omega t$ 的傅里叶逆变换.)

10.6.20　用习题 10.6.17 的方法考虑 $u_3(r,\ \theta)$问题.

10.7　散射和逆散射

在前面的讨论中，研究了有离散谱的特征值问题和有连续谱的特征值问题. 这一小节要简略研究既有离散谱又有连续谱的特征值问题. 提出这个问题的动机之一是对量子力学中的归一化薛定谔方程 $\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+u(x)\psi$ 分离变量($\psi(x,\ t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\phi(x)$). 如果势函数 $u(x)$与时间无关，就得到边值问题

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}+(\lambda-u(x))\phi=0.}\tag{10.7.1}$$

假定 $x\to\pm\infty$ 时 $u(x)$衰减的足够快，这样所考虑的偏微分方程的解，在 $x\to\pm\infty$ 时，衰减到零. 如果 $u(x)=0$，那么 $\lambda=k^2>0$ 是连续谱，使得 $\phi(x)=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kt}$对应傅里叶变换. 如果 $u(x)\neq 0$，那么微分方程(10.7.1)一般不能精确求解，这样就需要讨论方程(10.7.1)理论上的特点. 503

要指出的是，总会存在类似于傅里叶变换的连续谱，并且可能也存在离散谱.

连续谱. 如果在 $x\to\pm\infty$ 时，$u(x)\to 0$ 充分快，直觉上 $\phi(x)$ 在 $x\to\pm\infty$ 时应当近似为 $\mathrm{e}^{\pm ikt}$（这可以在数学上推导出来）. 把 e^{-ikt} 想象为向左传播的波[原因是时间相关解 $\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{e}^{-ik^2t}=\mathrm{e}^{-ik(x+kt)}$ 在 $k>0$ 时是向左传播的]和把 e^{+ikt} 想象为向右传播的波都是有益的. 现在分析方程(10.7.1)的单位振幅入波($x\to+\infty$ 时是来自右端的向左传播波)特殊解，此解对应一个单位振幅入波. 变量系数(势能)$u(x)$会引起一些反射，被传播的振幅也会改变，于是

$$\boxed{\phi(x)\ \sim\ \mathrm{e}^{-ikx}+R(k)\mathrm{e}^{+ikx},\text{当 } x\to+\infty,}\tag{10.7.2}$$

$$\boxed{\phi(x)\ \sim\ T(k)\mathrm{e}^{-ikx},\text{当 } x\to-\infty,}\tag{10.7.3}$$

其中的 $R(k)$ 称为*反射系数*，$T(k)$ 称为*透射系数*. 反射和透射系数都是复的，并且可以证明它们满足能量守恒方程 $|R|^2+|T|^2=1$. 还能够求得方程(10.7.1)的其他解.

离散谱. 对于边界条件 $x\to\pm\infty$ 时 $\phi(x)\to 0$，有满足(10.7.1)的负特征值 λ 的离散集：

$$\boxed{\lambda\ =-\kappa_n^2(\kappa_n\ >0),n\ =1,2,\cdots N.}\tag{10.7.4}$$

对应的特征函数 $\phi_n(x)$ 称为*束缚态*，可以选取它们满足

$$\boxed{\phi_n(x)\ \sim\ c_n\mathrm{e}^{-\kappa_n x},\text{当 } x\to+\infty}\tag{10.7.5}$$

504

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\phi_n^2(x)\,\mathrm{d}x\ =\ 1.}\tag{10.7.6}$$

为了使得积分有界，在 $x\to\pm\infty$ 时，特征函数必须都指数衰减. 束缚态还可能有其他归一化(10.7.6). 一般来说，对于束缚态($\lambda<0$)，由微分方程(10.7.1)可以证明：如果，对所有 x，系数 $\lambda-u(x)<0$，则其解是 x 的一种指数函数，因而不能是束缚态. 这样就得到了束缚态的必要(但不充分的)条件：$u(x)$必定在某些地方小于零.

连续谱的例子：δ 函数势. 作为一个基本的例子，假设势 $u(x)$ 为狄拉克 δ 函数

$$u(x)\ =\ U\delta(x),\tag{10.7.7}$$

假定 ϕ 连续，$\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x$ 满足相应的跳跃条件. 当 $x\neq 0$ 时，微分方程容易求解，(10.7.2)和(10.7.3)不但分别渐近地成立，而且在 $x>0$ 与 $x<0$ 时也各自成立. $\phi(x)$ 在点 $x=0$ 的连续性给出

$$1+R(k)\ =\ T(k).\tag{10.7.8}$$

跳跃条件 $\left.\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right|_{0-}^{0+}=U\phi(0)$ 变为

$$-\mathrm{i}k+\mathrm{i}kR(k)\ +\mathrm{i}kT(k)\ =\ UT(k).\tag{10.7.9}$$

由初等代数运算得到 $R(k)=\dfrac{U}{2ik-U}$ 及 $T(k)=\dfrac{2ik}{2ik-U}$. 在本例中可以验证 $|R|^2+|T|^2=1$ 这个一般性结果.

离散特征值和特征函数的例子：δ 函数势. 对 δ 函数势(10.7.7)，当 $x>0$，(10.7.5)成立，而在 $x<0$ 时，注意到 $\phi_n(x)=b_n\mathrm{e}^{\kappa nx}$. 由在 $x=0$ 点的连续性得到 $b_n=c_n$. 在 $x=0$ 点的跳跃条件 $\left.\dfrac{\mathrm{d}\phi_n}{\mathrm{d}x}\right|_{0-}^{0+}=U\phi_n(0)$ 变为 $-c_n\kappa_n-c_n\kappa_n=Uc_n$. 由此得到

$$\kappa_n = -\frac{1}{2}U. \qquad (10.7.10)$$

由 $\kappa_n>0$，如果 $U>0$，对 δ 函数势没有离散特征值，而如果 $U<0$，恰好有一个离散负特征值，即

$$\lambda = -\kappa_n^2 = -\frac{1}{4}U^2. \qquad (10.7.11)$$

束缚态仅对负 δ 函数存在，这与前面提到的必要条件一致：要有束缚态，$u(x)$ 必在某处小于零. 505

逆散射. 长期以来，理论家们一直想弄明白是否反射系数和透射系数能够唯一确定势函数. 20 世纪 50 年代早期，Gelfand and Levitan[1955]证明了这个绝妙结果：如果补充了离散谱的知识，势函数是能够由反射系数和透射系数唯一确定的. 特别地，势函数可以被重构为

$$\boxed{u(x) = -2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}K(x,x),} \qquad (10.7.12)$$

其中 $K(x, y)$ 是 Gelfand-Levitan-Marchenko 非齐次线性积分方程

$$\boxed{K(x,y) + F(x+y) + \int_x^\infty K(x,z)F(y+z)\mathrm{d}z = 0, \quad 对\ y > x} \qquad (10.7.13)$$

的唯一解. 这个核和非齐次项 $F(s)$ 是反射系数 $R(x)$(10.7.2)的广义傅里叶逆变换，因此也包含了离散谱(10.7.5)的贡献：

$$\boxed{F(s) = \sum_{n=1}^{N} c_n^2 \mathrm{e}^{-\kappa_n s} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R(k)\mathrm{e}^{iks}\mathrm{d}k.} \qquad (10.7.14)$$

这里 $\lambda = -\kappa_n^2$ 是离散特征值，c_n 是相关的束缚态.

习题 10.7

10.7.1 考虑阶梯势函数：在 $-1<x<1$，$u(x)=U$；在其他地方 $u(x)=0$.

(a) 如果 $U<0$，求反射系数和透射系数.

(b) 由求解方程(10.7.1)，确定离散谱($\kappa>0$ 时 $\lambda=-\kappa^2$). [提示：(i) 既然 $\lambda-u(x)$ 在某些点必须大于零，可以设 $U<\lambda=-\kappa^2$. (ii) 如果奇偶束缚态分开分析，计算会更容易.]

(c) 如果 $U>0$，求反射系数和透射系数(对所有 $\lambda>0$).

10.7.2 对课文中的 δ 势函数，证明 $|R|^2+|T|^2=1$.

10.7.3 (a) 证明方程(10.7.1)的两个无关解的朗斯基行列式 $W(\phi_1, \phi_2)=\phi_1\phi_{2x}-\phi_2\phi_{1x}$ 是常数.

(b) 满足(10.7.2)和(10.7.3)的 $\phi(x)$ 及其复共轭 $\phi^*(x)$ 是(10.7.1)的两个线性无关解. 由 $x\to\pm\infty$ 的渐近条件和计算这两个解的朗斯基行列式证明 $|R|^2+|T|^2=1$. 506

10.7.4 **正交性条件**.

(a) 证明：离散特征函数与连续谱的特征函数正交.

(b) 证明：不同特征值的离散特征函数是相互正交的.

10.7.5 (a) 证明：透射系数在上半复 k 平面的一个极点对应离散谱的一个值.

(b) 用课文中 δ 函数的例子验证上面结果.

10.7.6 **无反射势函数**是对所有 k 的反射系数都为零的函数. 假设存在一个离散特征值 $\lambda=-\kappa^2$，其相应系数是 c^2. 由求解 Gelfand-Levitan-Marchenko 积分方程(10.7.13)，找到一个无反射势函数的例子. [提示：此时的积分方程是可分离的.] 507

第 11 章　波动方程和热传导方程的格林函数

11.1　引言

在第 9 章已获得了一些定常问题的格林函数. 一个特别重要的思路是利用无穷空间格林函数. 这一章要分析热传导方程和波动方程的格林函数. 考虑一、二、三维空间中的问题. 要推导出热传导方程与波动方程的格林公式，然后利用它们用格林函数来表示非齐次问题(具有非齐次源与非齐次边界条件)的解. 这里获得了这些无穷空间格林函数的基本公式. 对于波动方程，利用一维波动方程的通解导出了一维无穷空间格林函数. 三维波动方程的无穷空间格林函数是通过将三维波动方程化成一维波动方程的著名变换获得的. 对于热传导方程，无穷空间格林函数是通过比较格林函数和在第 10 章中获得的无穷空间热传导方程初值问题的解而求得的.

11.2　波动方程的格林函数

11.2.1　概述

这一节求解具有与时间可能相关的源的波动方程，

508

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u + Q(x,t),} \tag{11.2.1}$$

其中两个初始条件是

$$\boxed{u(x,0) = f(x)} \tag{11.2.2}$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x).} \tag{11.2.3}$$

如果这个问题是在有限或半无穷区域上，$u(x, t)$一般在边界上会满足非齐次条件. 下面将同时确定如何求解一维，二维以及三维空间中的这个问题. (一维时$\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2$.)

格林函数 $G(x, t; x_0, t_0)$是作为集中在 $x = x_0$ 处的源仅在 $t = t_0$ 时刻瞬时发挥作用所给出的解来引入的：

$$\boxed{\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 G + \delta(x - x_0)\delta(t - t_0),} \tag{11.2.4}$$

其中 $\delta(x - x_0)$是对应维数空间的狄拉克 δ 函数. 对于有限或半无穷域问题，G 要满足相关齐次边界条件，而这些条件对应着 $u(x, t)$满足的非齐次边界条件.

格林函数是 x 处在 t 时刻对 t_0 时刻位于 x_0 处源的响应. 由于期望格林函数 G 仅是对在 $t = t_0$ 时刻作用源的响应(而不是早先的非零条件)，因此，要求在源作用之前($t < t_0$)，响应 G 是零：

$$\boxed{G(x,t;x_0,t_0) = 0, \quad 对\ t < t_0,} \tag{11.2.5}$$

称其为因果性原理(见 9.2 节).

仅在集中源出现后，格林函数 $G(x, t; x_0, t_0)$ 才依赖时间. 因此引入流逝时间 $T = t - t_0$ 就有

$$\frac{\partial^2 G}{\partial T^2} = c^2 \nabla^2 G + \delta(x - x_0)\delta(T)$$

$$\text{对于 } T < 0 \text{ 有 } G = 0,$$

那么，G 也可看作是对 $T=0$ 时刻位于 $x=x_0$ 处集中源的响应. 这称为平移性质，

$$\boxed{G(x,t;x_0,t_0) = G(x,t - t_0;x_0,0).} \tag{11.2.6}$$

509

11.2.2 格林公式

在求(各个维数)格林函数之前，先要说明非齐次波动方程(11.2.1)(对非齐次初始条件与边界条件)是如何利用格林函数得到的. 而对定常问题(非齐次施图姆-刘维尔类型或泊松方程)，非齐次解与格林函数间的关系是用格林公式得到的：

施图姆-刘维尔算子($L = \mathrm{d}/\mathrm{d}x(p\mathrm{d}/\mathrm{d}x) + q$)：

$$\int_a^b [uL(v) - vL(u)]\mathrm{d}x = p\left(u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\Bigg|_a^b \tag{11.2.7}$$

三维拉普拉斯算子($L = \nabla^2$)：

$$\iiint [uL(v) - vL(u)]\mathrm{d}^3x = \oiint (u\nabla v - v\nabla u)\cdot \hat{n}\mathrm{d}S, \tag{11.2.8}$$

其中 $\mathrm{d}^3x = \mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. 对于二维拉普拉斯算子也有相应的结果.

为了将这些想法推广至非齐次波动方程，引入对应的线性微分算子：

$$\boxed{L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\nabla^2.} \tag{11.2.9}$$

使用这个记号，非齐次波动方程(11.2.1)满足

$$L(u) = Q(x,t), \tag{11.2.10}$$

而格林函数(11.2.4)满足

$$L(G) = \delta(x - x_0)\delta(t - t_0). \tag{11.2.11}$$

对于波动算子 L[见(11.2.9)]，将导出类似于(11.2.7)与(11.2.8)的格林公式. 这里使用对应三维的记号，(若有必要)也会说清楚一维和二维的改动. 对与时间相关的问题，L 既有空间变量也有时间变量. 类似于(11.2.7)与(11.2.8)的公式是存在的，但积分是对空间 x 与时间 t 的. 由于对波动算子

$$uL(v) - vL(u) = u\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - v\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2(u\nabla^2 v - v\nabla^2 u),$$

510

则前面的格林公式给出了新的"格林公式"：

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_{t_i}^{t_f}\iiint [uL(v) - vL(u)]\mathrm{d}^3x\mathrm{d}t \\ &= \iiint\left(u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)\Bigg|_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}^3x - c^2\int_{t_i}^{t_f}\left(\oiint(u\nabla v - v\nabla u)\cdot\hat{n}\mathrm{d}S\right)dt,\end{aligned}} \tag{11.2.12}$$

其中 $\iiint$ 表示三维空间的积分$\left(\int_a^b\right.$ 对一维问题$\left.\right)$,$\oiint$ 表示在其边界上积分($\Big|_a^b$ 对一维问题). 右侧项表示边界基值：对所有时间的空间边界与对所有空间的时间边界($t=t_i$ 与 $t=t_f$). 这些时空边界(对一维问题)如图 11.2.1 所示.

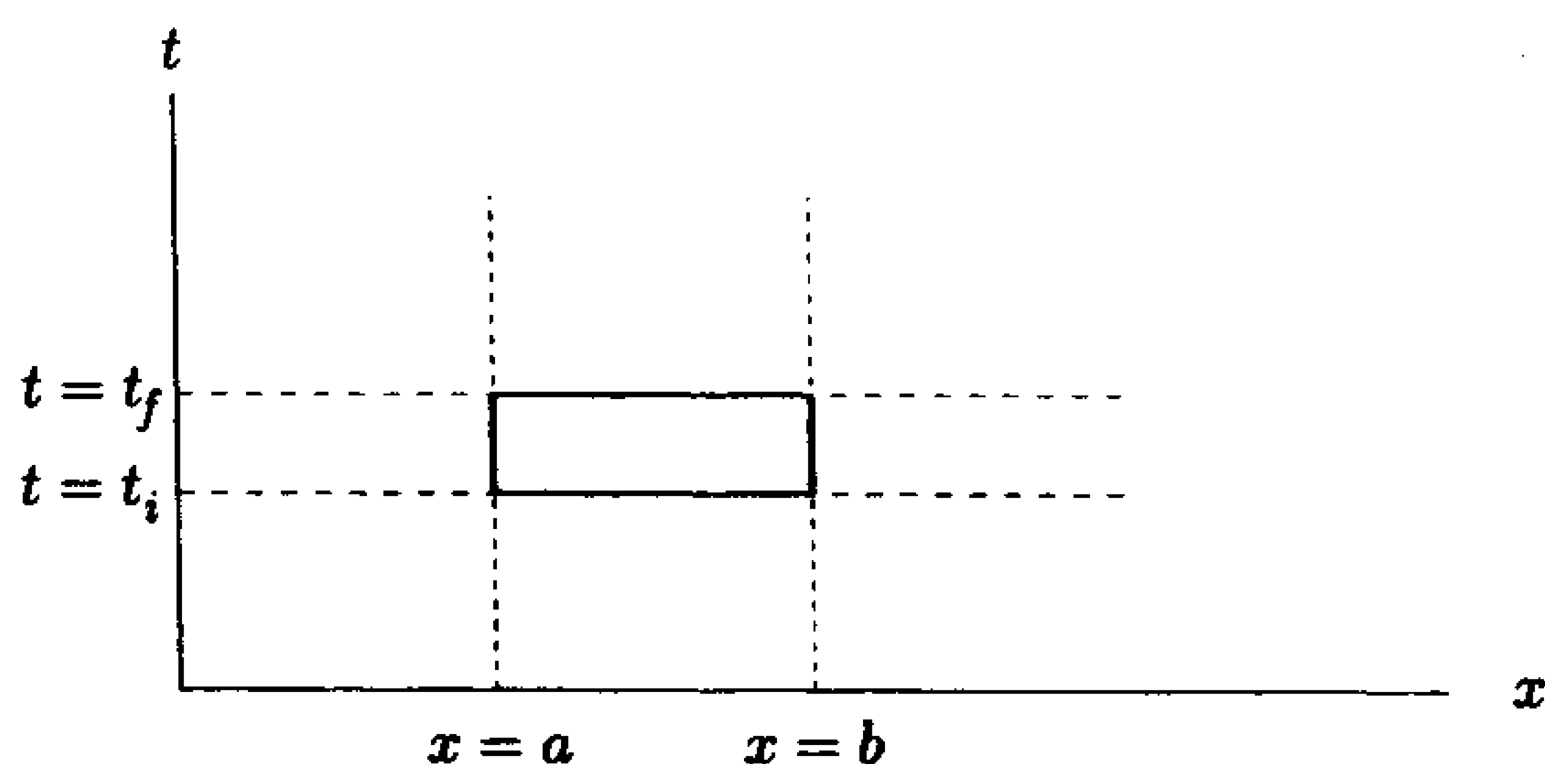


图 11.2.1 一维波动方程的时空边界

例如，如果 u 与 v 均满足普通类型的(所有时刻的空间)齐次边界条件，则 $\oiint(u\,\nabla v - v\,\nabla u)\cdot\hat{n}\mathrm{d}S = 0$,但

$$\iiint\left(u\,\frac{\partial v}{\partial t} - v\,\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Bigg|_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}^3x$$

可能不为 0，这是由于“初始”时刻 t_i 和“终”时刻 t_f 基值.

11.2.3 互反性

对于定常问题，已经证明了格林函数是对称的，$G(x,\ x_0)=G(x_0,\ x)$. 这个结果是对两个不同的格林函数[$G(x,\ x_1)$与 $G(x,\ x_2)$]用格林公式证明的. 之所以得出这个结果是因为格林公式中边界为零.

511 对于波动方程，存在有些类似的性质. 格林函数 $G(x,\ t;\ x_0,\ t_0)$满足

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - c^2\,\nabla^2 G = \delta(x - x_0)\delta(t - t_0), \tag{11.2.13}$$

服从于因果性原理，

$$G(x,t;x_0,t_0) = 0, \quad 对\ t < t_0. \tag{11.2.14}$$

对于 $t>t_0$，G 不为零. 为了使用格林公式(证明互反性)，需要有第二个格林函数. 取这个函数为 $G(x,\ t;\ x_A,\ t_A)$，则在空间边界上(或无穷远处)的基值 $\int_{t_i}^{t_f}\oiint(u\,\nabla v - v\,\nabla u)\cdot\hat{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t$ 为零,但在时间边界上,在 $t = t_i$ 和 $t = t_f$ 处基值

$$\iiint\left(u\,\frac{\partial v}{\partial t} - v\,\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Bigg|_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}^3x$$

都不会为 0. 对于时间而言，这个问题是初值问题而非边值问题. 若在格林公式中让 $t_i\leqslant t_0$，则“初始”基值为 0.

对第二个格林函数要关注变化源时间 t，$G(x,\ t_1;\ x_1,\ t)$，称为*变源格林函数*. 由平移性质，

$$\boxed{G(x,t_1;x_1,t) = G(x,\ -t;x_1,\ -t_1),} \tag{11.2.15}$$

因为流逝的时间相同[$-t-(-t_1)=t_1-t$]. 由因果性，如果 $t_1<t$(或等价地，$-t<-t_1$)，这两个函数为 0：

$$G(x,t_1;x_1,t) = 0, \quad 对 \quad t > t_1. \tag{11.2.16}$$

称为*变源因果性原理*. 通过引入这个格林函数，下面证明格林公式“终”基值为 0.

为了确定变源格林函数满足的微分方程，令 $t=-\tau$，此时，由(11.2.15)

$$G(x,t_1;x_1,t) = G(x,\tau;x_1,-t_1).$$

这是通常的(变化响应位置)格林函数，τ 为时间变量．当 $\tau=-t_1(t=t_1)$ 时，在 $x=x_1$ 处它有集中源：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}-c^2\nabla^2\right)G(x,t_1;x_1,t) = \delta(x-x_1)\delta(t-t_1).$$

512

由 $\tau=-t$ 和链式规则$\partial/\partial\tau=-\partial/\partial t$，而$\partial^2/\partial\tau^2=\partial^2/\partial t^2$．这样，波动算子关于时间是对称的，因此

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\nabla^2\right)G(x,t_1;x_1,t) = L[G(x,t_1;x_1,t)] = \delta(x-x_1)\delta(t-t_1).} \tag{11.2.17}$$

格林公式(11.2.12)给出了互反性公式，其中用到了两个格林函数：一个具有变化响应时间，

$$u = G(x,t;x_0,t_0), \tag{11.2.18}$$

另一个具有变化源时间，

$$v = G(x,t_1;x_1,t). \tag{11.2.19}$$

这两个格林函数都满足含相同波动算子 $L=\partial^2/\partial t^2-c^2\nabla^2$的偏微分方程．在格林公式(11.2.12)中从 $t=-\infty$ 到$t=+\infty$ 进行积分(即 $t_i=-\infty$，$t_f=+\infty$)．由于两个格林函数满足相同齐次边界条件，所以格林公式(11.2.12)给出

$$\int_{-\infty}^{\infty}\iiint[u\delta(x-x_1)\delta(t-t_1)-v\delta(x-x_0)\delta(t-t_0)]\mathrm{d}^3x\mathrm{d}t$$
$$=\iiint\left(u\frac{\partial v}{\partial t}-v\frac{\partial u}{\partial t}\right)\bigg|_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^3x. \tag{11.2.20}$$

由因果性原理知，对 $t<t_0$，u 与$\partial u/\partial t$ 为零，对于 $t>t_1$，v 与$\partial v/\partial t$ 为0．从而(11.2.20)的右端为零．因此，由狄拉克 δ 函数的性质，u 在 $x=x_1$ 和 $t=t_1$ 处等于其在 $x=x_0$ 和 $t=t_0$ 时的 v：

$$\boxed{G(x_1,t_1;x_0,t_0) = G(x_0,t_1;x_1,t_0),} \tag{11.2.21}$$

称为波动方程格林函数的*互反性公式*．假设 $t_1>t_0$，只要离源的流逝时间是相同的，则在 x_1 处(在时刻 t_1)对 x_0 处(在时刻 t_0)源的响应，与对 x_1 处源在 x_0 处(在时刻 t_1)的响应相同．由此可见，将源点与定位点对调对响应并无影响，称为定常格林公式的麦克斯韦互反性．

11.2.4 使用格林函数

与以往类似，这里用相应的格林公式(11.2.12)建立了格林函数与非齐次问题解之间的关系．令

513

$$u = u(x,t) \tag{11.2.22}$$

$$v = G(x,t_0;x_0,t) = G(x_0,t_0;x,t), \tag{11.2.23}$$

其中 $u(x, t)$是非齐次波动方程的解，满足

$$L(u) = Q(x,t)$$

和给定的初始条件 $u(x, 0)$与$\partial u/\partial t(x, 0)$，其中 $G(x, t_0; x_0, t)$是满足(11.2.17)的变源格林函数：

$$L[G(x,t_0;x_0,t)] = \delta(x-x_0)\delta(t-t_0)$$

并满足变源因果性原理

$$\text{对 } t > t_0, G(x,t_0;x_0,t) = 0.$$

G 满足齐次边界条件，但 u 可能不满足. 对 $t_i=0$ 与 $t_f=t_{0+}$ 用格林公式(11.2.12)，积分刚好过 $t=t_0$ 处的集中源：

$$\int_0^{t_{0+}}\iiint[u(x,t)\delta(x-x_0)\delta(t-t_0)-G(x,t_0;x_0,t)Q(x,t)]\mathrm{d}^3x\mathrm{d}t$$

$$=\iiint\left(u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}-v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)\Bigg|_0^{t_{0+}}\mathrm{d}^3x-c^2\int_0^{t_{0+}}\left[\oint\!\!\!\oint(u\nabla v-v\nabla u)\cdot\hat{n}\mathrm{d}S\right]\mathrm{d}t.$$

在 $t=t_{0+}$ 处，$v=0$，$\partial v/\partial t=0$，因为用的是变源格林函数. 由互反性公式(11.2.21)得到

$$\begin{aligned}u(x_0,t_0)&=\int_0^{t_{0+}}\iiint G(x_0,t_0;x,t)Q(x,t)\mathrm{d}^3x\mathrm{d}t\\&+\iiint\left[\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)G(x_0,t_0;x,0)-u(x,0)\frac{\partial}{\partial t}G(x_0,t_0;x,0)\right]\mathrm{d}^3x\\&-c^2\int_0^{t_{0+}}\left[\oint\!\!\!\oint(u(x,t)\nabla G(x_0,t_0;x,t)-G(x_0,t_0;x,t)\nabla u(x,t))\cdot\hat{n}\mathrm{d}S\right]\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

可以证明，在这些积分限中，t_{0+} 可以用 t_0 代替. 如果将 x 与 x_0(及 t 与 t_0)的位置对换，就得到 $u(x,t)$ 用格林函数 $G(x,t;x_0,t_0)$ 的表示公式：

$$\boxed{\begin{aligned}u(x,t)&=\int_0^t\iiint G(x,t;x_0,t_0)Q(x_0,t_0)\mathrm{d}^3x_0\mathrm{d}t_0\\&+\iiint\left[\frac{\partial u}{\partial t_0}(x_0,0)G(x,t;x_0,0)-u(x_0,0)\frac{\partial}{\partial t_0}G(x,t;x_0,0)\right]\mathrm{d}^3x_0\\&-c^2\int_0^t\left[\oint\!\!\!\oint(u(x_0,t_0)\nabla_{x_0}G(x,t;x_0,t_0)-G(x,t;x_0,t_0)\nabla_{x_0}u(x_0,t_0))\cdot\hat{n}\mathrm{d}S_0\right]\mathrm{d}t_0.\end{aligned}}$$

514

(11.2.24)

注意到，∇x_0 表示对源位置求导. 公式(11.2.24)表示了对三种非齐次项的响应：源项，初始条件和非齐次边界条件. 特别是，初始位置 $u(x_0,0)$ 有影响函数

$$-\frac{\partial}{\partial t_0}G(x,t;x_0,0)$$

(意思是初始算出的源时间导数)，而初始速度的影响函数是 $G(x,t;x_0,0)$.

另外，如果在边界上给定 u，则 G 满足相应的齐次边界条件；即在边界上 $G=0$. 此时，(11.2.24)中的边界项简化为

$$-c^2\int_0^t\left[\oint\!\!\!\oint u(x_0,t_0)\nabla_{x_0}G(x,t;x_0,t_0)\cdot\hat{n}\mathrm{d}S_0\right]\mathrm{d}t_0.$$

对这个非齐次边界条件的影响函数是

$$-c^2\nabla_{x_0}G(x,t;x_0,t_0)\cdot\hat{n}.$$

即 $-c^2$ 乘以格林函数的源外法向导数.

11.2.5 波动方程的格林函数

波动方程的格林函数满足(11.2.4)与(11.2.5)：

$$\boxed{\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 G = \delta(x - x_0)\delta(t - t_0)} \tag{11.2.25}$$

$$G(x,t;x_0,t_0) = 0, \text{对 } t < t_0, \tag{11.2.26}$$

以及齐次边界条件. 下面用不同的方式来描述这个格林函数.

11.2.6 格林函数的另一个微分方程

用格林公式，无源 $Q(x, t) = 0$ 且带齐次边界条件的波动方程的解，由格林函数通过(11.2.24)可表示为

$$u(x,t) = \iiint \left[\frac{\partial u}{\partial t_0}(x_0,0) G(x,t;x_0,0) - u(x_0,0) \frac{\partial}{\partial t_0} G(x,t;x_0,0) \right] \mathrm{d}^3 x_0.$$

由此可见，G 也是对导数$\partial u/\partial t$ 初始条件的影响函数，而 $-\partial G/\partial t_0$ 是对 u 初始条件的影响函数. 515 如果对初始条件 $u=0$ 与$\partial u/\partial t = \delta(x-x_0)$求解波动方程，则解就是格林函数本身. 因而格林函数 $G(x, t; x_0, t_0)$满足通常的无源的波动方程

$$\boxed{\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 G = 0} \tag{11.2.27}$$

和齐次边界条件以及在 $t = t_0$ 时的特殊集中初始条件:

$$G = 0 \tag{11.2.28}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \delta(x - x_0). \tag{11.2.29}$$

波动方程的格林函数可以直接由初值问题(11.2.27) ~ (11.2.29)确定，而不是由它的定义微分方程(11.2.4)或(11.2.26)确定. 习题 11.2.9 给出了(11.2.27) ~ (11.2.29)的另一种推导的轮廓，其中对定义方程(11.2.4)由 t_{0-} 到 t_{0+} 的积分.

11.2.7 一维波动方程的无穷空间格林函数和达朗贝尔解

这一小节将通过求解满足初始条件(11.2.28)与(11.2.29)的一维波动方程$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0$ 确定无穷空间格林函数. 第 12 章(第 4 章已简要提到)将证明，一维波动方程有个引人注目的通解，

$$G = f(x - ct) + g(x + ct), \tag{11.2.30}$$

其中$f(x-ct)$是以速度 c 向右移动的任意函数，$g(x+ct)$是以速度 $-c$ 向左移动的任意函数. 将(11.2.30)直接代入波动方程就可验证. 为简洁起见，假设 $t_0 = 0$，$x_0 = 0$. 由(11.2.28)，$t=0$ 时 $G=0$，此时，$g(x) = -f(x)$，因而 $G = f(x-ct) - f(x+ct)$. 计算得到$\frac{\partial G}{\partial t} = -c\frac{\mathrm{d}f(x-ct)}{\mathrm{d}(x-ct)} - c\frac{\mathrm{d}f(x+ct)}{\mathrm{d}(x+ct)}$. 要满足初始条件(11.2.29)，$\delta(x) = \left.\frac{\partial G}{\partial t}\right|_{t=0} = -2c\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$. 由积分得到 $f(x) = -\frac{1}{2c}H(x) + k$，其中 $H(x)$是赫维赛德阶梯函数(k 是一个不重要的积分常量):

$$G(x,t;0,0) = \frac{1}{2c}[H(x+ct) - H(x-ct)] = \begin{cases} 0 & |x| > ct \\ \frac{1}{2c} & |x| < ct. \end{cases} \tag{11.2.31}$$

516 因而，一维波动方程的无穷空间格林函数是一个以波速 c 移动的扩展矩形脉冲，如图 11.2.2 所示. 开始时(一般地，当 $t=t_0$ 时)，它位于一个点 $x=x_0$ 处. 每端都以速度 c 向外扩展. 一般地，

$$G(x,t;x_0,t_0) = \frac{1}{2c}\{H[(x-x_0)+c(t-t_0)] - H[(x-x_0)-c(t-t_0)]\}. \tag{11.2.32}$$

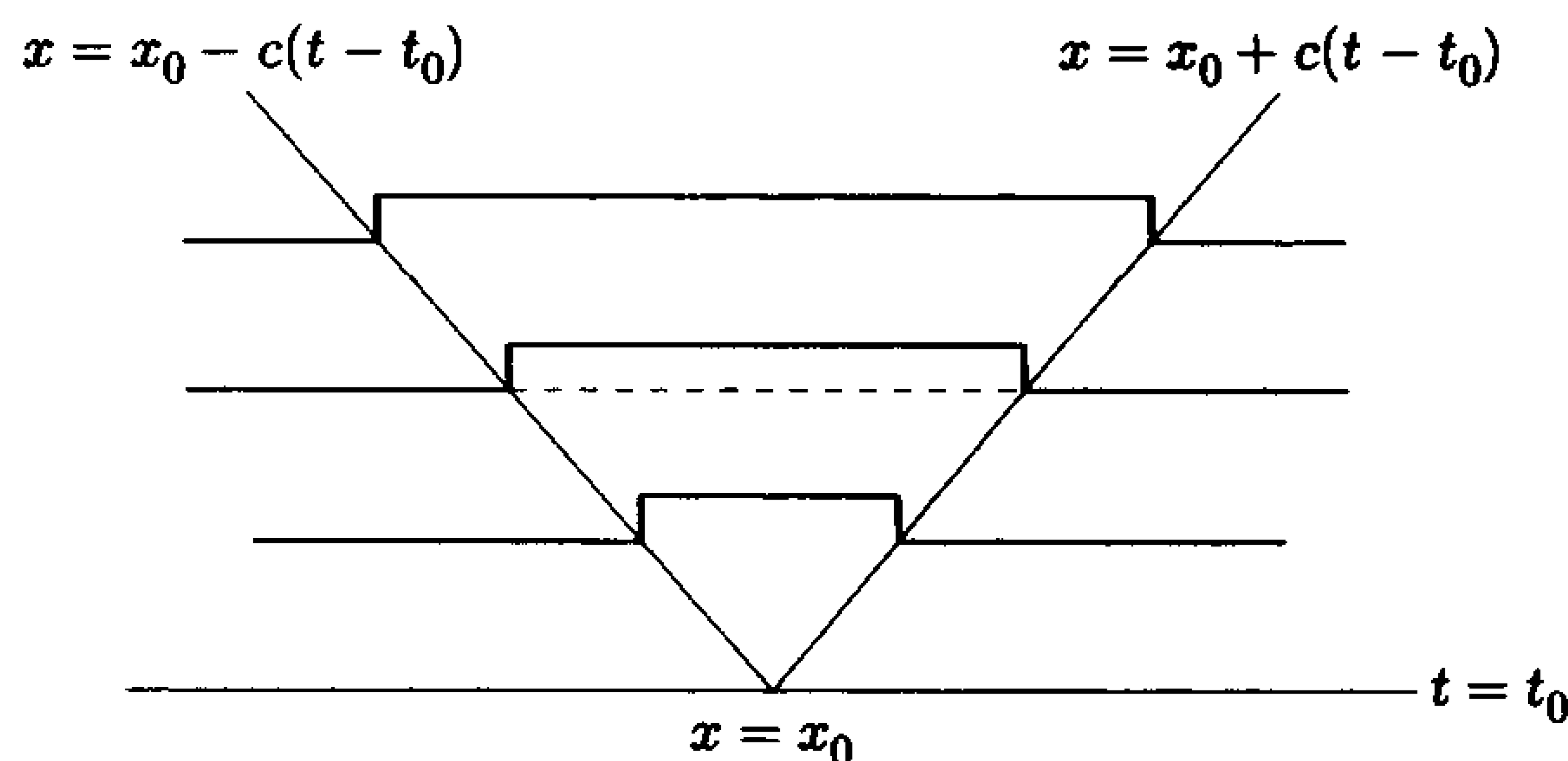


图 11.2.2 一维波动方程的格林函数

达朗贝尔求解公式. 为了说明这个格林函数的用法，考虑无源波动方程在无穷域 $-\infty<x<\infty$ 上(见 9.7.1 节)的初值问题：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{11.2.33}$$

$$u(x,0) = f(x) \tag{11.2.34}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x). \tag{11.2.35}$$

在公式(11.2.24)中边界基值[⊖]为零，因为对足够大(正或负)的 x，$G=0$，如图 11.2.2 所示. 由于无源，$u(x,t)$ 仅由初始条件决定：

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[g(x_0)G(x,t;x_0,0) - f(x_0)\frac{\partial}{\partial t_0}G(x,t;x_0,0)\right]dx_0.$$

需要由(11.2.32)计算 $\partial/\partial t_0 G(x,t;x_0,0)$. 利用阶梯函数(见(9.3.32))的导数性质得到

517 $$\frac{\partial}{\partial t_0}G(x,t;x_0,t_0) = \frac{1}{2}[-\delta(x-x_0+c(t-t_0)) - \delta(x-x_0-c(t-t_0))],$$

因而，

$$\frac{\partial}{\partial t_0}G(x,t;x_0,0) = \frac{1}{2}[-\delta(x-x_0+ct) - \delta(x-x_0-ct)].$$

最后，得到初值问题的解：

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(x_0)\,dx_0. \tag{11.2.36}$$

⊖ 一个无穷空间问题的边界基值就是有界区域 $-L<x<L$ 在 $L\to\infty$ 时的极限.

称之为波动方程的达朗贝尔求解公式. 而且它由特征曲线法(见第 12 章)更容易得到. 在那儿将讨论一维波动方程的物理解释.

相关问题. 一维波动方程的半无穷空间或有界空间问题的求解可以通过由像源法所得到的格林函数. 在某些情形下，还可使用变换或级数方法. 不过，最有用处的仍是特征曲线法.

11.2.8 三维波动方程的无穷空间格林函数(惠更斯原理)

本小节利用(11.2.27)~(11.2.29)求解无穷空间的格林函数. 这个解应该是球对称的并且仅依赖距离 $\rho = |x - x_0|$. 因而，格林函数满足球对称波动方程，$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - c^2 \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2 \frac{\partial G}{\partial \rho}\right) = 0$.

通过著名的技巧性变换 $G = \frac{h}{\rho}$，球对称波动方程可化简为

$$0 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial h}{\partial\rho} - h\right) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 h}{\partial\rho^2}\right).$$

这样 h 满足一维波动方程. 在第 12 章中会证明，一维波动方程的通解可以表示为以速度 c 移动的左行波与右行波之和. 因此，得到极其重要的结果：球对称波动方程的通解是

$$\boxed{G = \frac{f(\rho - ct) + g(\rho + ct)}{\rho}.} \tag{11.2.37}$$

$f(\rho - ct)$以速度 c 作球面扩展，而 $g(\rho + ct)$以速度 c 作球面收缩. 为满足初始条件(11.2.28)，$t=0$ 时 $G=0$，$g(\rho) = -f(\rho)$，因此 $G = \frac{f(\rho-ct) - f(\rho+ct)}{\rho}$，$\frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{c}{\rho}\left[\frac{\mathrm{d}f(\rho-ct)}{\mathrm{d}(\rho-ct)} + \frac{\mathrm{d}f(\rho+ct)}{\mathrm{d}(\rho+ct)}\right]$.

这样，由初始条件(11.2.29)得到

518

$$\delta(x - x_0) = \left.\frac{\partial G}{\partial t}\right|_{t=0} = -\frac{2c}{\rho}\frac{\mathrm{d}f(\rho)}{\mathrm{d}\rho}.$$

其中 $\delta(x - x_0)$是三维 δ 函数. 函数 f 在 $\rho=0$ 以外为常量，取为 0. 在三维空间中半径为 R 的球面上积分，这里用到了对 $\rho>0$，$f=0$，在分部积分之后$\Big($说明分部积分的一个方法就是引入 f 对 $\rho<0$ 的偶延拓，这样 $\int_0^R = \frac{1}{2}\int_{-R}^R\Big)$ 得到

$$1 = -2c\int_0^R \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho}4\pi\rho^2\mathrm{d}\rho = 8\pi c\int_0^R f\mathrm{d}\rho,$$

因而$f = \frac{1}{4\pi c}\delta(\rho)$，其中 $\delta(\rho)$ 为一维 δ 函数，这是偶函数，因而满足$\int_0^R\delta(\rho)\mathrm{d}\rho = \frac{1}{2}$. 所以，

$$\boxed{G = \frac{1}{4\pi c\rho}[\delta(\rho - ct) - \delta(\rho + ct)].} \tag{11.2.38}$$

然而，由于 $\rho>0$，$t>0$，这后一个狄拉克 δ 函数总为零. 为了更具一般性，应该用 $t - t_0$ 代替 t. 这样就得到了三维波动方程的无穷空间格林函数：

$$\boxed{G(x,t;x_0,t_0) = \frac{1}{4\pi c\rho}[\delta(\rho - c(t - t_0))],} \tag{11.2.39}$$

其中 $\rho=|x-x_0|$. 三维波动方程的格林函数是一个以径向速度 c 自源($x=x_0$, $t=t_0$)向外扩展的球壳冲激，其强度以与$\frac{1}{\rho}$成比例的速度衰减.

惠更斯原理. 前面证明了(t_0 时刻)在 x_0 处的集中源(在时刻 t)仅影响这样的位置 x: $|x-x_0|=c(t-t_0)$. 源到位置 x 的距离等于 c 乘以时间. 点源发出了以速度 c 向所有方向行进的波. 在 $t-t_0$ 时间之后，源的作用在距离为 $c(t-t_0)$的球壳上. 这便是众所周知的惠更斯原理的一部分.

例. 为了更加确定，现在来分析源 $Q(x, t)$的作用. 考虑三维无穷空间中的有源波动方程，其初始条件为零. 根据格林公式(11.2.24)，

$$u(x,t)=\int_0^t\iiint G(x,t;x_0,t_0)Q(x_0,t_0)\mathrm{d}^3x_0\mathrm{d}t_0, \tag{11.2.40}$$

这里用到了"边界"基值为零. 利用三维无穷空间格林函数，

519

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi c}\int_0^t\iiint\frac{1}{\rho}\delta[\rho-c(t-t_0)]Q(x_0,t_0)\mathrm{d}^3x_0\mathrm{d}t_0, \tag{11.2.41}$$

其中 $\rho=|x-x_0|$. 仅有的有贡献源满足 $|x-x_0|=c(t-t_0)$. 时刻 t，在 x 处的作用是由所有接收到的源引起的；每个源的传播速度为 c.

11.2.9 二维无穷空间格林函数

波动方程的二维格林函数并不像一维和三维那么简单. 在习题 11.2.12 中，二维格林函数由降维法导出，是对二维源用了三维法. 信号还是以速度 c 传播，解在信号到达之前为 0，也就是对流逝时间 $t-t_0<\frac{r}{c}$，其中 $r=|x-x_0|$ 为二维距离. 然而，一旦接收到信号，解在首次接收信号时达到最大(无穷大)，然后信号逐渐递减：

$$\boxed{G(x,t;x_0,t_0)=\begin{cases}0 & \text{若 } r>c(t-t_0)\\ \dfrac{1}{2\pi c}\dfrac{1}{\sqrt{c^2(t-t_0)^2-r^2}} & \text{若 } r<c(t-t_0).\end{cases}} \tag{11.2.42}$$

11.2.10 小结

对于任何维波动方程，信息都以速度 c 传播. 一维和三维波动方程的格林函数是不同的. 而惠更斯原则仅在三维中成立，其中集中源的影响仅在以速度 c 扩展的球面上能够感受到. 一维时，影响则在扩展的脉冲中均匀地感受到. 在二维情形，最大作用是在对应速度 c 的圆周上，但脉冲之后作用减小.

习题 11.2

11.2.1 (a)证明：对于 $G(x, t; x_0, t_0)$, $\partial G/\partial t=-\partial G/\partial t_0$.

(b)使用(a)证明：对 $u(x, 0)=f(x)$的响应是对$\partial u/\partial t(x, 0)=f(x)$响应的时间导数.

11.2.2 写出(11.2.24)对一维问题的表示.

11.2.3 如果在边界上对于 x，$G(x, t; x_0, t_0)=0$，请说明(11.2.24)中对应项(对任意 x)消失的原因.

11.2.4 对于一维波动方程，画出函数 $G(x, t; x_0, t_0)$的图像：

(a)作为 x 的函数，其中 t 固定(x_0，t_0 也都固定).

520

(b)作为 t 的函数，其中 x 固定(x_0，t_0 也都固定).

11.2.5 (a)对于一维波动方程，对 x_0(x，t，t_0 固定)的哪些值 $G(x, t; x_0, t_0)\neq 0$?

(b)使用互反性质，确定(a)的答案.

11.2.6 (a)求解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t) \quad -\infty < x < \infty,$$

其中 $u(x, 0)=0$，$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)=0$.

*(b)处在什么时空位置的源 $Q(x, t)$会影响在位置 x_1 处和时刻 t_1 的 u?

11.2.7 若 $Q(x, t)=g(x)e^{-i\omega t}$，重新考虑习题(11.2.6).

*(a)求解 $u(x, t)$. 证明 $g(x)$的影响函数是一个外扩展波.

(b)确定形式为 $u(x, t)=\psi(x)e^{-i\omega t}$的特解. (见习题 8.3.13.)

(c)比较(a)与(b)的结果.

11.2.8 *(a)在三维无穷空间中求解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u + g(x)e^{-i\omega t},$$

其中初始条件为 $u(x, 0)=0$，$\partial u/\partial t(x, 0)=0$. 由所得解证明 $g(x)$的影响函数是个外扩展波.

(b)与习题 9.5.10 的结果进行比较.

11.2.9 考虑波动方程的格林函数 $G(x, t; x_0, t_0)$. 由(11.2.24)容易求得 $Q(x_0, t_0)$，$u(x_0, 0)$与 $\partial u/\partial t_0(x_0, 0)$的影响函数. 这些结果也可用下面的方法求得：

(a)对于 $t>t_{0+}$，证明

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 G, \tag{11.2.43}$$

其中(从 t_{0-} 到 t_{0+} 积分)

$$G(x,t_{0+};x_0,t_0) = 0 \tag{11.2.44}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x,t_{0+};x_0,t_0) = \delta(x-x_0). \tag{11.2.45}$$

由(11.2.32)简要说明为什么 $G(x, t; x_0, 0)$是$\partial u/\partial t_0(x_0, 0)$的影响函数.

521

(b)设 $\phi=\partial G/\partial t$. 证明对于 $t>t_{0+}$，

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \phi \tag{11.2.46}$$

$$\phi(x,t_{0+};x_0,t_0) = \delta(x-x_0) \tag{11.2.47}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x,t_{0+};x_0,t_0) = 0. \tag{11.2.48}$$

由(11.2.46)~(11.2.48)简要说明为什么 $-\partial G/\partial t_0(x, t; x_0, 0)$是 $u(x_0, 0)$的影响函数.

11.2.10 考虑

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t) \quad x > 0$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$$

$$u(0,t) = h(t).$$

(a)使用像源法确定对应的格林函数.

*(b)若 $Q(x, t)=0$, $f(x)=0$, $g(x)=0$, 求解 $u(x, t)$.

(c)t 取何值时, $h(t)$会影响 $u(x_1, t_1)$? 试作简要物理解释.

11.2.11　重新考虑习题11.2.10:

(a)如果 $Q(x, t)\neq 0$, 但 $f(x)=0$, $g(x)=0$, $h(t)=0$

(b)如果 $f(x)\neq 0$, 但 $Q(x, t)=0$, $g(x)=0$, $h(t)=0$

(c)如果 $g(x)\neq 0$, 但 $Q(x, t)=0$, $f(x)=0$, $h(t)=0$

11.2.12　考虑二维波动方程的格林函数 $G(x, t; x_1, t_1)$, 将其作为下列三维波动方程的解:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u + Q(x,t)$$

$$u(x,0) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

$$Q(x,t) = \delta(x - x_1)\delta(y - y_1)\delta(t - t_1).$$

下面利用这个降维法(由三维降至二维)求解二维格林函数.

522

*(a)使用三维波动方程的通解求解 $G(x, t; x_1, t_1)$. 这里源 $Q(x, t)$可以理解为二维空间的点源或三维空间的线源. (提示: 引入三维空间中到点源的距离 ρ 计算 $\int_{-\infty}^{\infty}\cdots \mathrm{d}z_0$,

$$\rho^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_0)^2.)$$

(b)证明 G 仅为流逝时间 $t - t_1$ 与二维空间中到线源的距离 r 的函数,

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2.$$

(c)在流逝了时间 τ 之后, 哪里能感受到冲激的作用? 与一维及三维问题作比较.

(d)固定 $t - t_1$, 画出 G 的图像.

(e)固定 r, 画出 G 的图像.

11.2.13　考虑三维波动方程, 确定对以常速 v 移动的单位点源的响应:

$$Q(x,t) = \delta(x - vt).$$

11.2.14　求解三维无穷空间中的无源波动方程, 初始条件为

(a)$u(x, 0)=0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)=g(x)$. 这个结果称为基尔霍夫公式, 尽管是泊松首先提出的(根据 Weinberger[1995]).

(b)$u(x, 0)=f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)=0$. (提示: 使用(11.2.24).)

(c)用下列方法求解(b). 设 $v(x, t)=\frac{\partial}{\partial t}u(x, t)$, 其中 $u(x, 0)$满足(a). (提示: 证明 $v(x, t)$满足具有条件 $v(x, 0)=g(x)$, $\frac{\partial v}{\partial t}(x, 0)=0$ 的波动方程.)

11.2.15　由考虑满足 $Q(x, t)=\delta(x-x_1)\delta(t-t_1)$的三维问题导出波动方程的一维格林函数. (提示: 对于 y_0, z_0 使用极坐标, 积分时中心位于 $y_0=y$, $z_0=z$.)

11.3 热传导方程的格林函数

11.3.1 概述

本小节求解具有与时间可能相关源的热传导方程

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\nabla^2 u + Q(x,t),} \tag{11.3.1}$$

523

其中初始条件为 $u(x,\ 0)=g(x)$. 下面在一维、二维以及三维空间中分析这个问题. 本小节不指定几何区域或可能的非齐次边界条件. 也许会有三种非齐次项：源 $Q(x,\ t)$、初始条件以及边界条件.

定义格林函数 $G(x,\ t;\ x_0,\ t_0)$ 为下式在相同区域上满足相应齐次边界条件的解：

$$\boxed{\frac{\partial G}{\partial t} = k\,\nabla^2 G + \delta(x - x_0)\delta(t - t_0).} \tag{11.3.2}$$

由格林函数表示(时刻 t)在 x 处对(时刻 t_0)在 x_0 处集中热源的温度响应，要求满足因果性原理：格林函数在源作用前为零，

$$\boxed{G(x,t;x_0,t_0) = 0, \quad \text{对} \quad t < t_0.} \tag{11.3.3}$$

另外，要证明需要用到的只是流逝时间 $t-t_0$(从初始时刻 $t=t_0$ 开始)：

$$\boxed{G(x,t;x_0,t_0) = G(x,t - t_0;x_0,0),} \tag{11.3.4}$$

称为平移性质. 方程(11.3.4)由设 $T=t-t_0$ 来证明，此时格林函数 $G(x,\ t;\ x_0,\ t_0)$ 满足

$$\frac{\partial G}{\partial T} = k\,\nabla^2 G + \delta(x - x_0)\delta(T) \qquad \text{当}\ T < 0\ \text{时}, G = 0.$$

这恰好是对 $T=0$ 时刻在 $x=x_0$ 的集中源的响应，因此给出了(11.3.4).

这里把格林函数的实际计算推到后面的小节中. 现在假设格林函数已知，要讨论如何用格林函数表示温度 $u(x,\ t)$.

11.3.2 热传导方程的非自伴特性

为了说明这个问题如何与本书中讨论的其他问题相联系，引入线性算子记号，

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - k\,\nabla^2, \tag{11.3.5}$$

称为热传导算子或扩散算子. 在前面讨论的问题中，非齐次问题的解与其格林函数的关系是基于格林公式. 前面解决了 L 为施图姆-刘维尔算子，拉普拉斯算子及最近的波动算子问题.

524

热传导算子 L 由两部分组成，∇^2 容易由拉普拉斯(见(11.2.8))的格林公式分析，然而，分析不经意出现的$\partial/\partial t$ 要比分析其他前面的算子困难得多. 为说明一阶导数导致的困难，考虑

$$L = \frac{\partial}{\partial t}.$$

对于二阶施图姆-刘维尔算子，初等积分就给出了格林公式. 但同样的想法对 $L=\dfrac{\partial}{\partial t}$ 却行不通. 特别地，

$$\int [uL(v) - vL(u)]\,\mathrm{d}t = \int \left(u\frac{\partial v}{\partial t} - v\frac{\partial u}{\partial t}\right)\mathrm{d}t$$

不能化简. 没有计算 $\int [uL(v) - vL(u)]\,\mathrm{d}t$ 的公式. 算子 $L=\partial/\partial t$ 是非自伴的. 由标准的分部积分，

$$\int_a^b uL(v)\,\mathrm{d}t = \int_a^b u\frac{\partial v}{\partial t}\mathrm{d}t = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t,$$

这样

$$\int_a^b \left(u\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial t}\right)\mathrm{d}t = uv\Big|_a^b. \tag{11.3.6}$$

对于算子 $L=\partial/\partial t$，引入伴随算子，

$$\boxed{L^* = -\frac{\partial}{\partial t}.} \tag{11.3.7}$$

由(11.3.6)得到

$$\boxed{\int_a^b [uL^*(v) - vL(u)]\,\mathrm{d}t = -uv\Big|_a^b.} \tag{11.3.8}$$

这是格林公式的相应公式[⊖].

11.3.3 格林公式

现在回到非齐次热传导问题：

525

$$\boxed{L(u) = Q(x,t)} \tag{11.3.9}$$

$$\boxed{L(G) = \delta(x-x_0)\delta(t-t_0),} \tag{11.3.10}$$

其中

$$\boxed{L = \frac{\partial}{\partial t} - k\,\nabla^2.} \tag{11.3.11}$$

对于非齐次热传导方程，其结果变得更复杂些，这是由于必须引入伴随热传导算子，

$$\boxed{L^* = -\frac{\partial}{\partial t} - k\,\nabla^2.} \tag{11.3.12}$$

直接计算得到

$$uL^*(v) - vL(u) = -u\frac{\partial v}{\partial t} - v\frac{\partial u}{\partial t} + k(v\,\nabla^2 u - u\,\nabla^2 v),$$

因而有

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_{t_i}^{t_f}\iiint[uL^*(v) - vL(u)]\,\mathrm{d}^3x\mathrm{d}t\\ &= -\iiint uv\Big|_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}^3x + k\int_{t_i}^{t_f}\oiint(v\,\nabla u - u\,\nabla v)\cdot\hat{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t.\end{aligned}} \tag{11.3.13}$$

这里对整个空间和从某个时刻 $t=t_i$ 到另一时刻 $t=t_f$ 进行了积分. 对$\partial/\partial t$ 项用到了(11.3.6)，对算子∇^2用到了格林公式(11.2.8). 而"边界条件"有两种类型，空间部分($\oiint$[⊜])与时间部分(初始时刻 t_i 和终了时刻 t_f). 如果 u 与 v 均满足相同的齐次边界条件(常类型)，则空间基值为0，

⊖ 对于一阶算子，典型地只有一个"边界条件"$u(a)=0$. 为使分部积分项为零，必须引入伴随边界条件，$v(b)=0$.

⊜ 对于无穷或半无穷区域，考虑有限域适当极限. 如果 u 与 v 衰减得充分快，则无穷远处的边界项为0.

$$\oiint (v\nabla u - u\nabla v)\cdot \hat{n}\mathrm{d}S = 0.$$

方程(11.3.13)将包含初始基值($t=t_i$)与终了基值($t=t_f$). [526]

11.3.4 伴随格林函数

为了最终导出 $u(x, t)$用格林函数 $G(x, t; x_0, t_0)$的表示公式，必须考虑对不同源时间的求和. 这样，就要考虑变源格林函数，

$$G(x,t_1;x_1,t) = G(x,-t;x_1,-t_1),$$

其中用到了平移性质. 这恰好是分析波动方程(见(11.2.15))的方法. 由因果性，$t>t_1$ 时，这些为零：

$$G(x,t_1;x_1,t) = 0, \quad 对 \quad t>t_1. \tag{11.3.14}$$

设 $\tau=-t$，可以看出变源格林函数 $G(x, t_1; x_1, t)$满足

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t} - k\nabla^2\right)G(x,t_1;x_1,t) = \delta(x-x_1)\delta(t-t_1), \tag{11.3.15}$$

以及变源的因果性原理(11.3.14). 并不出现热传导算子 L，而是伴随热传导算子 L^*：

$$\boxed{L^*[G(x,t_1;x_1,t)] = \delta(x-x_1)\delta(t-t_1).} \tag{11.3.16}$$

可见 $G(x, t_1; x_1, t)$是伴随热传导算子(满足变源因果性原理)的格林函数. 有时称为伴随格林函数 $G^*(x, t; x_1, t_1)$. 不过，没有必要计算或使用它，因为

$$G^*(x,t;x_1,t_1) = G(x,t_1;x_1,t), \tag{11.3.17}$$

且当 $t>t_1$ 时两者都为零.

11.3.5 互反性

类似于波动方程，现在导出互反性公式. 这里有些细微差别，因为在格林公式(11.3.13)中出现了伴随算子. 在(11.3.13)中引入

$$u = G(x,t;x_0,t_0) \tag{11.3.18}$$

$$v = G(x,t_1;x_1,t), \tag{11.3.19}$$

已经证明了后者是变源或伴随格林函数. 因而 u 与 v 的定义性质是

$$L(u) = \delta(x-x_0)\delta(t-t_0) \qquad L^*(v) = \delta(x-x_1)\delta(t-t_1)$$

$$u = 0 \text{ 时 } t<t_0 \qquad\qquad v = 0 \text{ 时 } t>t_1.$$

[527]

从 $t=-\infty$ 到 $t=+\infty$ 积分(即在(11.3.13)中 $t_i=-\infty$，$t_f=+\infty$)得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\iiint[G(x,t;x_0,t_0)\delta(x-x_1)\delta(t-t_1) - G(x,t_1;x_1,t)\delta(x-x_0)\delta(t-t_0)]\mathrm{d}^3x\mathrm{d}t$$

$$= -\iiint G(x,t;x_0,t_0)G(x,t_1;x_1,t)\Big|_{t=-\infty}^{t=\infty}\mathrm{d}^3x,$$

由于 u 与 v 满足相同的齐次边界条件，使得

$$\oiint (v\nabla u - u\nabla v)\cdot\hat{n}\mathrm{d}S$$

为零. 由因果性，在 $t=\pm\infty$ 处的基值也为零. 利用狄拉克 δ 函数的性质，就得到了互反性公式：

$$\boxed{G(x_1,t_1;x_0,t_0) = G(x_0,t_1;x_1,t_0).} \tag{11.3.20}$$

如同对波动方程(见(11.2.21))的证明，如果从源开始的流逝时间相同，则对换源点与定位点不会改变其响应. 在这个意义上，热传导(扩散)方程的格林函数是对称的.

11.3.6 用格林函数表示解

为了得到非齐次问题的解与格林函数的关系，应用格林公式(11.3.13)，其中 u 满足(11.3.1)和非齐次边界条件与初始条件. 设 v 等于变源或伴随格林函数，$v=G(x, t_0; x_0, t)$. 利用定义微分方程(11.3.9)与(11.3.10)，格林公式(11.3.13)变为

$$\int_0^{t_{0+}}\iiint[u\delta(x-x_0)\delta(t-t_0)-G(x,t_0;x_0,t)Q(x,t)]\mathrm{d}^3x\mathrm{d}t$$

$$=\iiint u(x,0)G(x,t_0;x_0,0)\mathrm{d}^3x+k\int_0^{t_{0+}}\oint[G(x,t_0;x_0,t)\nabla u-u\nabla G(x,t_0;x_0,t)]\cdot\hat{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t,$$

因为 $t>t_0$ 时 $G=0$. 解出 u 得到

$$u(x_0,t_0)=\int_0^{t_0}\iiint G(x,t_0;x_0,t)Q(x,t)\mathrm{d}^3x\mathrm{d}t+\iiint u(x,0)G(x,t_0;x_0,0)\mathrm{d}^3x$$

$$+k\int_0^{t_0}\oint[G(x,t_0;x_0,t)\nabla u-u\nabla G(x,t_0;x_0,t)]\cdot\hat{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t.$$

528 可以证明积分中的 t_{0+} 可由 t_0 代替. 现在(与前面一样)对换 x 与 x_0 和 t 与 t_0. 再用互反性可导出

$$\boxed{\begin{aligned}u(x,t)=&\int_0^t\iiint G(x,t;x_0,t_0)Q(x_0,t_0)\mathrm{d}^3x_0\mathrm{d}t_0+\iiint G(x,t;x_0,0)u(x_0,0)\mathrm{d}^3x_0\\&+k\int_0^t\oint[G(x,t;x_0,t_0)\nabla_{x_0}u-u(x_0,t_0)\nabla_{x_0}G(x,t;x_0,t_0)]\cdot\hat{n}\mathrm{d}S_0\mathrm{d}t_0.\end{aligned}} \tag{11.3.21}$$

方程(11.3.21)表明了三个非齐次项是如何影响温度 $u(x, t)$ 的. 格林函数 $G(x, t; x_0, t_0)$ 是源 $Q(x_0, t_0)$ 及初始温度分布 $u(x_0, 0)$ 的影响函数(如果在 $t_0=0$ 时计算格林函数的值，这是很有道理的). 另外，非齐次边界条件由 $k\int_0^t\oint(G\nabla_{x_0}u-u\nabla_{x_0}G)\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S_0\mathrm{d}t_0$ 项说明. 方程(11.3.21)说明了因果性原理；在 t 时刻，只有当 $t_0<t$ 时，源与边界条件才有作用. 方程(11.3.21)推广了在 8.2 节中对有限区域上零边界条件的一维热传导方程，用特征函数展开法得到的结果.

例. 在边界上 u 及其法向导数似乎都是需要的. 为了澄清非齐次边界条件的作用，考虑在整个边界上指定了温度的例子：

$$\text{在边界上}: u(x,t)=u_B(x,t),$$

格林函数满足相关的齐次边界条件，现在

$$\text{对边界上的 } x: G(x,t;x_0,t_0)=0.$$

因此，该指定温度分布的影响是

$$-k\int_0^t\oint u_B(x_0,t_0)\nabla_{x_0}G(x,t;x_0,t_0)\cdot\hat{n}\mathrm{d}S_0\mathrm{d}t_0.$$

非齐次边界条件的影响函数是负 k 乘以格林函数(双极分布)的法向导数.

一维情形. 说明对于一维问题有必要作的修改可能是有益的. 体积积分 $\iiint d^3x_0$ 变成一维积分 $\int_a^b dx_0$. 在闭曲面 $\oiint ds_0$ 上的边界基值变成了两端点 $x=a$ 与 $x=b$ 处的基值. 例如, 如果已指定两端的温度, $u(a, t)=A(t)$, $u(b, t)=B(t)$, 那么这些非齐次边界条件影响温度 $u(x, t)$:

529

$$-k\int_0^t \oiint u_B(x_0,t_0)\,\nabla_{x_0}G(x,t;x_0,t_0)\cdot\hat{n}\,dS_0\,dt_0 \text{ 变为}$$

$$-k\int_0^t\left[B(t_0)\frac{\partial G}{\partial x_0}(x,t;b,t_0)-A(t_0)\frac{\partial G}{\partial x_0}(x,t;a,t_0)\right]dt_0.$$

这与对非齐次边界条件的特征函数展开法(第 9 章)所得到的结果一致.

11.3.7 格林函数的另一个微分方程

利用格林公式导出的表达式(11.3.21), 这个表达式说明了热传导方程的源, 非齐次边界条件以及初始条件的影响. 热传导方程的格林函数不仅是源的影响函数, 同时也是初始条件的影响函数. 如果无源, 边界条件就是齐次的, 而初始条件为 δ 函数, 那么响应就是格林函数本身. 格林函数 $G(x, t; x_0, t_0)$ 可以直接由无源扩散方程确定:

$$\boxed{\frac{\partial G}{\partial t}=k\nabla^2G,} \tag{11.3.22}$$

要求满足齐次边界条件与在 $t=t_0$ 时刻的集中初始条件:

$$G=\delta(x-x_0), \tag{11.3.23}$$

而不是它的定义微分方程(11.3.2).

11.3.8 扩散方程的无穷空间格林函数

如果既无边界也无源, $\frac{\partial u}{\partial t}=k\nabla^2u$ 满足初始条件 $u(x, 0)=f(x)$, 则(11.3.21)是以其格林函数表示了扩散方程的解:

$$u(x,t)=\iiint u(x_0,0)G(x,t;x_0,0)\,d^3x_0=\iiint f(x_0)G(x,t;x_0,0)\,d^3x_0. \tag{11.3.24}$$

不用求解(11.3.22), 即可注意到这个初值问题在第 10 章中用傅里叶变换分析过了, 而且还得到了一维解(10.4.6):

530

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x_0)\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-(x-x_0)^2/4kt}dx_0. \tag{11.3.25}$$

比较(11.3.24)与(11.3.25), 就能确定扩散方程的一维无穷空间格林函数:

$$G(x,t;x_0,0)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-(x-x_0)^2/4kt}. \tag{11.3.26}$$

由于平移不变性, 更一般的格林函数会包含流逝时间:

$$\boxed{G(x,t;x_0,t_0)=\frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-t_0)}}e^{-(x-x_0)^2/4k(t-t_0)}.} \tag{11.3.27}$$

对于 n 维($n=1, 2, 3$)，在第10章中也得到了解(10.6.95)，因而扩散方程的 n 维无穷空间格林函数为

$$\boxed{G(x,t;x_0,t_0)=\left[\frac{1}{4\pi k(t-t_0)}\right]^{\frac{n}{2}}e^{-|x-x_0|^2/4k(t-t_0)}.} \tag{11.3.28}$$

该格林函数表明，只要流逝时间相同，响应位置与源位置是对称的. 如同10.4节所讨论的一维问题一样，集中热源的影响在离开源后指数递减. 对于小时间(t 在 t_0 附近)，衰减的特别强烈.

例. 这样就能够得到无穷域上有源热传导方程的解：

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}=k\nabla^2u+Q(x,t)} \tag{11.3.29}$$

$$u(x,0)=f(x).$$

根据(11.3.21)与(11.3.28)，这个解是

$$\boxed{\begin{aligned}u(x,t)=&\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{4\pi k(t-t_0)}\right]^{n/2}e^{-(x-x_0)^2/4k(t-t_0)}Q(x_0,t_0)\,d^nx_0\,dt_0\\&+\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{4\pi kt}\right)^{n/2}e^{-(x-x_0)^2/4kt}f(x_0)\,d^nx_0.\end{aligned}}$$

531　　　　(11.3.30)

如果 $Q(x, t)=0$，这个公式就简化为在第10章中没有用格林函数而直接用傅里叶变换得到的解.

11.3.9　热传导方程的格林函数(在半无穷域上)

在这一小节得到了用于求解一维($x>0$)半无穷空间非齐次热传导方程的格林函数，在 $x=0$ 处满足非齐次边界条件：

$$\text{PDE:}\ \boxed{\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+Q(x,t)}\ x>0, \tag{11.3.31}$$

$$\text{BC:}\ \boxed{u(0,t)=A(t)} \tag{11.3.32}$$

$$\text{IC:}\ \boxed{u(x,0)=f(x).} \tag{11.3.33}$$

如果能够求得格林函数，公式(11.3.21)即可用于确定 $u(x, t)$. 格林函数 $G(x, t; x_0, t_0)$ 是对集中源的响应：

$$\frac{\partial G}{\partial t}=k\frac{\partial^2G}{\partial x^2}+\delta(x-x_0)\delta(t-t_0).$$

格林函数满足对应的齐次边界条件，

$$G(0,t;x_0,t_0)=0,$$

以及因果性原理，

$$\text{对 } t<t_0:\quad G(x,t;x_0,t_0)=0.$$

这个格林函数由像源法(见9.5.8节)确定. 不是考虑在 $x=x_0$ 处有一个集中正源的半无穷

区间，而是考虑在 $x=-x_0$ 处还有一个负源(像源)的无穷区间. 由对称性，对所有 t 在 $x=0$ 处的温度 G 是零. 因而，所求的格林函数是两个无穷空间格林函数的和，

$$G(x,t;x_0,t_0)=\frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-t_0)}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4k(t-t_0)}\right]-\exp\left[-\frac{(x+x_0)^2}{4k(t-t_0)}\right]\right\}. \tag{11.3.34}$$

注意：在 $x=0$ 处边界条件自动满足.

532

11.3.10 热传导方程的格林函数(在有限区域上)

对一维杆($0<x<L$)，第9章通过特征函数展开法确定了热传导方程的格林函数. 在两个端点处满足零边界条件的格林函数为

$$G(x,t;x_0,t_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x_0}{L}\mathrm{e}^{-k(n\pi/L)^2(t-t_0)}. \tag{11.3.35}$$

利用像源法可以得到这个格林函数的另一种表示. 由于对称性(见图 11.3.1)，要满足 $x=0$ 与 $x=L$ 处的边界条件，只要正集中源位于 $x=x_0+2Ln$，负集中源位于 $x=-x_0+2Ln$(对整数 n，$-\infty<n<\infty$). 使用无穷空间的格林函数，就有一维杆格林函数的另一种表示：

$$G(x,t;x_0,t_0)=\frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-t_0)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-x_0-2Ln)^2}{4k(t-t_0)}\right]-\exp\left[-\frac{(x+x_0-2Ln)^2}{4k(t-t_0)}\right]\right\}. \tag{11.3.36}$$

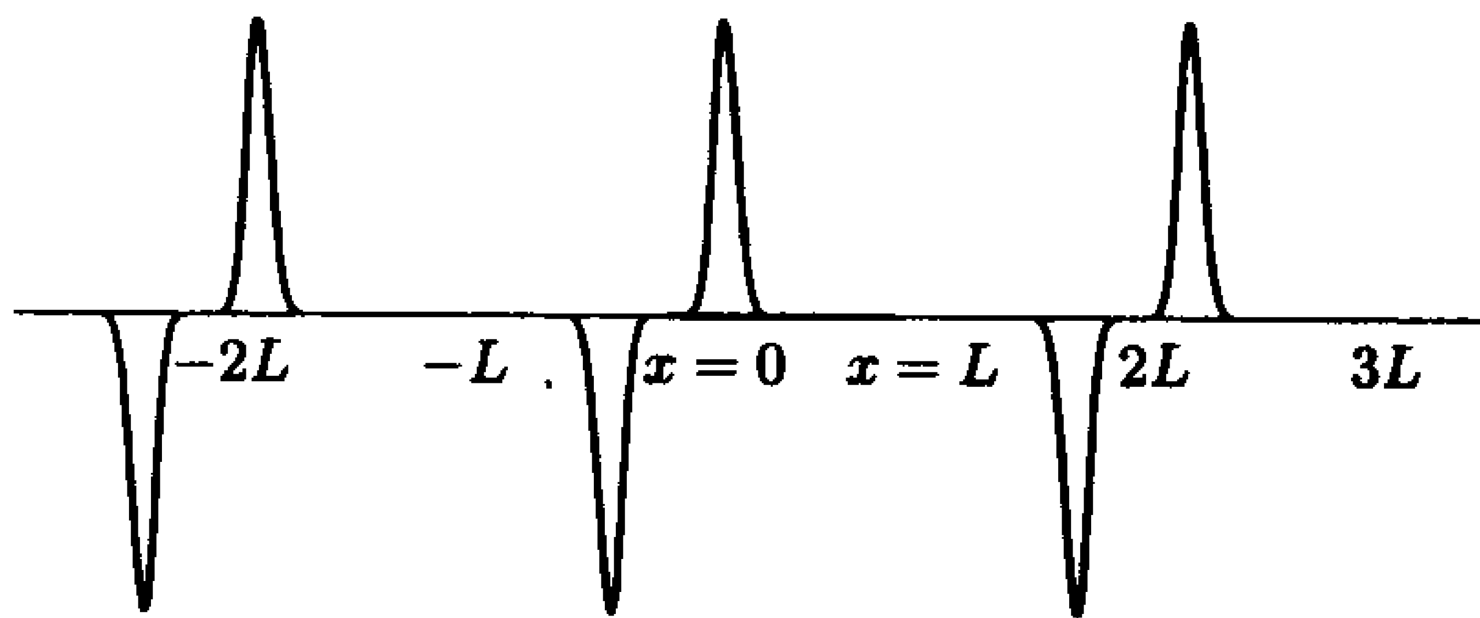


图 11.3.1 对有限一维杆上热传导方程格林函数的多像源

每种形式都有其自身的长处. 如果 $(t-t_0)k/L^2$ 大，特征函数展开(11.3.35)是快速收敛的无穷级数. 因而，它在 $t\gg t_0$ 时最有用. 事实上，如果 $t\gg t_0$，

$$G(x,t;x_0,t_0)\approx\frac{2}{L}\sin\frac{\pi x_0}{L}\sin\frac{\pi x}{L}\mathrm{e}^{-k(\pi/L)^2(t-t_0)}.$$

然而，如果流逝时间 $t-t_0$ 小，就需要无穷级数更多的项.

533

使用像源法，格林函数还是由无穷级数(11.3.36)表示. 无穷空间格林函数(对固定 t)在离开源位置时按指数衰减，

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-t_0)}}e^{-(x-x_0)^2/4k(t-t_0)}.$$

当 t 靠近 t_0，它在空间急剧衰减. 如果 t 靠近 t_0，则只有接近响应位置 x 的源是重要的；而远处的源并不重要(如果 t 靠近 t_0)，参看图 11.3.1. 这样，像源可以忽略不计，只要 t 靠近 t_0(且 x 或 x_0 都不靠近 0 或 L，见习题 11.3.8 中的解释). 有近似公式

$$G(x,t;x_0,t_0) \approx \frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-t_0)}}e^{-(x-x_0)^2/4k(t-t_0)};$$

如果 t 靠近 t_0，则有边界值的格林函数(在远离边界的区域内)可由无穷空间格林函数近似.

说得更准确些，如果 $L^2/k(t-t_0)$ 大，每个像源的作用比实际源的作用小得多. 这便可以更好地理解“小时间”近似. 格林函数可由无穷空间格林函数近似，只要 $t-t_0$ 小(即 $t-t_0 \ll L^2/k$，其中 L^2/k 是可测物理量的比值). 换句话说，这个近似对“长杆”成立，即 $L \gg \sqrt{k(t-t_0)}$.

总之，如果 $L^2/k(t-t_0) \gg 1$，像源法给出了格林函数的快速收敛无穷级数；如果 $L^2/k(t-t_0) \ll 1$，特征函数展开给出格林函数的快速收敛无穷级数的表示. 如果 $L^2/k(t-t_0)$ 既不大也不小，则两种展开法差不多，但起码都需要相当多的级数项.

习题 11.3

11.3.1 证明：对(11.3.2)及(11.3.3)定义的格林函数

$$G^*(x,t;x_0,t_0) = G(x_0,t_0;x,t).$$

11.3.2 考虑

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t) \quad x > 0$$

$$u(0,t) = A(t)$$

$$u(x,0) = f(x).$$

(a) $A(t)=0$，$f(x)=0$，求解方程. 如果 $Q(x,t)=1$，化简所得结果.

(b)若 $Q(x,t)=0$，$A(t)=0$，求解方程. 如果 $f(x)=1$，化简所得结果.

534 *(c)若 $Q(x,t)=0$，$f(x)=0$，求解方程. 如果 $A(t)=1$，化简所得结果.

*11.3.3 确定下列问题的格林函数：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t) \quad x > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = A(t)$$

$$u(x,0) = f(x).$$

11.3.4 考虑(11.3.31)的格林函数(11.3.34). 证明：这个半无穷问题的格林函数可由无穷问题的格林函数近似，只要

$$\frac{xx_0}{k(t-t_0)} \gg 1 \quad (\text{即 } t-t_0 \text{ 小}).$$

并在物理上解释，为什么当 x 或 x_0 靠近边界时，这个近似不再成立.

11.3.5 考虑

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t)$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = A(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = B(t).$$

(a)用特征函数展开法得到对应的格林函数.

(b)近似(a)中的格林函数. 在什么条件下这个近似有效?

(c)用无穷空间格林函数获得对应的格林函数.

(d)近似(c)中的格林函数. 在什么条件下这个近似有效?

(e)用格林函数解出 $u(x, t)$.

11.3.6 直接应用特征函数展开法于定义微分方程以确定热传导方程的格林函数，其中在 $x=0$ 与 $x=L$ 处满足零边界条件. (提示：答案由(11.3.35)给出.)

535

第12章 线性和拟线性波动方程的特征线法

12.1 引言

在前一章中，得到了一维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{12.1.1}$$

满足初始条件

$$u(x,0) = f(x) \tag{12.1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \tag{12.1.3}$$

的一些结果.

对在 $x=0$ 和 $x=L$ 零位移的振动弦，由第4章的分离变量法得到了有些复杂的傅里叶正弦级数解

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L}\left(a_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \sin \frac{n\pi ct}{L}\right). \tag{12.1.4}$$

对这个解的进一步分析[公式(4.4.14)，练习4.4.7和练习4.4.8]表明，它可以表示为一个前行波与一个后行波的和. 特别地，

$$u(x,t) = \frac{f(x-ct)+f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(x_0)\,\mathrm{d}x_0, \tag{12.1.5}$$

其中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别是(12.1.2)和(12.1.3)中所给函数的奇周期延拓. 在第11章中应用无穷空间的格林函数，对无边界条件的一维波动方程也得到了(12.1.5)的结果.

本章要介绍求解一维波动方程的更强有力特征线法. 证明了 $u(x,t)=F(x-ct)+G(x+ct)$，其中 F 和 G 是任意函数；并证明(12.1.5)对无穷空间问题成立. 接下来，讨论对半无穷和有界区域问题需要做的修改. 在12.6节中特征线法将用于求解拟线性偏微分方程. 12.6.2节介绍交通流模型；12.6.3节讨论扩展波. 要证明当特征线相交时就会出现冲击波，并导出冲击波速度的表达式. 12.6.4节将相当深入地讨论冲击波的动力学. 12.7节用特征线法求解由波动方程式导出的短时距方程.

12.2 一阶波动方程的特征线

12.2.1 概述

一维波动方程可以重写为

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.} \tag{12.2.1}$$

简短计算表明它可以按两种方式作“因式分解”：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}-c\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0,$$

这是因为，混合二阶导数在两个分解中都消去了. 设

$$\boxed{w=\frac{\partial u}{\partial t}-c\frac{\partial u}{\partial x}} \tag{12.2.2}$$

$$\boxed{v=\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x},} \tag{12.2.3}$$

[537]

由此可见，一维波动方程(含二阶导数)给出两个一阶波动方程：

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t}+c\frac{\partial w}{\partial x}=0} \tag{12.2.4}$$

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t}-c\frac{\partial v}{\partial x}=0.} \tag{12.2.5}$$

12.2.2 一阶偏微分方程的特征线法

首先讨论这两个简单的一阶偏微分方程中的任一个：

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t}+c\frac{\partial w}{\partial x}=0.} \tag{12.2.6}$$

要介绍的方法有助于对一维波动方程(12.2.1)的分析. 考虑由移动观察者 $x=x(t)$ 测量得到的 $w(x(t),t)$ 的变化率. 链式法则[⊖]给出

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w(x(t),t)=\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\partial w}{\partial x}.} \tag{12.2.7}$$

第一项 $\partial w/\partial t$ 表示 w 在固定位置的变化，而第二项 $(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)(\partial w/\partial x)$ 表示 w 由观察者移动到不同的地方而引出的变化. 将(12.2.7)与 w 的偏微分方程(12.2.6)作比较，可清楚地看出：若观察者以速度 c 移动，也就是说

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=c,} \tag{12.2.8}$$

则有

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=0.} \tag{12.2.9}$$

这样，w 是常数. 以特定速度 c 移动的观察者对 w 测不出变化.

[538]

特征线法. 这样，两个常微分方程(12.2.8)和(12.2.9)代替了偏微分方程(12.2.6)式. 积分(12.2.8)式可得

$$\boxed{x=ct+x_0,} \tag{12.2.10}$$

⊖ 这里移动观察者测量得到的 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ 有时称为实质导数.

如图 12.2.1 所示，这是(12.2.6)的平行特征线族[⊖]. 注意：在 $t=0$，$x=x_0$. $w(x,t)$沿着这条线是常数(不必要处处为常数). 作为波，w 以波速 c 传播[参看(12.2.8)].

通解. 如果在初始时刻 $t=0$ 给定 $w(x,t)$，

$$w(x,0) = P(x), \qquad (12.2.11)$$

要确定 w 在(x,t)点的值，根据 w 沿着特征线是常数

$$w(x,t) = w(x_0,0) = P(x_0).$$

给定 x 和 t，由特征线可知参数 $x_0=x-ct$，从而可得

$$\boxed{w(x,t) = P(x-ct),} \qquad (12.2.12)$$

称为方程(12.2.6)的通解.

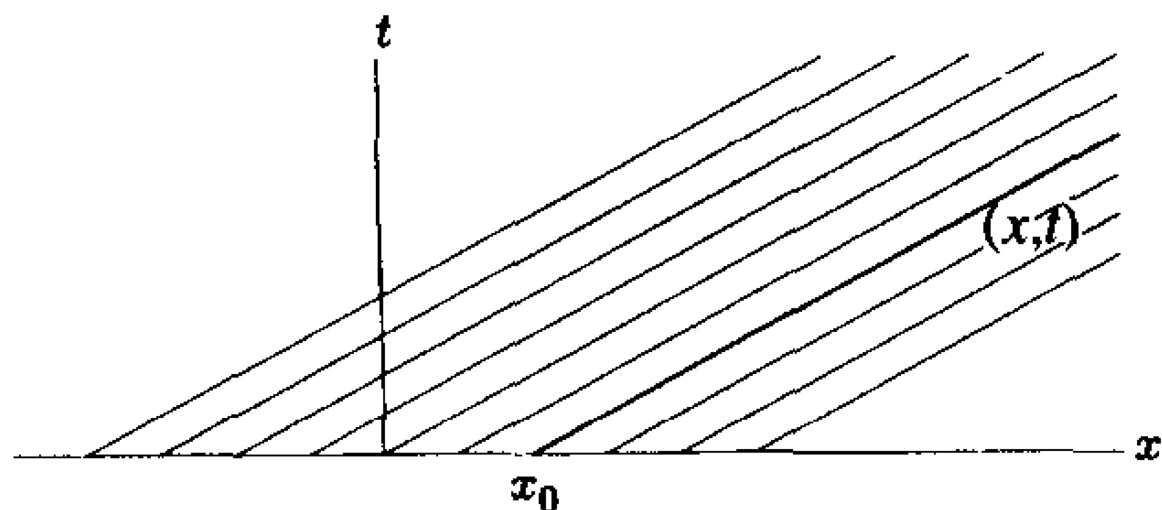


图 12.2.1 一阶波动方程的特征线

可以把 $P(x)$看成一个任意函数. 要验证这一点，将(12.2.12)代回偏微分方程(12.2.6). 根据链式法则

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}(x-ct)}\frac{\partial(x-ct)}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}(x-ct)}$$

和

539

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}(x-ct)}\frac{\partial(x-ct)}{\partial t} = -c\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}(x-ct)}.$$

这样，就验证了(12.2.12)满足方程(12.2.6). 一阶偏微分方程的通解包含着一个任意函数，而常微分方程的通解包含的则是任意常数.

例. 设方程

$$\frac{\partial w}{\partial t} + 2\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

满足初始条件

$$w(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 4x & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1. \end{cases}$$

已经证明了 w 沿特征线 $x-2t=$常数是常数，并保持相同形状以速度 2(向右)移动. 两条重要的特征线 $x=2t+0$ 和 $x=2t+1$ 以及各个时刻的解见图 12.2.2. 如果 $x>2t+1$ 或 $x<2t$，$w(x,t)=0$，否则由位移，

$$w(x,t) = 4(x-2t) \quad 若 2t < x < 2t+1.$$

为了得到这个解析解，利用以 $x=x_0$ 为起点的特征线：

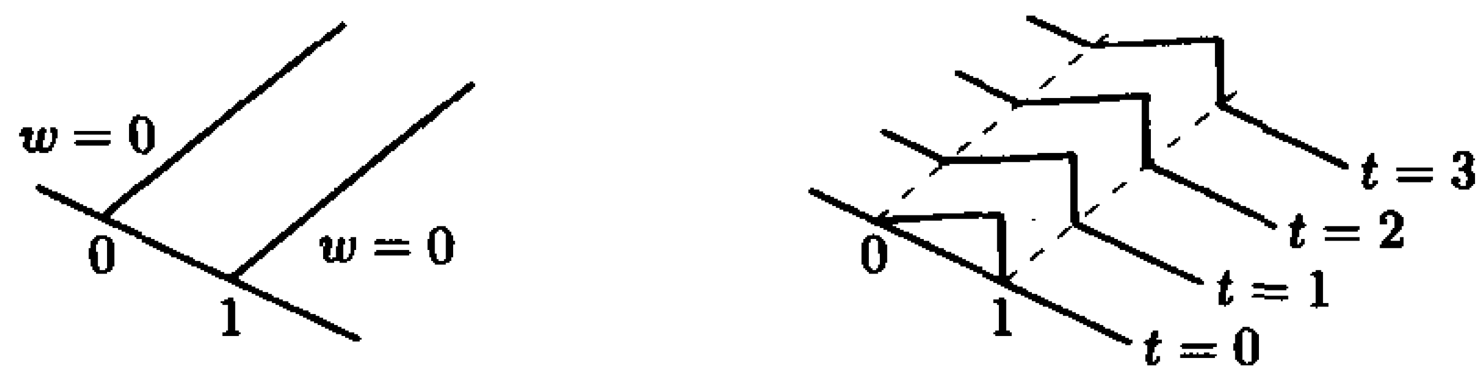


图 12.2.2 一阶波动方程的传播

$$x = 2t + x_0.$$

沿着这条特征线，$w(x,t)$是常数. 若 $0<x_0<1$，与前面一样，

$$w(x,t) = w(x_0,0) = 4x_0 = 4(x-2t),$$

它成立的范围是 $0<x_0<1$，或等价地为 $0<x-2t<1$.

同一形状. 一般地，$w(x,t)=P(x-ct)$. 在固定 t，一阶波动方程的解就是同一形状位移了距离 ct(距离 = 速度 × 时间). 示意图见图 12.2.3.

⊖ 特征线是这样的曲线，沿着它一个偏微分方程简化为一个常微分方程.

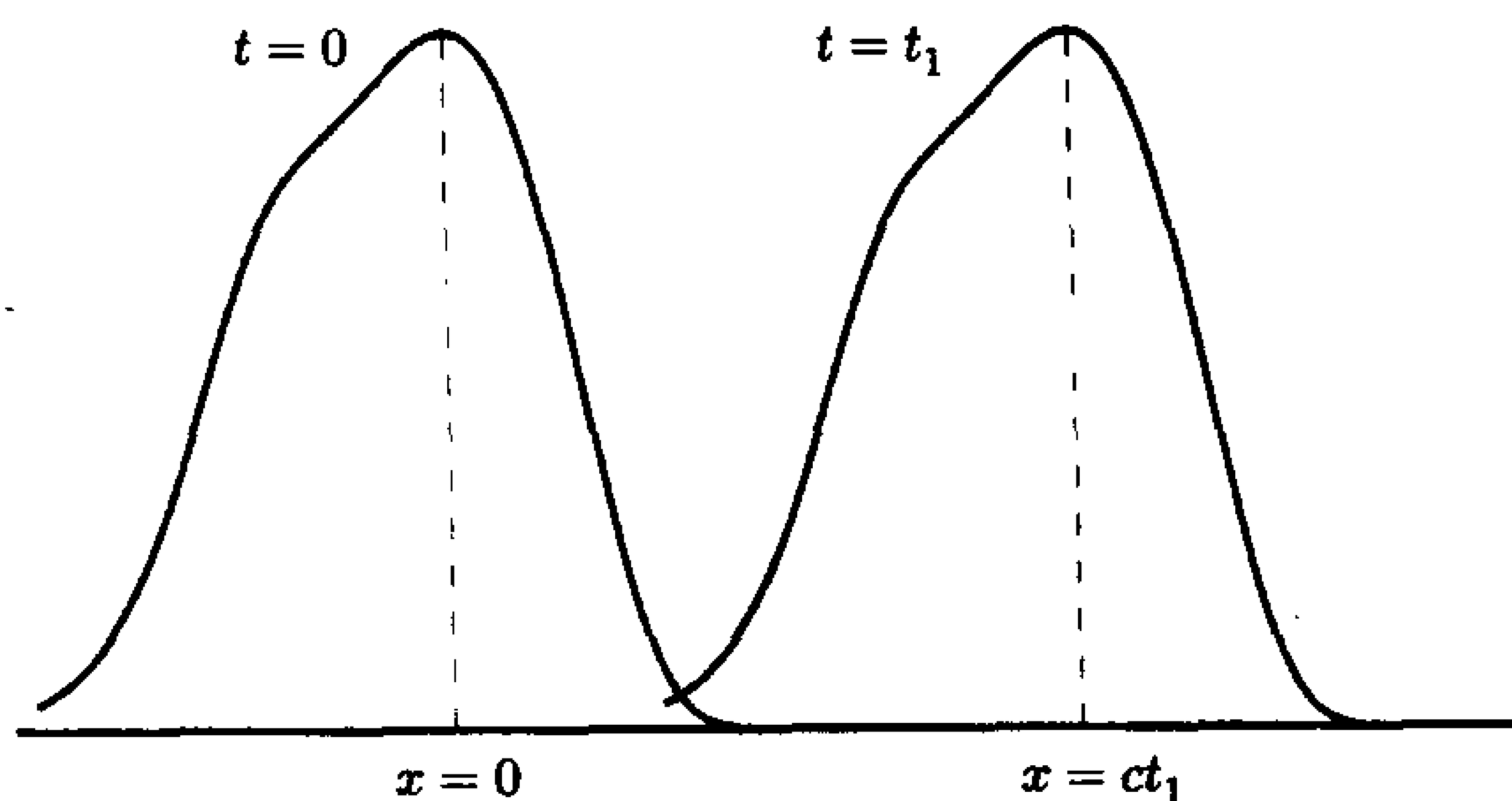


图 12.2.3 一阶波动方程解的形状不变性

解初值问题和求通解举例. 考虑

$$\frac{\partial w}{\partial t}+3t^2\frac{\partial w}{\partial x}=2tw, \tag{12.2.13}$$

满足初始条件 $w(x,\ 0)=P(x)$ 的解. 由特征线法,

$$\text{如果}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3t^2, \tag{12.2.14}$$

$$\text{则}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=2tw. \tag{12.2.15}$$

该特征线不是直线, 但是满足

$$x=t^3+x_0, \tag{12.2.16}$$

其中特征线始于点 $x=x_0(t=0)$. 沿着这条特征线积分常微分方程(12.2.15), 可得

$$w=k\mathrm{e}^{t^2}. \tag{12.2.17}$$

为了在 x_0 满足初始条件 $w(x_0,\ 0)=P(x_0)$, 有 $P(x_0)=k$, 因此由特征线法得到初值问题的解为

$$w(x,t)=P(x_0)\mathrm{e}^{t^2}=P(x-t^3)\mathrm{e}^{t^2}. \tag{12.2.18}$$

因为 $P(x-t^3)$ 是 $(x-t^3)$ 的任意函数, 所以(12.2.18)是偏微分方程(12.2.13)的通解. 可通过略微不同的方式利用特征线法确定通解. 而解常微分方程所得到的任意常数是彼此的任意函数. 这样, (12.2.17)中的 k 是 $x_0=x-t^3$ 的任意函数, 就直接可从(12.2.17)得到偏微分方程的通解:

$$w(x,t)=f(x-t^3)\mathrm{e}^{t^2}, \tag{12.2.19}$$

其中 f 是 $x-t^3$ 的任意函数. 现在可以用通解(12.2.19)得到初值问题的解.

小结. 用特征线法求解了一阶波动方程(12.2.6). 在 12.3 ~ 12.5 节中将使用该方法求解波动方程(12.1.1). 读者可以直接阅读 12.6 节, 那里介绍了求解拟线性偏微分方程的特征线法.

540 ~ 541

习题 12.2

12.2.1 证明波动方程可以看成下列两个一阶偏微分方程的耦合组:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-c\frac{\partial u}{\partial x}=w$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+c\frac{\partial w}{\partial x}=0.$$

12.2.2 求解

$$\frac{\partial w}{\partial t}-3\frac{\partial w}{\partial x}=0 \quad 满足\ w(x,0)=\cos x.$$

12.2.3　求解

$$\frac{\partial w}{\partial t}+4\frac{\partial w}{\partial x}=0 \quad 满足\ w(0,t)=\sin 3t.$$

12.2.4　在 $x>0$，$t>0$ 上，求解

$$\frac{\partial w}{\partial t}+c\frac{\partial w}{\partial x}=0 \quad (c>0)$$

满足

$$\begin{aligned} w(x,0) &= f(x) \quad x>0 \\ w(0,t) &= h(t) \quad t>0. \end{aligned}$$

12.2.5　应用特征线法求解(如果需要，请参看12.6节).

(a) $\frac{\partial w}{\partial t}+c\frac{\partial w}{\partial x}=e^{2x}$，其中 $w(x,\ 0)=f(x)$.

*(b) $\frac{\partial w}{\partial t}+x\frac{\partial w}{\partial x}=1$，其中 $w(x,\ 0)=f(x)$.

(c) $\frac{\partial w}{\partial t}+t\frac{\partial w}{\partial x}=1$，其中 $w(x,\ 0)=f(x)$.

*(d) $\frac{\partial w}{\partial t}+3t\frac{\partial w}{\partial x}=w$，其中 $w(x,\ 0)=f(x)$.

*12.2.6　考虑初值问题(如果需要，请参看12.6节)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}+2u\frac{\partial u}{\partial x}=0 \\ u(x,0)=f(x). \end{cases}$$

证明其特征线是直线.

12.2.7　在习题12.2.6中，取

[542]

$$u(x,0)=f(x)=\begin{cases} 1 & x<0 \\ 1+x/L & 0<x<L \\ 2 & x>L. \end{cases}$$

(a)确定该方程的特征线，并画出草图.

(b)求解 $u(x,\ t)$. 并对于固定的 t，画出 $u(x,\ t)$的图像.

12.2.8　在习题12.2.6中，取

$$u(x,0)=f(x)=\begin{cases} 1 & x<0 \\ 2 & x>0. \end{cases}$$

用在习题12.2.7所得解中令 $L\to 0$ 来求解 $u(x,\ t)$. 并画出特征线和解 $u(x,\ t)$在 t 固定时的草图.

12.2.9　受移动观察者分析的启发，作自变量从坐标系$(x,\ t)$到以速度 c 移动的坐标系$(\xi,\ t')$的变换，其中 $\xi=x-ct$，$t'=t$，然后求解(12.2.6).

12.2.10　对一阶拟线性偏微分方程

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=c,$$

其中 a，b，c 是 x，y 和 u 的函数. 证明特征线法(如果需要，请参看12.6节)给出

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{du}{c}.$$

12.2.11　做12.6节中的以下习题：12.6.1、12.6.2、12.6.3、12.6.8、12.6.10、12.6.11.

12.3　一维波动方程的特征线法

12.3.1　通解

由一维波动方程

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0} \tag{12.3.1}$$

导出了两个一阶偏微分方程，即$\partial w/\partial t + c\partial w/\partial x = 0$ 和$\partial v/\partial t - c\partial v/\partial x = 0$，其中 $w = \partial u/\partial t - c\partial u/\partial x$，$v = \partial u/\partial t + c\partial u/\partial x$. 证明了 w 保持同一形状以速度 c 移动：

$$w = \frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x} = P(x - ct). \tag{12.3.2}$$

[543]

v 的问题是完全相同的(用 $-c$ 替换 c). 因此，证明了 v 在速度 $-c$ 下是平移不变的：

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = Q(x + ct). \tag{12.3.3}$$

联立(12.3.2)和(12.3.3)，得到

$$2\frac{\partial u}{\partial t} = P(x - ct) + Q(x + ct) \quad 和 \quad 2c\frac{\partial u}{\partial x} = Q(x + ct) - P(x - ct),$$

这样

$$\boxed{u(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct),} \tag{12.3.4}$$

其中 F, G 是任意函数$\left(-cF' = \frac{1}{2}P,\ cG' = \frac{1}{2}Q\right)$. 达朗贝尔 1747 年就得到了这个结果. (12.3.4)是一个奇妙的结果，它是一个很不平凡的偏微分方程——一维波动方程(12.3.1)的通解.

通解是两个波 $F(x-ct)$ 与 $G(x+ct)$ 的和，$F(x-ct)$ 是以速度 c 向右移动的固定波形波，$G(x+ct)$ 是以速度 c 向左移动的固定波形波. 如果知道了 $F(x)$ 和 $G(x)$，就可以勾画出这个解. 把 $F(x)$ 向右作 ct 距离的位移，把 $G(x)$ 向左作 ct 距离的位移，然后把两者相加. 虽然每个波形都是不变的，但是其和的波形一般是随着时间变化的. 在 12.3.2 节中将说明如何根据初始条件确定 $F(x)$ 和 $G(x)$.

特征线. 解的一部分沿特征线 $x - ct =$ 常数不变，而另一部分则沿着特征线 $x + ct =$ 常数不变. 因此一维波动方程(12.3.1)有两族特征线，如图 12.3.1 所示.

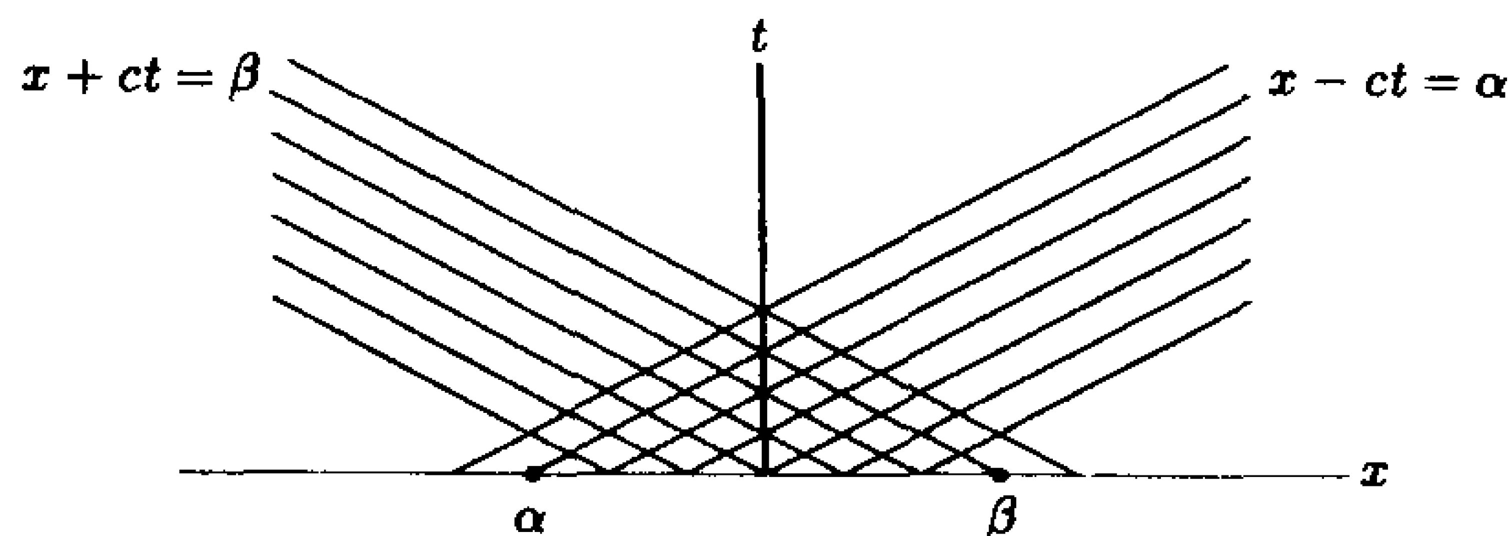


图 12.3.1 一维波动方程的特征线

通解的另一种推导. 波动方程的通解还可以用有些技巧的变量替换推导出来，变换到以速度 $\pm c$ 移动的"特征线坐标系"$\xi = x - ct$，$\eta = x + ct$. 由链式法则，一阶导数由$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}$，$\frac{\partial}{\partial t} = -c\frac{\partial}{\partial \xi} + c\frac{\partial}{\partial \eta}$给出. 再将相应的二阶导数代入到波动方程(12.3.1)得到

[544]

$$c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right).$$

两端消去 $c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)$，可得

$$4c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

对 ξ 积分(固定 η)，可得$\frac{\partial u}{\partial \eta} = g(\eta)$，其中 $g(\eta)$ 是 η 的任意函数. 然后对 η 积分(固定 ξ)就给

出了通解(12.3.4)，$u=F(\xi)+G(\eta)=F(x-ct)+G(x+ct)$，其中 F，G 是任意函数.

12.3.2 初值问题(无穷区域)

在 12.3.1 节中得到了一维波动方程的通解是

$$\boxed{u(x,t) = F(x-ct)+G(x+ct).} \tag{12.3.5}$$

下面来确定任意函数以便满足初始条件

$$\boxed{u(x,0) = f(x)} \quad -\infty < x < \infty \tag{12.3.6}$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)} \quad -\infty < x < \infty. \tag{12.3.7}$$

由这些初始条件得到

$$f(x) = F(x) + G(x) \tag{12.3.8}$$

$$\frac{g(x)}{c} = -\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dx}. \tag{12.3.9}$$

消去 $F(x)$，求解 $G(x)$；例如将(12.3.8)式的导数与(12.3.9)式相加给出

$$\frac{dG}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{df}{dx} + \frac{g(x)}{c}\right).$$

545 作积分就得到

$$\boxed{G(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(\bar{x})\,d\bar{x}} + k \tag{12.3.10}$$

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(\bar{x})\,d\bar{x}} - k, \tag{12.3.11}$$

其中，后一个方程是由(12.3.8)得到的. 根据(12.3.5)，将(12.3.10)和(12.3.11)两式(作适当位移)相加便得到了 $u(x, t)$，其中 k 可以忽略.

作图方法. 解 $u(x, t)$ 的图像可以根据(12.3.5)按照下述步骤画出：

1. 给定 $f(x)$ 和 $g(x)$，绘出

$$\frac{1}{2}f(x), \quad \frac{1}{2c}\int_0^x g(\bar{x})\,d\bar{x}$$

的图像，其中先对后一个积分.

2. 由加减得到 $F(x)$ 和 $G(x)$；参看(12.3.10)和(12.3.11).
3. 把 $F(x)$ 和 $G(x)$ 的图像分别向右、向左平移(位移)距离 ct.
4. 将这两个位移后的函数相加，就满足(12.3.5)了.

静态初值条件. 如果振动弦在初始时刻是静止的[$\partial u/\partial t(x, 0)=g(x)=0$]，那么由(12.3.10)和(12.3.11)，$F(x)=G(x)=\frac{1}{2}f(x)$. 这样

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-ct) + f(x+ct)]. \tag{12.3.12}$$

初始条件 $u(x, 0)=f(x)$ 分裂成两部分；一半向左、一半向右.

例. 假设无限振动弦初始时被撑成单个矩形脉冲. 然后静态放开. 相应的初值条件是

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < h \\ 0 & |x| > h \end{cases}$$

和

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) = 0.$$

这个解由(12.3.12)给出．将这两个矩形脉冲相加就得到图 12.3.2．这两个脉冲一直重叠直到右行波的左端通过左行波的右端．由于二者都以速度 c 传播，它们以速度 $2c$ 相分离．由于最初二者相距 $2h$，所以这两个脉冲分离的时间是 546

$$t = \frac{\text{距离}}{\text{速度}} = \frac{2h}{2c} = \frac{h}{c}.$$

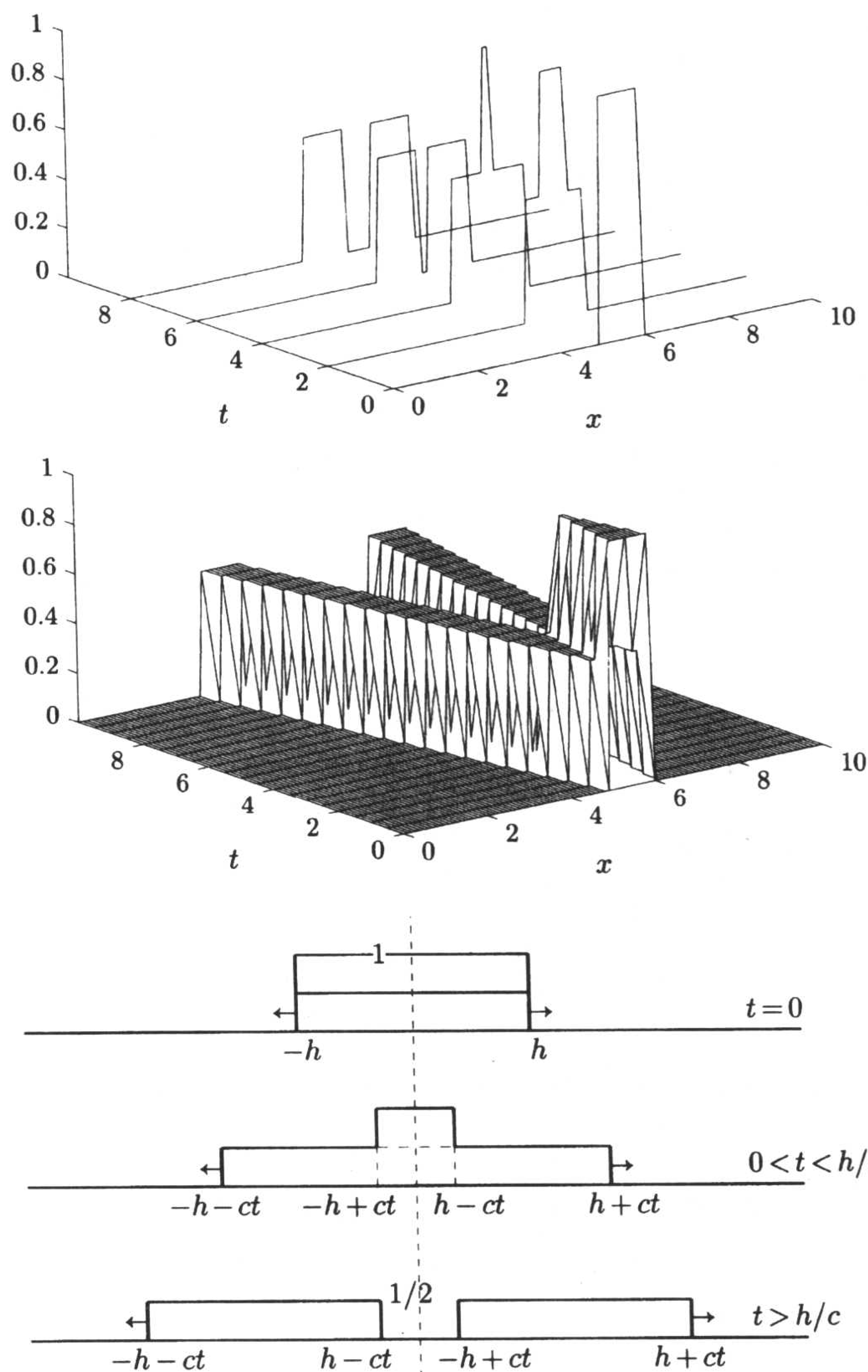


图 12.3.2 一维波动方程的初值问题

547

在图 12.3.3 中画出了重要的特征线. F 以速度 c 向右移动保持不变、G 以速度 c 向左移动保持不变. 由(12.3.10)和(12.3.11)

$$F(x)=G(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & |x|<h\\ 0 & |x|>h.\end{cases}$$

这些信息已出现在图 12.3.3 中.

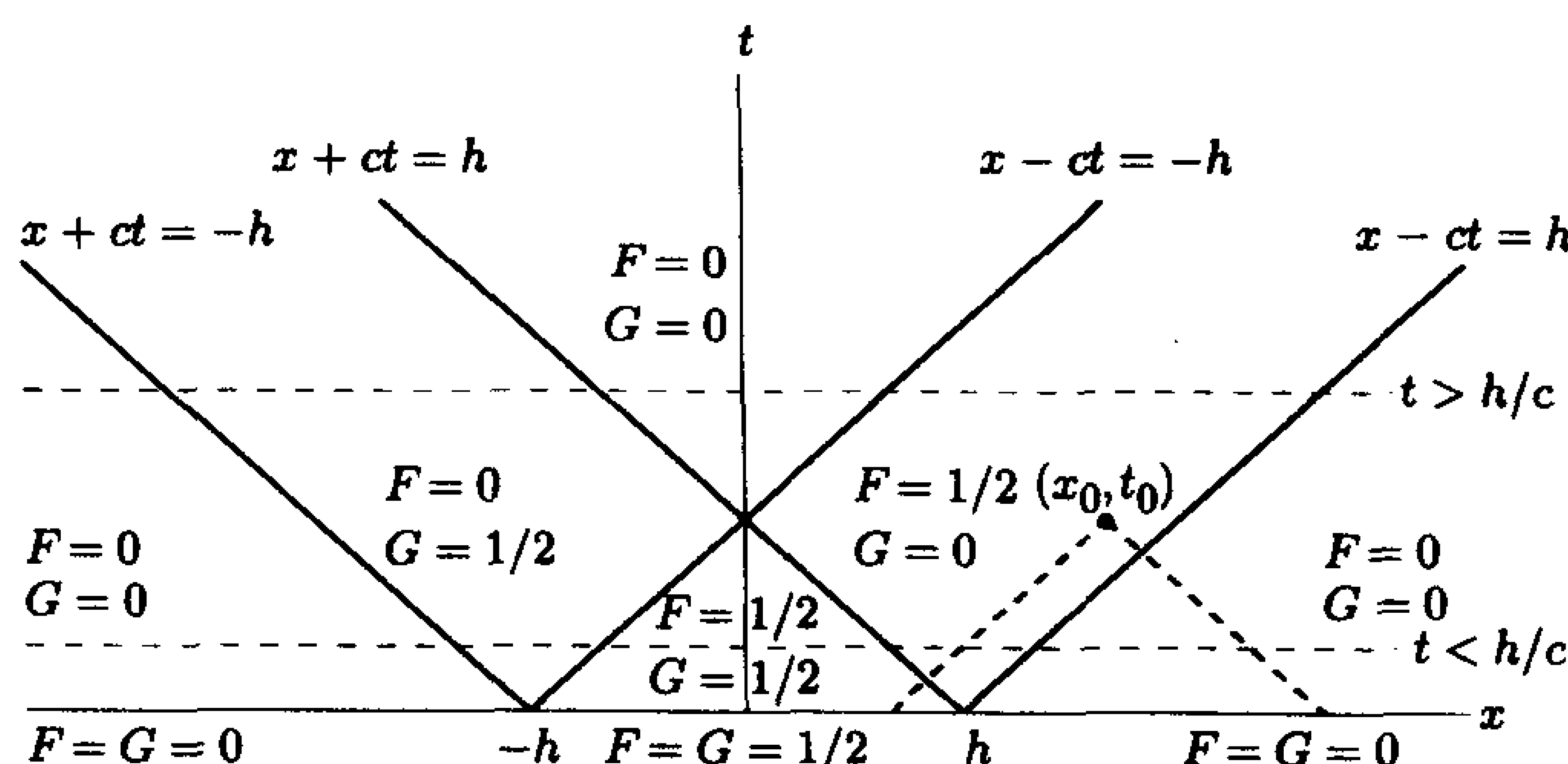


图 12.3.3 一维波动方程的特征线法

非静态举例. 假设无限弦初始时刻以设定的如下初始速度水平拉伸:

$$u(x,0)=f(x)=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x)=\begin{cases}1 & |x|<h\\ 0 & |x|>h.\end{cases}$$

习题 12.3.2 说明这对应着对整个 $|x|<h$ 的区域瞬间施加均匀冲力，就像一把宽($|x|<h$)锤子撞击在这根弦上. 求解带这种初始条件的波动方程要比前一个例子更难些. 由(12.3.10)和(12.3.11)，需要 $\int_0^x g(\bar{x})\,\mathrm{d}\bar{x}$，表示在 $g(x)$ 下由 0 到 x 的面积:

$$2cG(x)=-2cF(x)=\int_0^x g(\bar{x})\,\mathrm{d}\bar{x}=\begin{cases}-h & x<-h\\ x & -h<x<h\\ h & x>h.\end{cases}$$

解 $u(x,t)$ 是(以速度 c)向右位移的 $F(x)$ 和(以速度 c)向左位移的 $G(x)$ 的和. $F(x)$，548 $G(x)$ 以及它们的平移和如图 12.3.4 所示. 宽锤撞击引起弦的位移在锤撞击位置附近逐渐增加，而后随着时间的增加，这个扰动向左和向右展开. 最终这根弦到达升高的静止位置. 另外，这个解可以由代数方法得到[参看习题 12.3.5]. 图 12.3.3 中的特征线是有帮助的.

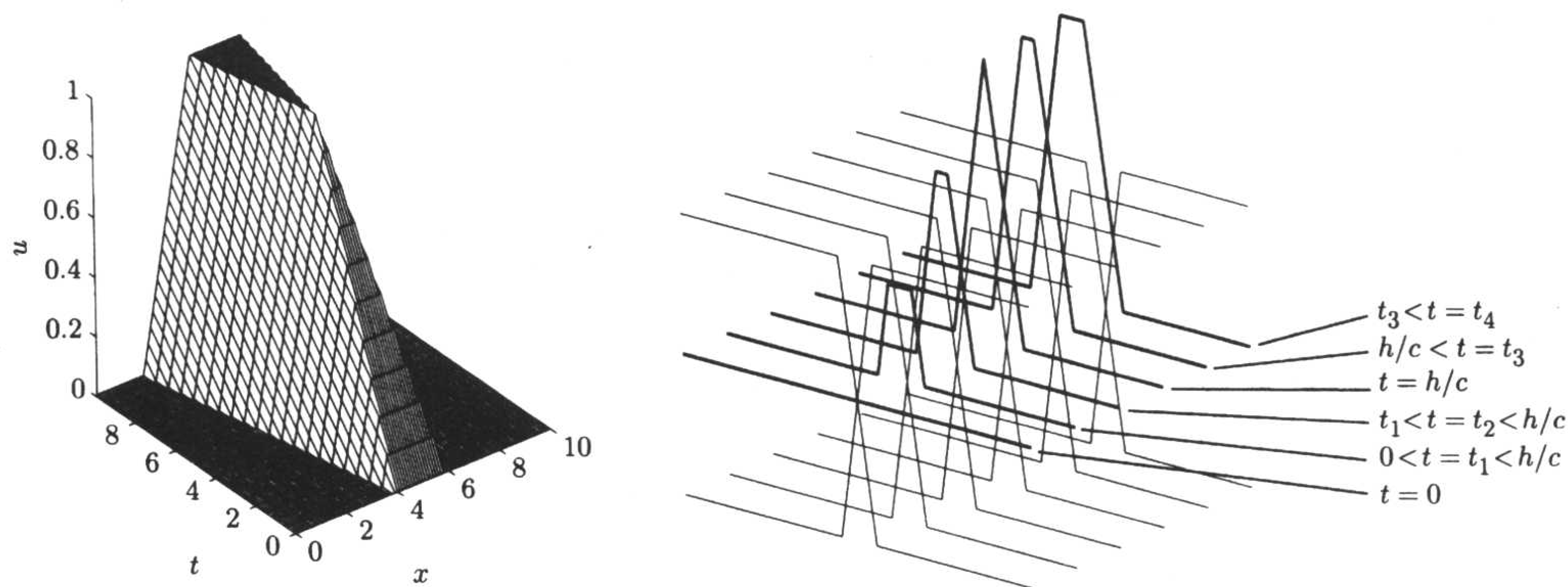


图 12.3.4 撞击弦随时间演化

12.3.3 达朗贝尔解

对一维波动方程的通解可以作些化简. 将(12.3.10)和(12.3.11)代入通解(12.3.5)可得

$$u(x,t)=\frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\left[\int_0^{x+ct}g(\bar{x})\,\mathrm{d}\,\bar{x}-\int_0^{x-ct}g(\bar{x})\,\mathrm{d}\,\bar{x}\right]$$

或

$$\boxed{u(x,t)=\frac{f(x-ct)+f(x+ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(\bar{x})\,\mathrm{d}\,\bar{x},}\qquad(12.3.13)$$

称为达朗贝尔公式(在第11章中由格林公式和一维波动方程的无穷空间格林函数得到). 这是一个十分简洁的结果. 不过在作图时, 直接用由(12.3.5)位移的(12.3.10)和(12.3.11)更为简单.

依赖区域和影响区域. 特征线 $x-ct=$常数和 $x+ct=$常数的重要性是很清楚的. 时刻 t 在位置 x 处, 需要 $x\pm ct$ 处的初始位置数据, 以及在 $x-ct$ 与 $x+ct$ 之间的所有初始速度数据. $x-ct$ 与 $x+ct$ 之间的区域称为解在点(x, t)的依赖区域, 如图 12.3.5 所示. 另外, 图中也画出了影响区域: 一个点的初始数据所影响的范围.

549

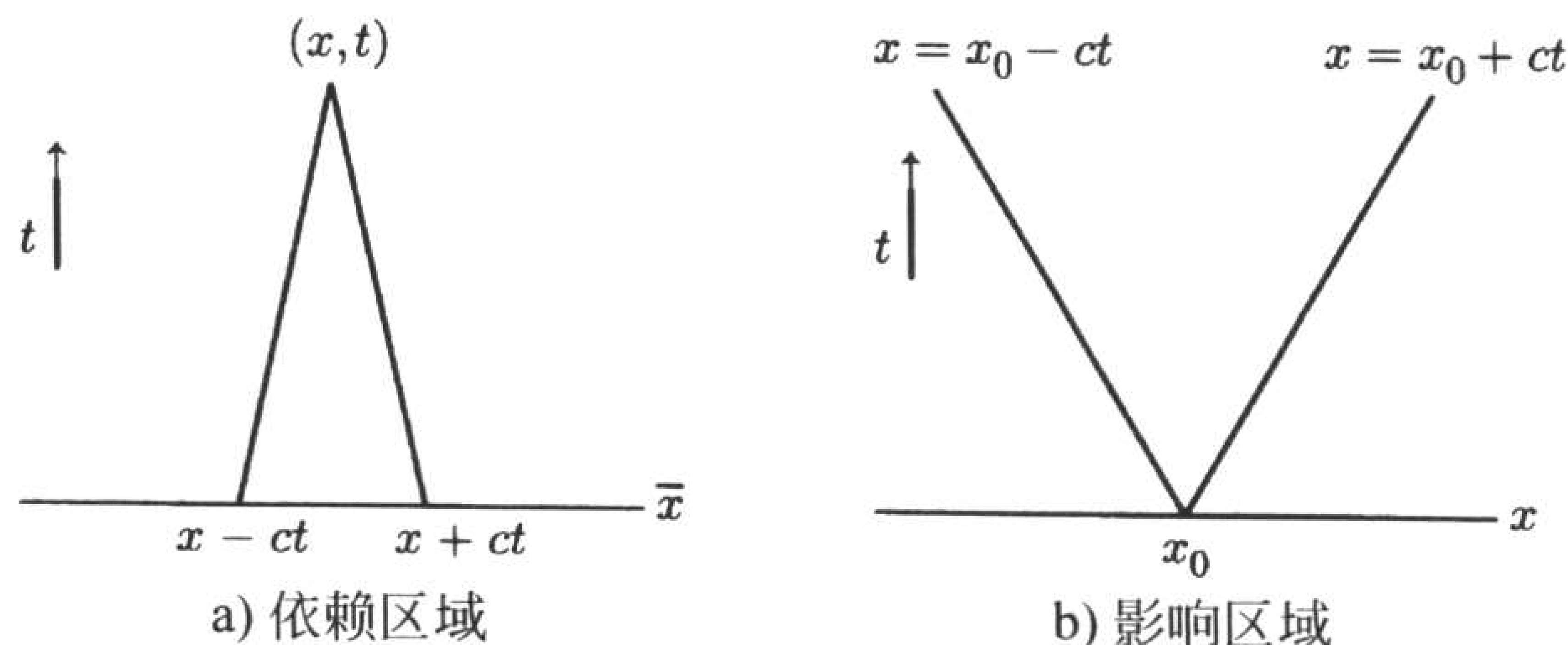


图 12.3.5

类空和类时边界. 两个初始条件(12.3.6)和(12.3.7)是沿 $t=0$, 即 x 轴给定的, 称为类空边界. 在下一节, 将给出在固定边界上的边界条件, 例如 $x=0$, 沿着它时间是变化的, 因而称$x=0$是类时边界. 对于亚音速移动边界, 其移动速度小于特征速度 c, $|\mathrm{d}x/\mathrm{d}t|<c$, 那么在这个移动边界上给定一个条件, 并且这个边界称为类时的. 对超音速移动边界, 移动速度大

于特征速度 c，$|dx/dt| > c$，要给定两个条件(有时候信息传播到了该区域之外)，称这个边界为类空的．边界不必要以固定的速度移动．

习题 12.3

12.3.1 设 $u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$，其中 F 和 G 如图 12.3.6 所示．请画出不同时刻解的图像．

12.3.2 设一根拉直的弦未受扰动(水平的，$u = 0$)并且处于静止($\partial u/\partial t = 0$)．如果在 $t = 0$ 时对其施加一个冲力，这个初值问题是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha(x)\delta(t)$$

550

$$u(x,t) = 0 \quad t < 0.$$

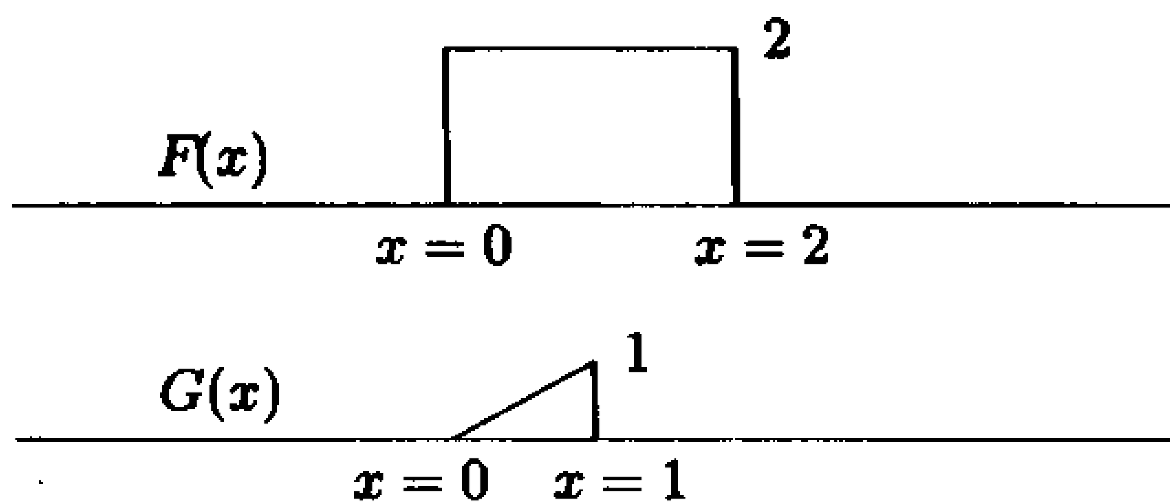


图 12.3.6

(a)不用求出解，证明它等价于

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad t > 0,$$

满足初始条件 $u(x, 0) = 0$ 和 $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \alpha(x)$.

因此，初始速度 $\alpha(x)$ 等价于冲力．

(b)用两个问题的显式解完成(a)的证明．

12.3.3 求解一维波动方程(12.3.1)的另一个方法是基于(12.3.2)和(12.3.3)．通过引入变量替换，将坐标系(x, t)变到移动坐标系(ξ, η)一个以速度 $-c$ 向左移动，一个以速度 c 向右移动：

$$\xi = x - ct \quad 和 \quad \eta = x + ct.$$

12.3.4 设 $u(x, t) = F(x - ct)$，计算

(a) $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$ (b) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t)$

12.3.5 设

$$u(x,0) = f(x) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) = \begin{cases} 1 & |x| < h \\ 0 & |x| > h. \end{cases}$$

试求 $u(x, t)$ 的解析表达式．(提示：利用如图 12.3.3 中的特征线，证明存在两个不同的区域 $t < h/c$ 和 $t > h/c$．在每个区域上，证明根据 x 值的不同，u 有五种不同表达式．)

12.3.6 考虑三维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u.$$

假定解是球对称的，使得

$$\nabla^2 u = (1/\rho^2)(\partial/\partial\rho)(\rho^2 \partial u/\partial\rho).$$

(a)作变换 $u = (1/\rho)w(\rho, t)$，验证

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}.$$

(b)证明波动方程球对称最一般的解包含两个球对称波，其中一个以速度 c 向外传播，一个以速度 c 向内传播．注意振幅的衰减．

551

12.4 半无界弦和反射

下面在半无穷区间 $x > 0$ 上求解一维波动方程：

$$\text{PDE:} \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \tag{12.4.1}$$

$$\text{IC1}: \boxed{u(x,0) = f(x)} \tag{12.4.2}$$

$$\text{IC2}: \boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x).} \tag{12.4.3}$$

在边界 $x=0$ 需要一个条件. 设弦在 $x=0$ 是固定的:

$$\text{BC}: \boxed{u(0,t) = 0.} \tag{12.4.4}$$

虽然可以使用傅里叶正弦变换法，但这里要说明如何用通解公式和特征线法:

$$\boxed{u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct).} \tag{12.4.5}$$

与 12.3 节类似，要满足初始条件，只要

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(\bar{x})\mathrm{d}\bar{x} \quad x > 0 \tag{12.4.6}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(\bar{x})\mathrm{d}\bar{x} \quad x > 0. \tag{12.4.7}$$

然而非常重要的是注意到(和无界弦的情形不同)，(12.4.6)和(12.4.7)只对 $x>0$ 才成立；对于正的自变量，这两个任意函数由初始条件仅对正变量值是确定的. 在通解中，只用到 G 的正自变量值(因为 $x>0$, $t>0$). 另一方面，当 $x>ct$ 时 $F(x-ct)$ 用到正自变量值，但 $x<ct$ 时要用到负自变量值. 如图 12.4.1 中的时空二维图像标明的，在固定端点 $x=0$ 的信息以有限速度 c 传播. 因此，当 $x>ct$ 时，边界对弦没有影响. 此时($x>ct$)，解仍然按以前的方式[用(12.4.6)和(12.4.7)]得到，

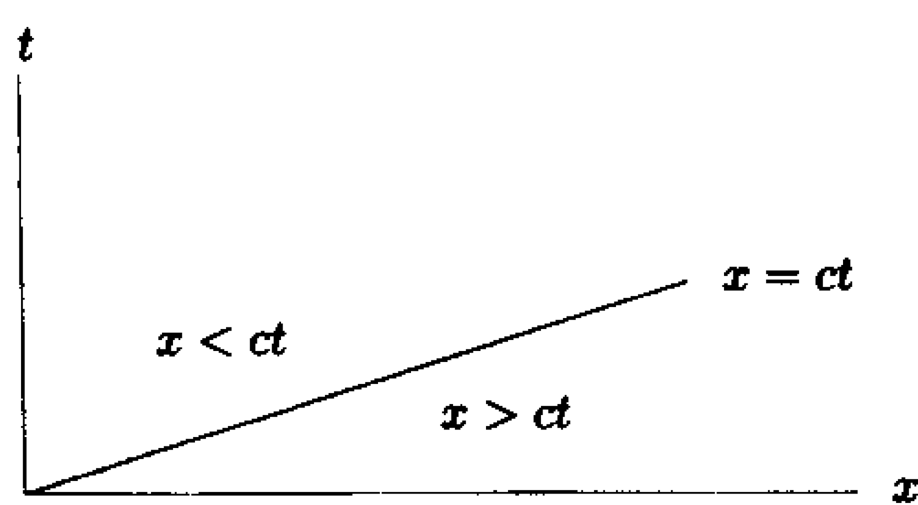


图 12.4.1 由边界发出的特征线

$$u(x,t) = \frac{f(x-ct)+f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\bar{x})\mathrm{d}\bar{x}, \quad x > ct, \tag{12.4.8}$$ 552

即达朗贝尔公式. 然而，$x<ct$ 时，达朗贝尔公式是不成立的，当 $x+ct>0$ 时，前面已经确定了

$$G(x+ct) = \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(\bar{x})\mathrm{d}\bar{x},$$

要得到自变量取负值时的 F，不能用初始条件. 必须用边界条件. $u(0, t)=0$ 给出[由(12.4.5)]

$$0 = F(-ct) + G(ct), \quad 对\ t > 0. \tag{12.4.9}$$

从而，F 对负的自变量值是 $-G$ 相应正自变量的值:

$$F(z) = -G(-z), \quad 对\ z < 0. \tag{12.4.10}$$

因此，$x-ct<0$ 时的解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= F(x-ct) + G(x+ct) = G(x+ct) - G(ct-x) \\ &= \frac{1}{2}[f(x+ct) - f(ct-x)] + \frac{1}{2c}\left[\int_0^{x+ct} g(\bar{x})\mathrm{d}\bar{x} - \int_0^{ct-x} g(\bar{x})\mathrm{d}\bar{x}\right] \\ &= \frac{1}{2}[f(x+ct) - f(ct-x)] + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} g(\bar{x})\mathrm{d}\bar{x}. \end{aligned}$$

特征线法对诠释这个解是有帮助的. 对于无穷问题，$u(x, t)$是 F(向右移动)与 G(向左移

动)的和. 对半无穷问题，$x>ct$ 时，边界不影响特征线(见图12.4.2). 当 $x<ct$ 时，图12.4.3表明边界不影响左移动的特征线(G 为常数)，但是右移动特征线是从边界发出的. 向右移动的 F 是常数. 由边界条件，在 $x=0$，$F+G=0$，右移波是负的左移波. 波的反转就像由边界"弹回". 所产生的右移波 $-G(ct-x)$ 叫做反射波. 当 $x<ct$ 时，解就是反射波加上未反射的左移波：

553

$$u(x,t) = G(x+ct) - G(-(x-ct)).$$

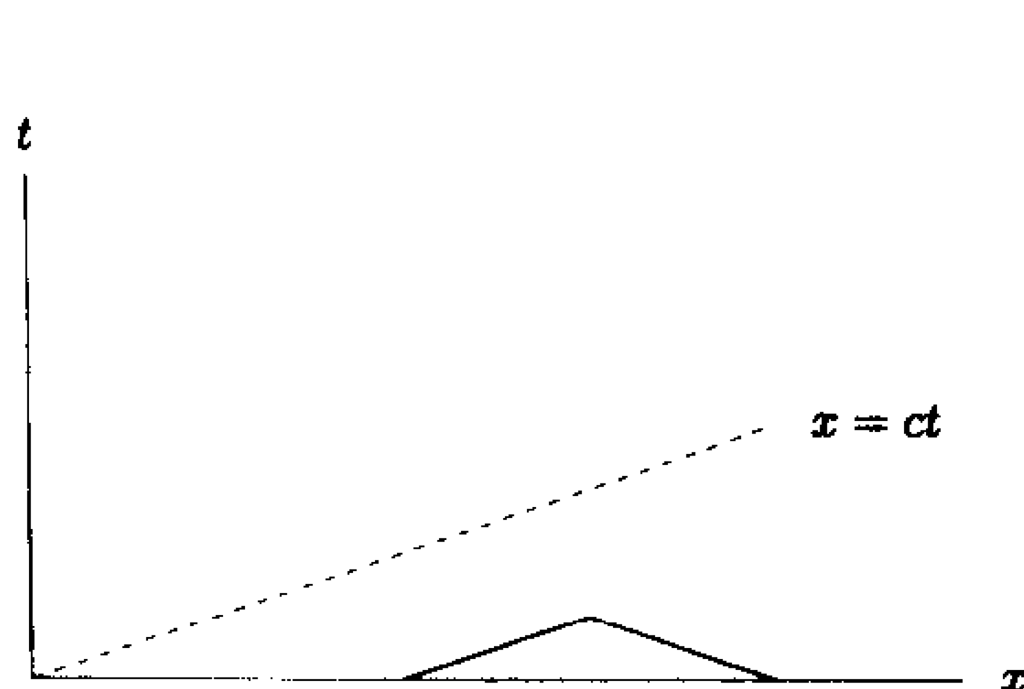


图 12.4.2 特征线

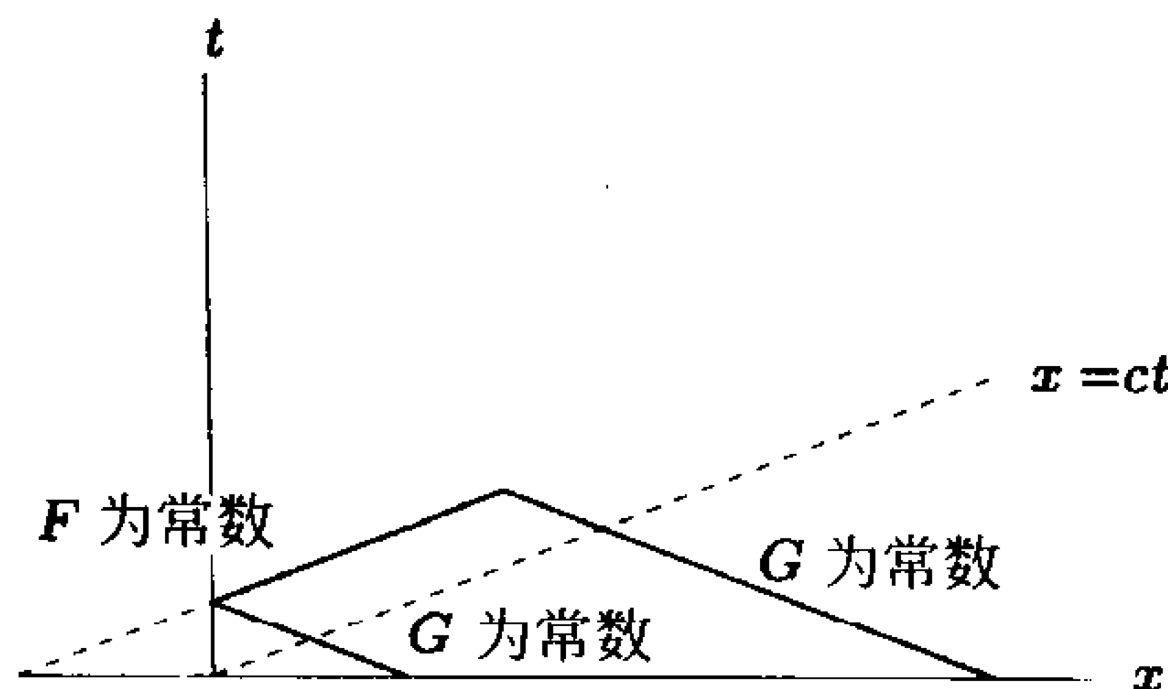


图 12.4.3 反射的特征线

这个负的反射波 $-G(-(x-ct))$ 是向右移动的. 就像是在 $t=0$ 时，它的初值是 $-G(-x)$. 如果没有边界，右移波 $F(x-ct)$ 的初始是 $F(x)$. 因此，要出现这个反射波，只要：

$$F(x) = -G(-x), \quad x < 0,$$

或者等价地，

$$\frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(\bar{x})\,\mathrm{d}\,\bar{x} = -\frac{1}{2}f(-x) - \frac{1}{2c}\int_0^{-x} g(\bar{x})\,\mathrm{d}\,\bar{x}.$$

得到它的一个方法是对 $x>0$ 时的初始位置函数 $f(x)$ 作奇函数延拓[即 $f(-x)=-f(x)$]，对 $x>0$ 时的初始速度 $g(x)$ 也作奇函数延拓[其积分 $\int_0^x g(\bar{x})\,\mathrm{d}\,\bar{x}$ 是偶函数]. 总之，*满足边界条件 $u(0,t)=0$ 的半无穷问题的解与初始位置和初始速度为奇函数的无穷问题的解相同.*

进一步的解释是，设 $u(x,t)$ 是波动方程的解. 因为以 $-x$ 代换 x，波动方程不变，所以 $u(-x,t)$[或者它的倍数]也是波动方程的解. 如果 $u(x,t)$ 满足的初始条件是 x 的奇函数，那么 $u(x,t)$ 和 $-u(-x,t)$ 都满足初始条件和波动方程. 因为初值问题有唯一解，$u(x,t)=-u(-x,t)$；即初始为奇函数的解 $u(x,t)$ 一直保持是 x 的奇函数. 这样，奇初始条件的解在 $x=0$ 上满足零边界条件.

554

例. 考虑半无界弦 $x>0$，端点固定 $u(0,t)=0$，静止 $\partial u/\partial t(x,0)=0$，初始位置是单位矩形脉冲：

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 4 < x < 5 \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

由 $g(x)=0$，

$$F(x) = G(x) = \frac{1}{2}f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 4 < x < 5 \\ 0 & \text{其他}(x > 0). \end{cases}$$

F 向右移动；G 向左移动，以 $x=0$ 作负反射. 也可以解释为(无限区域的)初始条件，其中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 延拓为奇函数. 它的解如图12.4.4所示. 注意负反射.

非齐次边界条件问题在 $x=0$ 也可以作类似地分析.

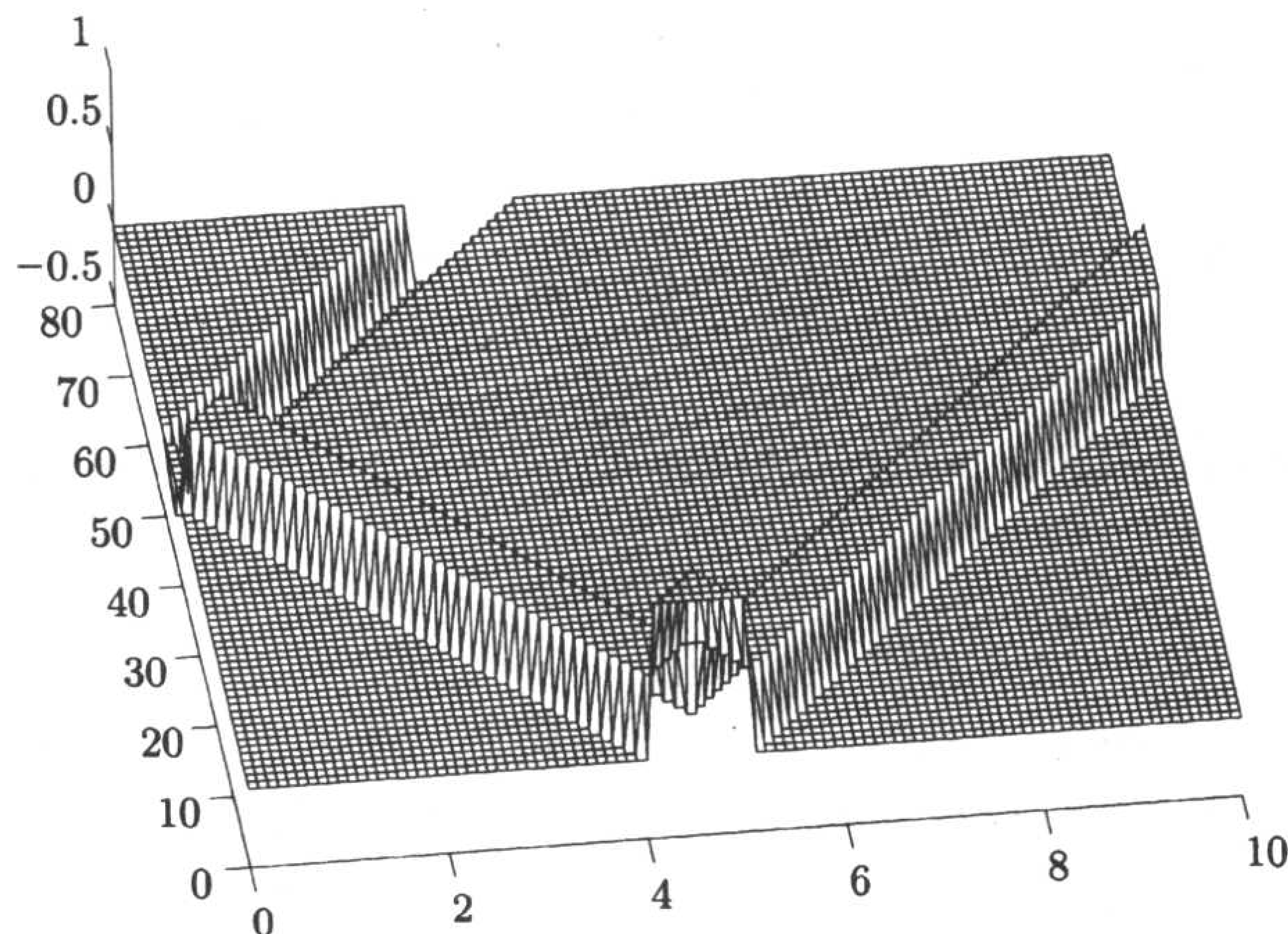


图 12.4.4 反射脉冲

习题 12.4

*12.4.1 用特征线法求解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad x > 0,$$

其中 $u(x, 0) = 0$，$\partial u/\partial t(x, 0) = 0$，$u(0, t) = h(t)$.

555

12.4.2 求解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad x < 0$$

$$u(x,0) = \cos x \qquad x < 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad x < 0$$

$$u(0,t) = e^{-t} \qquad t > 0.$$

不用画出解的图像，而要求画出包含所有重要特征线的时空图.

12.4.3 考虑半无界区间上的波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < \infty,$$

满足自由边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$$

和初始条件

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & 0 < x < 2 \\ 1 & 2 < x < 3 \\ 0 & x > 3. \end{cases} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

确定它的解. 并画出各时刻解的图像.（设 u 在 $x=0$，$t=0$ 处连续.）

12.4.4 (a)对 $x>0$，$t>0$，(用特征线法)求解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= g(x) \end{aligned}\right\} \quad x > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \qquad t > 0.$$

(假定 u 在 $x=0$, $t=0$ 处连续.)

(b)证明(a)的解可以由对初始位置和初始速度作(关于 $x=0$ 的)偶延拓得到.

(c)画出解的图像，其中 $g(x)=0$,

556

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 4 < x < 5 \\ 0 & 其他. \end{cases}$$

12.4.5 (a)证明如果 $u(x, t)$ 和 $\partial u/\partial t$ 初始关于 $x=x_0$ 都是偶的，则 $u(x, t)$ 一直保持是偶的.

(b)证明这种类型的偶初始条件可给出在 $x=x_0$ 满足零导数边界条件的解.

*12.4.6 求解($x>0$, $t>0$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

其中 $u(x, 0)=0$, $\partial u/\partial t(x, 0)=0$, $\partial u/\partial x(0, t)=h(t)$.

*12.4.7 求解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \begin{aligned} x &> 0 \\ t &> 0 \end{aligned}$$

其中 $u(x, 0)=f(x)$, $\partial u/\partial t(x, 0)=0$, $\partial u/\partial x(0, t)=h(t)$. (假定 u 在 $x=0$, $t=0$ 处连续.)

12.4.8 求解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

其中

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,$$

并且沿 $x=\frac{c}{2}t(c>0)$, $u(x, t)=g(t)$.

12.5 定长振动弦的特征线法

在第2章中用傅里叶级数方法求解了有界弦的振动问题

$$\text{PDE:} \quad \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \tag{12.5.1}$$

$$\text{BC:} \quad \boxed{\begin{aligned} u(0,t) &= 0 \\ u(L,t) &= 0 \end{aligned}} \tag{12.5.2}$$

$$\text{IC:} \quad \boxed{\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= g(x), \end{aligned}} \tag{12.5.3}$$

而用一维波动方程的通解可以得到等价的、有时更有用的结果:

557

$$u(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct). \tag{12.5.4}$$

初始条件仅在 $0<x<L$ 上给定，因此公式中的 $F(x)$ 和 $G(x)$ 仅对 $0<x<L$ 才有效:

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(\bar{x})\,\mathrm{d}\,\bar{x} \tag{12.5.5}$$

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(\bar{x})\,\mathrm{d}\,\bar{x}. \tag{12.5.6}$$

如图 12.5.1 所示，如果 $0 < x - ct < L$ 和 $0 < x + ct < L$，则达朗贝尔公式成立：

$$u(x,t) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\bar{x})\,\mathrm{d}\,\bar{x}. \tag{12.5.7}$$

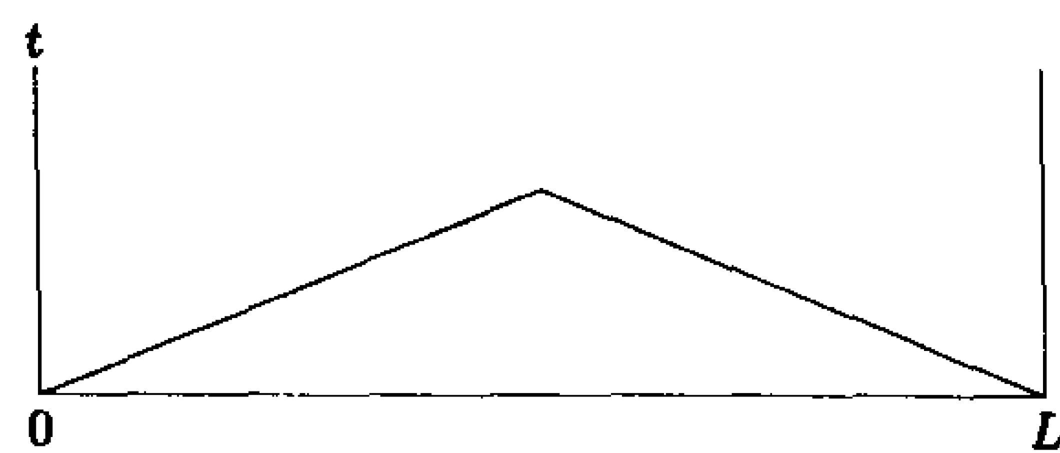


图 12.5.1　特征线

在这个区域内边界条件对弦没有影响；边界上的信息从 $x = 0$ 和 $x = L$ 以速度 c 传播.

如果振动的位置和时间有到达的边界信号，那么在(12.5.7)中必须作修正. 在 $x = 0$ 的边界条件给出

$$0 = F(-ct) + G(ct), \quad 对\ t > 0, \tag{12.5.8}$$

而在 $x = L$ 有

$$0 = F(L - ct) + G(L + ct), \quad 对\ t > 0. \tag{12.5.9}$$

如图 12.5.2 所示，这些依次给出反射和多重反射.

另一种选择是，考虑无穷域上没有边界的解，这个解关于 $x = 0$ 和 $x = L$ 都是奇对称的，如图 12.5.3 所示. 这样，就满足了在 $x = 0$ 和 $x = L$ 的零条件. 注意 $u(x, t)$ 是周期为 $2L$ 的周期函数. 事实上，可以忽略关于 $x = L$ 奇对称性，因为在关于 $x = 0$ 有奇对称性的周期函数自动具有关于$x = L$ 奇对称性. 因此，最简单的求解方法是将初始条件延拓为奇函数(关于 $x = 0$)作周期为 $2L$ 的周期延拓. 对于这些周期奇对称初始条件，可利用特征线法和达朗贝尔公式(12.5.7).

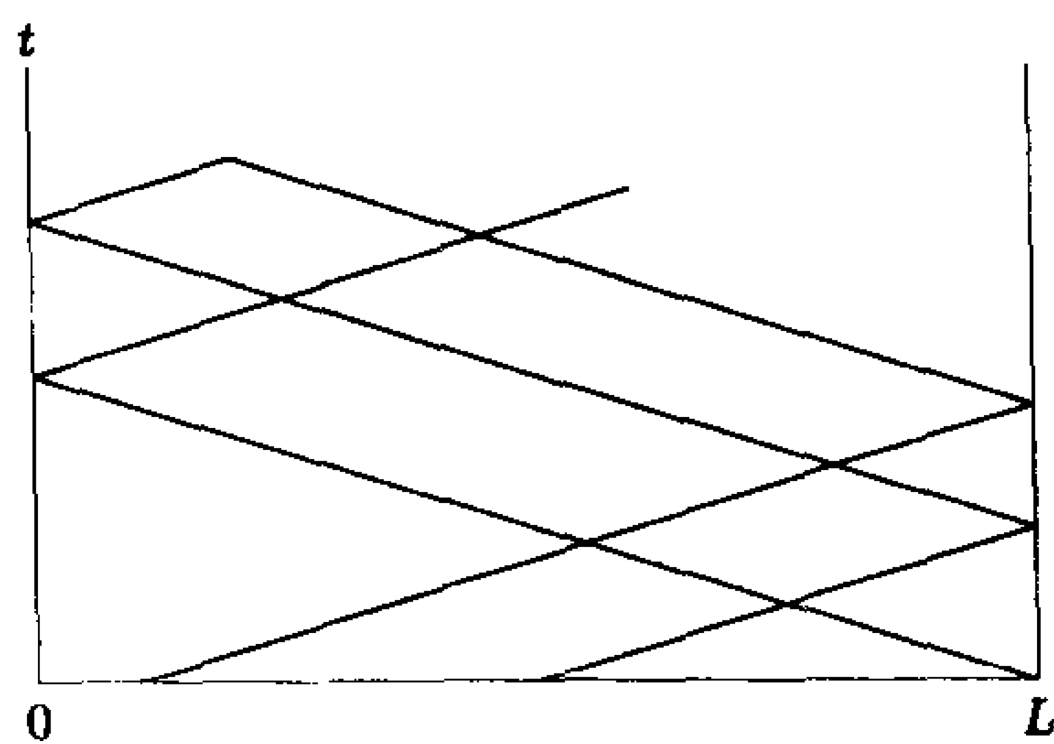


图 12.5.2　多重反射特征线

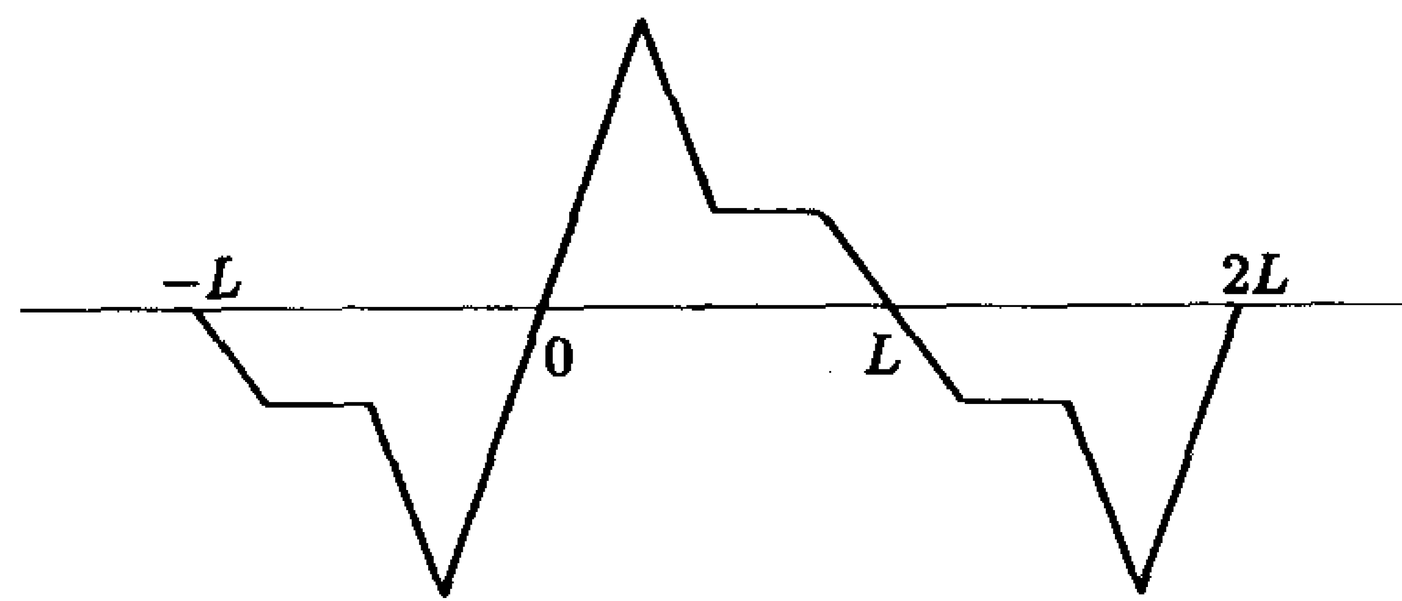


图 12.5.3　奇周期延拓

例. 假设弦是初始静止的，给定初始条件 $u(x, 0) = f(x)$. 弦在 $x = 0$ 和 $x = L$ 处固定. 不使用傅里叶级数方法，而是把初始条件延拓为关于 $x = 0$ 和 $x = L$ 的奇函数. 最后作奇周期延拓.（在傅里叶级数解法中也用到了奇周期延拓.）因为弦是初始静止的，$g(x) = 0$；其奇周期延拓是$g(x) = 0$. 因此，一维波动方程的解是两个简单波的和： 558

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f_{\text{ext}}(x - ct) + f_{\text{ext}}(x + ct)],$$

其中 $f_{\text{ext}}(x)$ 是给定初始位置的奇周期延拓. 这个解比傅里叶正弦级数前 100 项的和要简单得多.

分离变量. 通过分离变量，有固定边界条件($u(0, t) = 0$，$u(L, t) = 0$)并满足初始条件 $u(x, 0) = f(x)$ 和 $\partial u/\partial t = 0$ 的波动方程的解是

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi ct}{L},$$

[559] 其中初始条件仅在[0, L]上给定. 准确地说，无穷傅里叶级数$f_{\text{ext}}(x)$等于$f(x)$的(周期$2L$)奇周期延拓：$f_{\text{ext}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{L}$. 由 $\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi ct}{L} = \frac{1}{2}\sin\frac{n\pi(x+ct)}{L} + \frac{1}{2}\sin\frac{n\pi(x-ct)}{L}$，得到

$$u(x,t) = \frac{1}{2}f_{\text{ext}}(x-ct) + \frac{1}{2}f_{\text{ext}}(x+ct),$$

这正是由特征线法所得到的同样结果.

习题 12.5

12.5.1 考虑

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= g(x) \end{aligned}\right\} \quad 0 < x < L$$

$$u(0,t) = 0$$

$$u(L,t) = 0.$$

(a)用傅里叶级数方法求解.

*(b)若$g(x)=0$，证明(a)的结果与第 12 章的结果等价.

(c)若$f(x)=0$，证明(a)的结果与第 12 章的结果等价.

12.5.2 用特征线法求解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = 0 \quad u(0,t) = h(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad u(L,t) = 0.$$

12.5.3 考虑

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < 10$$

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1 & 4 < x < 5 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad u(0,t) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0.$$

(a)用特征线法画解的图像. (b)用傅里叶级数方法求解. (c)转化成无穷区域上的等价问题求解.

[560] 12.5.4 如果$\partial u/\partial x(0,t)=0$，$u(L,t)=0$，如何对初始条件作延拓？

12.6 拟线性偏微分方程的特征线法

12.6.1 特征线法

本书的多数章节介绍了求解线性偏微分方程的方法(分离变量、特征函数展开、傅里叶和拉普拉斯变换、格林函数等)，但它们不能推广到求解非线性问题. 然而用于求解波动方程的

特征线法可以用来求解如下形式的偏微分方程：

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+c\frac{\partial\rho}{\partial x}=Q,}\tag{12.6.1}$$

其中 c 和 Q 可以是 x，t 和 ρ 的函数．当 Q 不是 ρ 的线性函数，或者更重要的是，当系数 c 是未知解 ρ 的函数时，方程(12.6.1)是非线性的．叠加不再成立．但是由于该方程关于一阶导数 $\partial\rho/\partial x$ 和 $\partial\rho/\partial t$ 是线性的，方程(12.6.1)称为*拟线性偏微分方程*．为了求解方程(12.6.1)，仍然要考虑在某个给定路径 $x(t)$ 上的移动观察者．比较(12.2.7)和(12.6.1)，得到

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt}=Q(\rho,x,t),}\tag{12.6.2}$$

如果

$$\boxed{\frac{dx}{dt}=c(\rho,x,t),}\tag{12.6.3}$$

偏微分方程(12.6.1)化简为沿着由(12.6.3)定义的特殊轨线或方向的两个耦合的常微分方程，这些轨线称为*特征曲线*，简短地叫做*特征线*．由(12.6.3)式定义的速度称为*特征速度*，或者*局部波速*．如图 12.6.1 所示，以 $x=x_0$ 为起点的特征线是用初始条件 $\rho(x,0)=f(x)$ 由耦合微分方程(12.6.2)和(12.6.3)所确定的．沿着这条特征线，解 ρ 根据方程(12.6.2)而变化．其他的初始位置给出其他特征线，这样就生成特征线族.

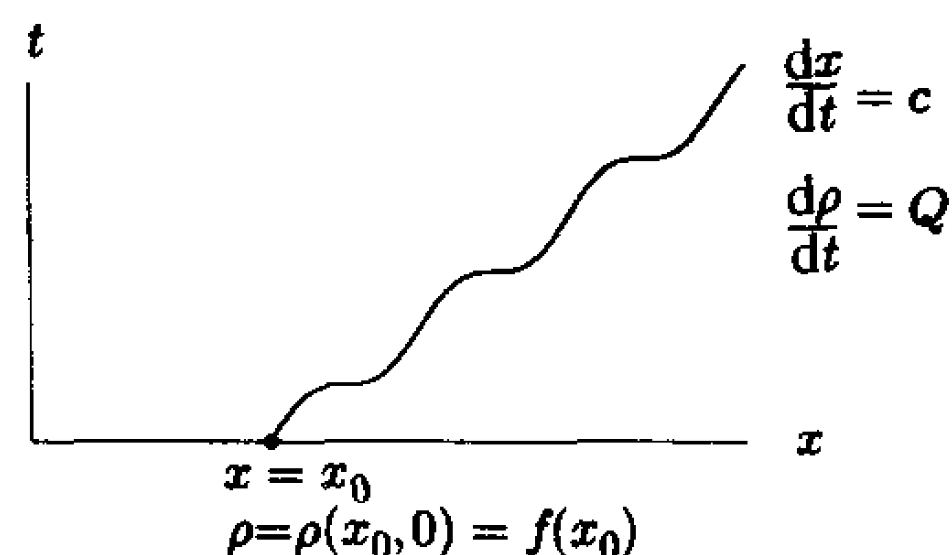


图 12.6.1　$t=0$ 时刻始于 $x=x_0$ 的特征线

例．如果局部波速 c 是常数 c_0 而 $Q=0$，那么拟线性方程(12.6.1)就变成了在分析波动方程过程中出现的线性方程(12.2.6)．在本例中，特征线不必用(12.6.2)，而直接对(12.6.3)积分得到．每条特征线都有相同的恒定速度 c_0．如图 12.6.1 所示，特征线族是平行直线.

561

二维空间的拟线性方程．如果自变量是 x 和 y，而不是 x 和 t，那么一阶拟线性偏微分方程一般写为如下形式：

$$a\frac{\partial\rho}{\partial x}+b\frac{\partial\rho}{\partial y}=c,\tag{12.6.4}$$

其中 a，b，c 可以是 x，y 和 ρ 的函数．特征线法是

$$\frac{d\rho}{dx}=\frac{c}{a},\tag{12.6.5}$$

如果

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}.\tag{12.6.6}$$

这可写成下面(便于记忆的)等价形式：

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{d\rho}{c}.\tag{12.6.7}$$

12.6.2　交通流量

交通密度和流量．可以近似地用拟线性偏微分方程建立单向拥堵高速公路模型．这里引入

交通密度$\rho(x, t)$，时刻t在x位置每英里车辆的数目. 一个容易观察和测量的量是交通流量$q(x, t)$，在时刻t，每小时通过固定位置x的车辆数目.

车辆守恒. 考虑道路上的任意一段，在$x=a$和$x=b$之间. 如果这段路上既没有入口也没有出口，在$x=a$和$x=b$之间的车辆数目$\left[N=\int_a^b \rho(x,t)\,\mathrm{d}x\right.$，密度的定积分$\left.\right]$可能仍然会随时间变化. 车辆数目的变化率$\mathrm{d}N/\mathrm{d}t$等于单位时间进入$x=a$的车辆数目[此处的交通流量为

562

$q(a, t)$]减去单位时间离开$x=b$的车辆数目[此处的交通流量为$q(b, t)$]:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b \rho(x,t)\,\mathrm{d}x = q(a,t) - q(b,t).} \tag{12.6.8}$$

方程(12.6.8)称为车辆守恒的积分形式. 与热流量一样，可以用几种等价方法从方程(12.6.8)导出偏微分方程. 一种方法是将边界的基值表示为这个区间上的积分:

$$q(a,t) - q(b,t) = -\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}q(x,t)\,\mathrm{d}x. \tag{12.6.9}$$

这样，在积分号下求时间导数(将其写成偏导数)，然后利用(12.6.9)，由a，b为任意点(参看1.2节)，得到

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0,} \tag{12.6.10}$$

(12.6.10)式称为车辆守恒.

车速. 每小时通过某一位置的车辆数等于交通密度乘以车速. 设车速为$u(x, t)$，有

$$\boxed{q = \rho u.} \tag{12.6.11}$$

在20世纪50年代中期，Lighthill、Whitham以及Richards独立地进行了简化假设，即设车速仅依赖于密度，$u=u(\rho)$，交通密度增加时车速下降(即$\mathrm{d}u/\mathrm{d}\rho \leqslant 0$). 至于进一步的讨论，有兴趣的读者可以参考Whitham[1999]和Haberman[1998]. 在这一假设下，交通流量仅是交通密度的函数，$q=q(\rho)$. 此时，车辆守恒(12.6.10)变为

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,} \tag{12.6.12}$$

其中$c(\rho)=q'(\rho)$，这是有$Q=0$的拟线性偏微分方程[见(12.6.1)]. 此处$c(\rho)$是未知解ρ的

563

已知函数. 在含有密度ρ且流量q是密度函数的物理问题中，ρ满足式(12.6.12).

基本交通模型. 一般地，车速u应当是ρ的减函数. 在零密度处，车开得最快，记为$u_{\max}$. 在某个最大密度$\rho_{\max}$处，车速为零. 满足这些性质的最简单关系是$u(\rho)=u_{\max}(1-(\rho/\rho_{\max}))$，此时由(12.6.11)得到流量$q(\rho)=u_{\max}\rho(1-(\rho/\rho_{\max}))=u_{\max}(\rho-(\rho^2/\rho_{\max}))$，密度波速度满足$c(\rho)=q'(\rho)=u_{\max}(1-(2\rho/\rho_{\max}))$.

12.6.3 特征线法($Q=0$)

方程(12.6.12)的特征线方程是

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{12.6.13}$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = c(\rho). \tag{12.6.14}$$

特征速度 c 不是常数而依赖密度 ρ. 称为*密度波速度*. 从(12.6.13)可知，密度 ρ 沿着尚未确定的特征线是常数. 由于 ρ 为常数，每条特征线的速度 $c(\rho)$ 也是常数. 这样每条特征线都是一条直线(域 $c(\rho)$ 是常数 c_0 的情形一样). 但是，不同特征线以不同的匀速移动，因为，它们可能从不同的密度开始. 尽管都是直线，特征线未必相互平行. 考虑以 $x=x_0$ 为始点的特征线，如图 12.6.2 所示. 沿着曲线 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = c(\rho)$，$\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}t = 0$ 或 ρ 为常数，在初始时刻 ρ 等于其在 $x=x_0$ 的值. 这样，沿着特征线

$$\rho(x,t) = \rho(x_0,0) = f(x_0), \tag{12.6.15}$$

这是个已知常数. 确定特征线的局部波速 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = c(f(x_0))$ 是个常数. 因此，这条特征线是直线

$$x = c(f(x_0))t + x_0, \tag{12.6.16}$$

因为在 $t=0$ 时，$x=x_0$. 也许如图 12.6.2 所示，不同的 x_0 确定了不同的直线特征线. 沿着每条特征线交通密度 ρ 是个常数，参看(12.6.15). 为了确定稍后时刻的密度，通过时空点具有参数 x_0 的特征线必须由(12.6.16)获得. 564

图解法. 在实际中，由(12.6.16)确定 x_0 为 x 和 t 的显式函数常常是困难的而且也没有多大趣味. 但是可以用图解法来确定 $\rho(x, t)$. 假设初始密度如图 12.6.3 所示. 已知每个密度 ρ_0 保持不变地按自己的均匀密度波速 $c(\rho_0)$ 运动. 在时刻 t，密度 ρ_0 移动了距离 $c(\rho_0)t$，如图 12.6.3 中的箭头所示. 这个过程必须在大量的点上实施(在计算机上这是很基本的). 因此就能得到 t 时刻的密度.

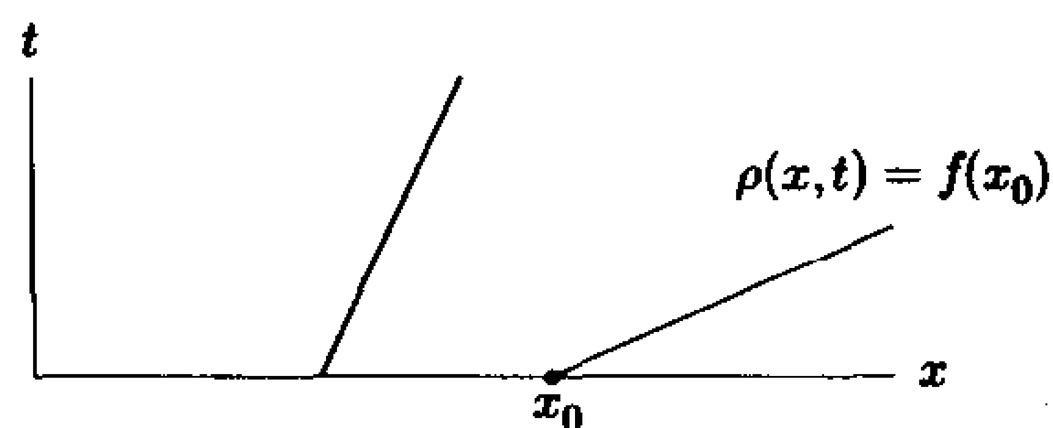


图 12.6.2 可能不平行的直线特征线

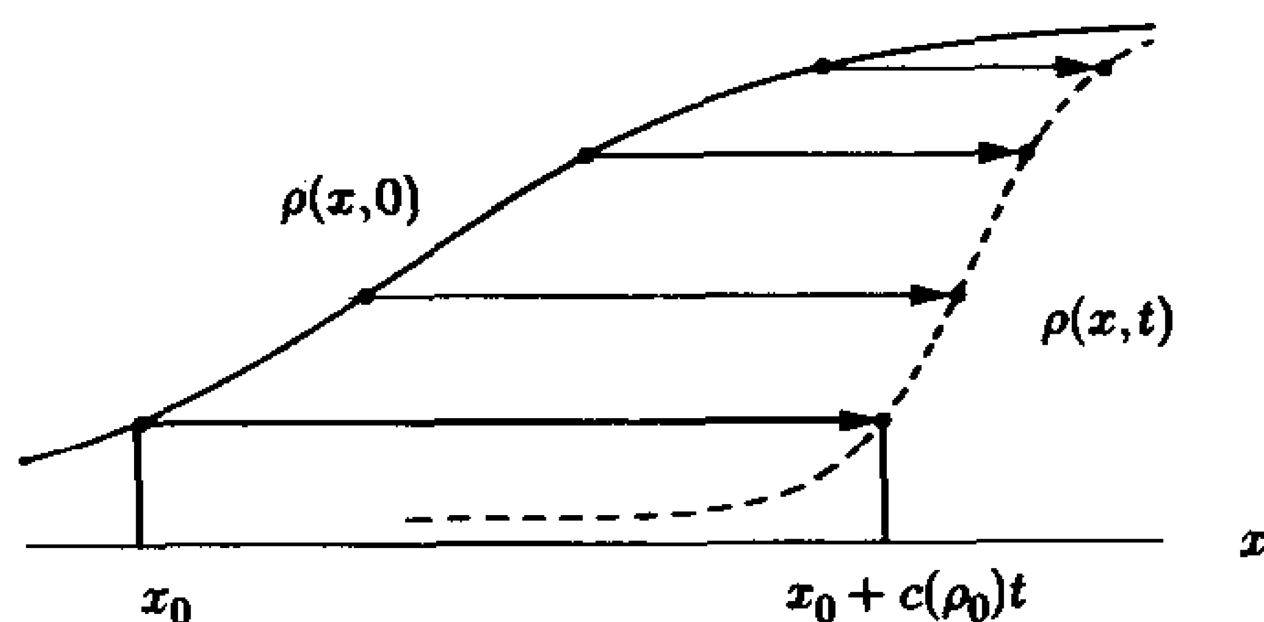


图 12.6.3 图解法

扇状特征线. 作为特征线法的例子，考虑下列初值问题：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 2\rho\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

$$\rho(x,0) = \begin{cases} 3 & x < 0 \\ 4 & x > 0. \end{cases}$$

以特征速度 2ρ 移动的密度 $\rho(x, t)$ 是常数：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2\rho.$$

所以特征线是

$$x = 2\rho(x_0, 0)t + x_0. \tag{12.6.17}$$

若 $x_0>0$，$\rho(x_0, 0)=4$；而 $x_0<0$ 时，$\rho(x_0, 0)=3$. 图 12.6.4 所示的特征线表明

$$\rho(x,t) = \begin{cases} 4 & x > 8t \\ 3 & x < 6t, \end{cases}$$

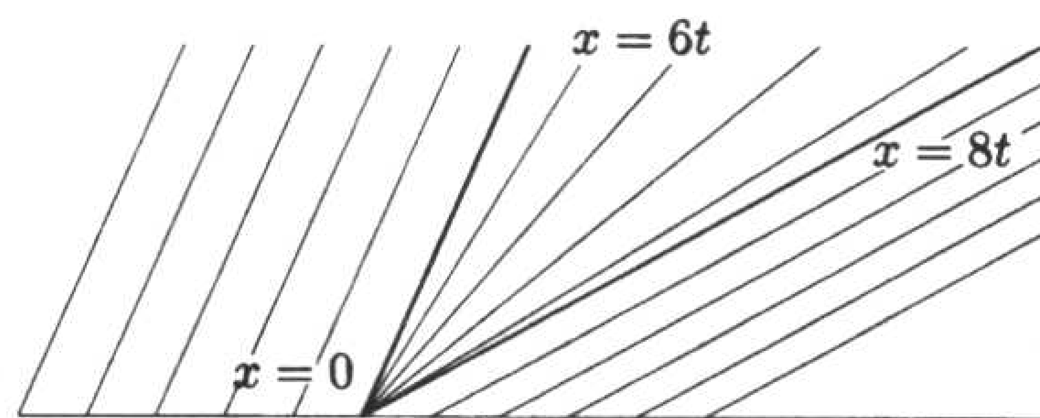
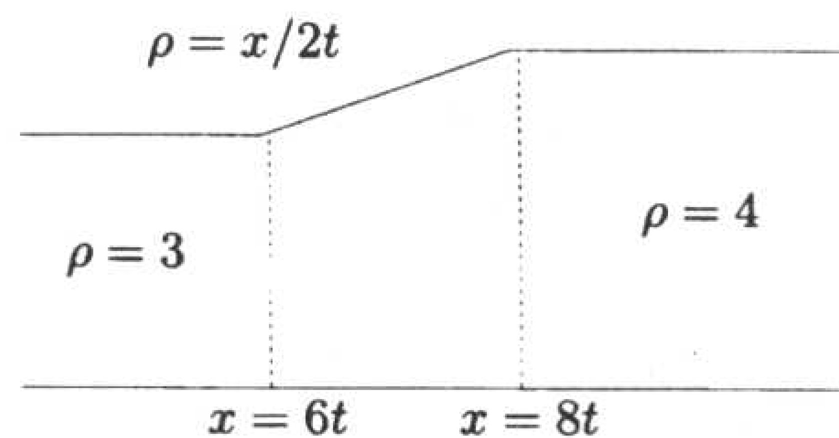


图 12.6.4　特征线(包括扇状特征线)

其图像如图 12.6.5 所示. $\rho=3$ 和 $\rho=4$ 之间的距离是递增的；称这个解为扩展波. 但是当 $6t<x<8t$ 时，

565 情况如何呢?这里的困难是由初始密度在 $x=0$ 有间断引起的. 想像 3 和 4 之间的所有 ρ 值在初始时刻都在 $x=0$. 对每个 3 和 4 之间的值，都有一条直线特征线，ρ 在其上为这个值. 因为这些特征线在 $t=0$ 时刻都从 $x=0$ 出发，由(12.6.17)就可以得到这些特征线的方程

$$x = 2\rho t \quad 3 < \rho < 4,$$



它们也在图 12.6.4 中. 这样就得到了在楔形区域中的密度

$$\rho = \frac{x}{2t} \qquad 6t < x < 8t,$$

对 x 是线性的(固定的 t). 注意特征线由 $x=6t$ 到 $x=8t$ 展开，因而称为扇状特征线. 这样得到的密度

566 如图 12.6.5 所示. 也可以由图解法得到.

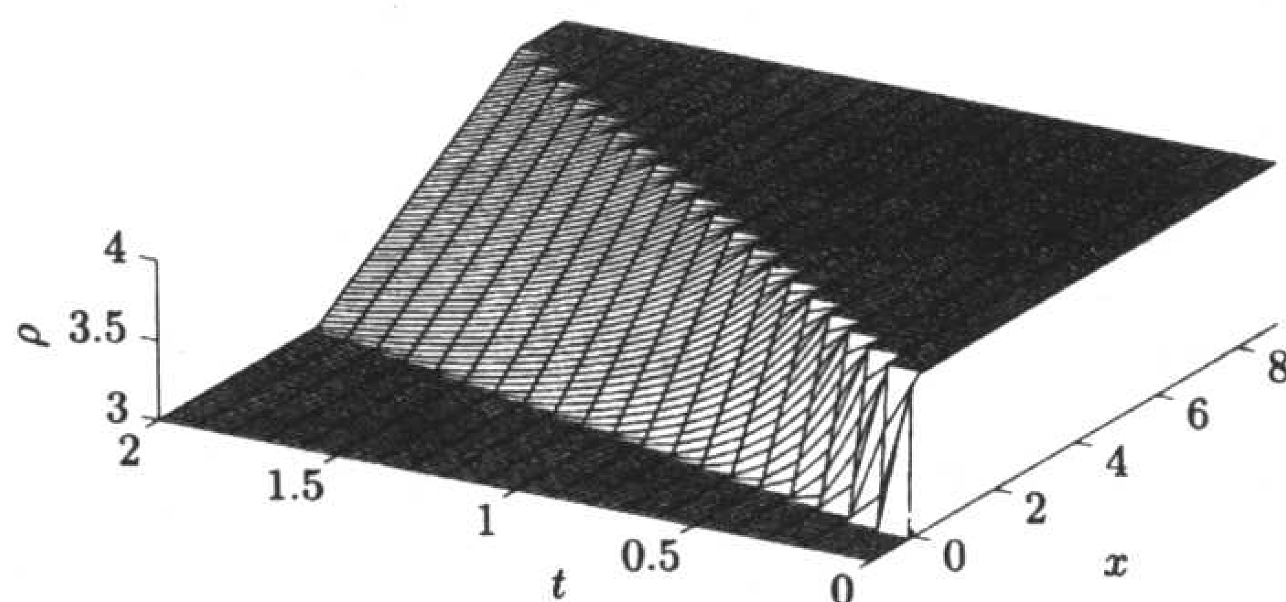


图 12.6.5　扩展波

红灯变绿灯. 假定基本交通模型，这样交通密度满足

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + u_{\max}\left(1 - \frac{2\rho}{\rho_{\max}}\right)\frac{\partial\rho}{\partial x} = 0.$$

在红灯($x=0$)之后，交通密度最大，然而在红灯之前交通密度为零，这样红灯变绿灯($t=0$)的初始条件是

$$\rho(x,0) = \begin{cases} \rho_{\max} & x < 0 \\ 0 & x > 0. \end{cases}$$

特征速度是$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u_{\max}\left(1 - \frac{2\rho}{\rho_{\max}}\right)$. 由于密度沿特征线是常数，所以特征线满足

$$x = u_{\max}\left(1 - \frac{2\rho}{\rho_{\max}}\right)t + x_0.$$

对 $\rho=0$，特征速度为 $u_{\max}$；而当 $\rho=\rho_{\max}$时，特征速度为 $-u_{\max}$. 因而

$$\rho(x,t) = \begin{cases} \rho_{\max} & x < -u_{\max}t \\ 0 & x > u_{\max}t. \end{cases}$$

交通灯转换为绿灯的信息以密度速度 $-u_{\max}$向后传播. 这就是为什么灯变绿后还要等一会儿才能走的原因. 这里的特征线与图 12.6.4 中的类似. 为了得到其他位置的密度，注意有一族始于$x_0=0$ 的扇状特征线. 因此，在这个区域中 $x=u_{\max}\left(1-\frac{2\rho}{\rho_{\max}}\right)t$. 给定其中的 x 和 t，可以求得它的密度

$$\rho(x,t) = \frac{\rho_{\max}}{2}\left(1-\frac{x}{u_{\max}t}\right) \quad -u_{\max}t < x < u_{\max}t.$$

这个解类似图 12.6.5 中的扩展波，但是对于交通流量的扩展波，作为交通灯变绿的结果，较高的密度(慢速行进车辆)在较低密度(较快速行进车辆)之后.

12.6.4 冲击波

相交特征线. 特征线法并不总会像前面所描述的那样有效. 对于拟线性偏微分方程而言，特征线相交是很平常的. 解决方案要求引入称作*冲击波*的移动间断. 为了数学陈述上相对简单一些，仅考虑 $Q=0$ 的拟线性偏微分方程，此时

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + c(\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} = 0. \qquad (12.6.18)$$

图 12.6.6 中有两条特征线，一条始于 $x=x_1$，满足 $\rho=f(x_1, 0)\equiv\rho_1$；另一条始于 $x=x_2$，满足 $\rho=f(x_2, 0)\equiv\rho_2$. 当 $c(\rho_1)>c(\rho_2)$时，这两条特征线相交，速度较快的赶上速度较慢的. 密度 [567] 沿特征线是常数. 随着时间的递增，密度 ρ_1 和 ρ_2 之间的距离递减. 这称为*压缩波*. 其初始条件见图 12.6.7. 因而随着时间的增加密度分布变得陡峭[如图 12.6.7b 和 c]. 最终特征线相交；理论预言密度同时是 ρ_1 和 ρ_2. 如果继续应用特征线法，速度较快的特征线会超过速度较慢的. 就得到了图 12.6.7d 所示的情形. 特征线法预言密度要变成位置的多值函数；也就是说，数学上预计在后面的某个时刻某些位置上会出现三个密度值[如图 12.6.7d 所示]. 这样就说密度波*折断*了. 不过，在许多物理问题(如交通流量问题)中，一个位置有三个密度值是没有意义的[㊀]. 密度必须是位置的单值函数.

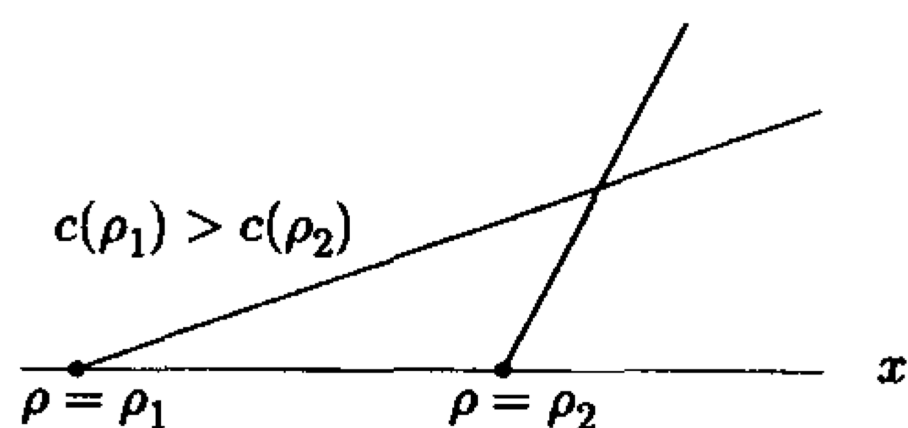


图 12.6.6 相交的特征线

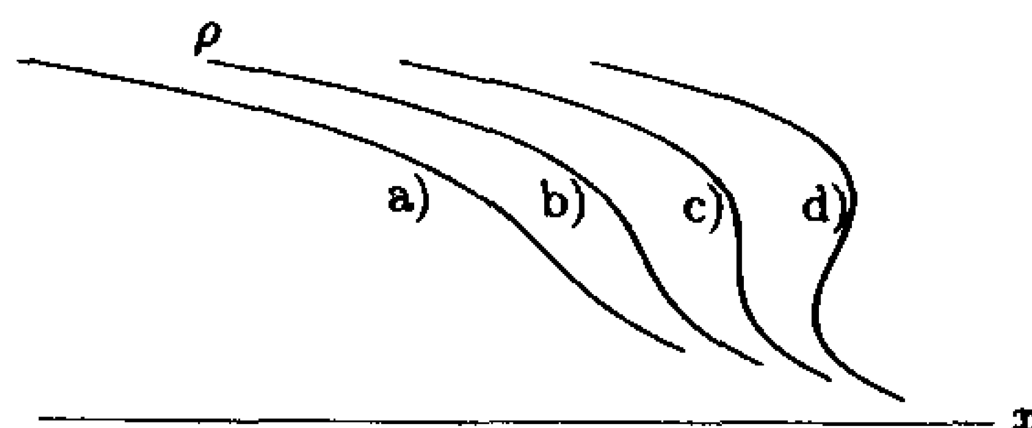


图 12.6.7 密度波变陡峭(密度变为三值的)

间断解. 基于拟线性偏微分方程(12.6.18)，预言了不可能的物理现象：密度变为多值. 既然特征线法在数学上是合理的，那么必定是偏微分方程自身不是完全有效. 一定是所使用的某些近似或假定在有些时候不正确. 下面将假设密度和速度有个跳跃间断(如图 12.6.8 所示)，称为*冲击波*，或者简称为*冲击*.[㊁]冲击发生在某个未知位置 x_s，并随时间传播，就是 $x_s(t)$. 引 [568] 入符号 x_{s-} 和 x_{s+} 表示冲击在间断点两边的位置. 冲击速度 dx_s/dt 还是未知的.

㊀ 描述近海岸(即浅水)水面波高度的偏微分方程与交通密度波方程相似. 此时对破裂的预测是很有意义的.

㊁ 引入术语*冲击波*是由于出现在气体动力学中的类似行为. 在那里，例如，气体压力和密度中的变化是传播的，并且能被听到(由于人耳的敏感). 它们被称为*声波*. 当压力和密度的波动小时，描述声波的方程可以被线性化. 此时声音以称为*音速*的固定速度传播. 然而，如果压力和密度的波动振幅不小，偏微分方程就是拟线性的. 特征线可能相交. 这时，可以建立压力和密度的不连续数学模型，间断结果称为*冲击波*. 例子有爆炸发出的声音或者闪电发出的雷鸣. 如果冲击波是由超出声障引起的，称为*轰声*.

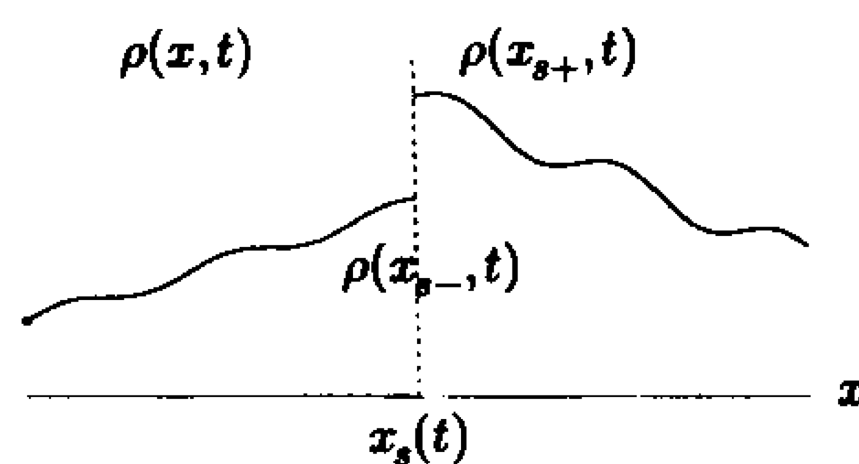


图 12.6.8　在 $x=x_s(t)$ 处的密度间断

冲击速度. 在冲击的每一边拟线性偏微分方程都是适用的 $\partial\rho/\partial t+c(\rho)\partial\rho/\partial x=0$，其中 $c(\rho)=\mathrm{d}q(\rho)/\mathrm{d}\rho$. 需要确定间断是如何传播的. 如果 ρ 即使在间断处也是守恒的，那么在冲击的一边相对移动冲击的流量必定等于在冲击另一边的相对移动冲击的流量. 因为流量等于密度乘以速度(这里是相对速度)，关于相对流入和相对流出的陈述为

$$\rho(x_{s-},t)\left[u(x_{s-},t)-\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t}\right]=\rho(x_{s+},t)\left[u(x_{s+},t)-\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t}\right], \tag{12.6.19}$$

求解(12.6.19)得到冲击速度

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t}=\frac{q(x_{s+},t)-q(x_{s-},t)}{\rho(x_{s+},t)-\rho(x_{s-},t)}=\frac{[q]}{[\rho]},} \tag{12.6.20}$$

其中 $q=\rho u$,并引入记号 $[q]$ 和 $[\rho]$ 分别表示 q 和 ρ 的跳跃量. 在气体动力学中,(12.6.20) 称为兰金–于戈尼奥条件. 总之,对于守恒律 $\partial\rho/\partial t+\partial q/\partial x=0$ $\left(\text{如果量}\int\rho\mathrm{d}x\text{ 是守恒的}\right)$,冲击速度等于流量的跳跃量除以守恒量密度的跳跃量. 在间断点,这个冲击条件代替了在其他地方有效的偏微分方程. 然而,还未解释何处出现冲击及如何确定 $\rho(x_{s+},t)$ 和 $\rho(x_{s-},t)$.

冲击速度的另一个推导. 考虑包含移动冲击($a<x_s(t)<b$)的有限区域($a<x<b$)的守恒定律——车辆守恒(12.6.8)(如图 12.6.8 所示)：

569

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b\rho\mathrm{d}x=q(a,t)-q(b,t). \tag{12.6.21}$$

由于密度有个间断点，最好把积分拆成两部分：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_a^{x_s(t)}\rho(x,t)\mathrm{d}x+\int_{x_s(t)}^b\rho(x,t)\mathrm{d}x\right]=q(a,t)-q(b,t).$$

使用带有变限积分求导的莱布尼茨法则，得到

$$\int_a^{x_s(t)}\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t}\rho(x_{s-},t)+\int_{x_s(t)}^b\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}x-\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t}\rho(x_{s+},t)=q(a,t)-q(b,t).$$

然而，不在冲击上解是光滑的，偏微分方程 $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{\partial q}{\partial x}=0$ 在区域 $a<x<x_s$ 和 $x_s<x<b$ 内都是成立的. 积分 $\int\dfrac{\partial q}{\partial x}\mathrm{d}x$ 容易计算，得到

$$q(a,t)-q(x_{s-},t)+\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t}[\rho(x_{s-},t)-\rho(x_{s+},t)]+q(x_{s+},t)-q(b,t)=q(a,t)-q(b,t).$$

消去 $q(a,\ t)$ 和 $q(b,\ t)$ 就得到冲击速度的基本方程(12.6.20)：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t}=\frac{q(x_{s-},t)-q(x_{s+},t)}{\rho(x_{s-},t)-\rho(x_{s+},t)}=\frac{[q]}{[\rho]},} \tag{12.6.22}$$

其中记号 $[\rho]$ 和 $[q]$ 分别是跨越间断冲击时密度的跳跃量和流量的跳跃量.

例. 考虑初值问题

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+2\rho\frac{\partial\rho}{\partial x}=0$$

$$\rho(x,0)=\begin{cases}4 & x<0\\ 3 & x>0.\end{cases}$$

假定 ρ 是守恒量的密度．把偏微分方程写成守恒形式（$\partial\rho/\partial t+\partial q/\partial x=0$）表明 $q=\rho^2$．因而，如果有个间断点，冲击速度满足 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=[q]/[\rho]=[\rho^2]/[\rho]$．密度 $\rho(x,\ t)$ 以特征速度 2ρ 匀速移动：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2\rho.$$

570

因此，特征线的方程为

$$x=2\rho(x_0,0)t+x_0.$$

若 $x_0<0$，$\rho(x_0,\ 0)=4$．这组平行特征线与那些始于 $x_0>0$（其中 $\rho(x_0,\ 0)=3$）的在网状区域中相交，见图 12.6.9a．特征线法给出了这个偏微分方程的多值解．这个困难通过引入冲击波而克服了（如图 12.6.9b），冲击波是标明密度和速度突变（即间断）路径的传播波．在冲击的一边，特征线法给出的密度是常数 $\rho=4$，而另一边是 $\rho=3$．然而还不知道冲击的路径．关于这样间断解的理论给出了任何的冲击路径都必须满足的冲击条件（12.6.20）．将流量和密度的跳跃量代入，注意此时 $q=\rho^2$ 就得到冲击速度的如下方程：

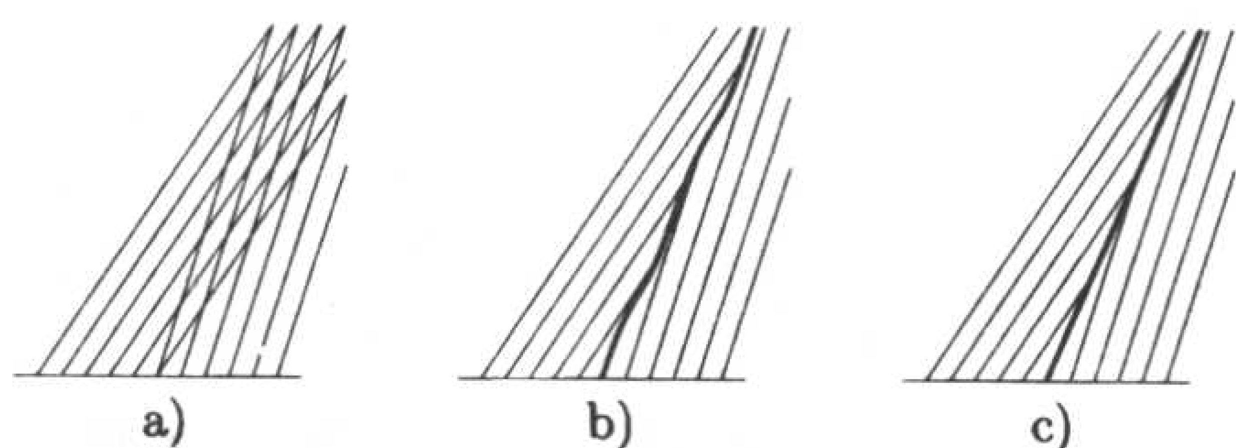


图 12.6.9　相交特征线引起的冲击

$$\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t}=\frac{q(4)-q(3)}{4-3}=\frac{4^2-3^2}{4-3}=7,$$

因而冲击以常速移动．冲击的初始位置是已知的，因此给了这个一阶常微分方程一个条件．这样，冲击在 $t=0$ 时必定始于 $x_s=0$．所以，由初始条件导出冲击的位置

$$x_s=7t.$$

所导出的时空图像如图 12.6.9c 所示．对任何 $t>0$，交通密度都是间断的，见图 12.6.10.

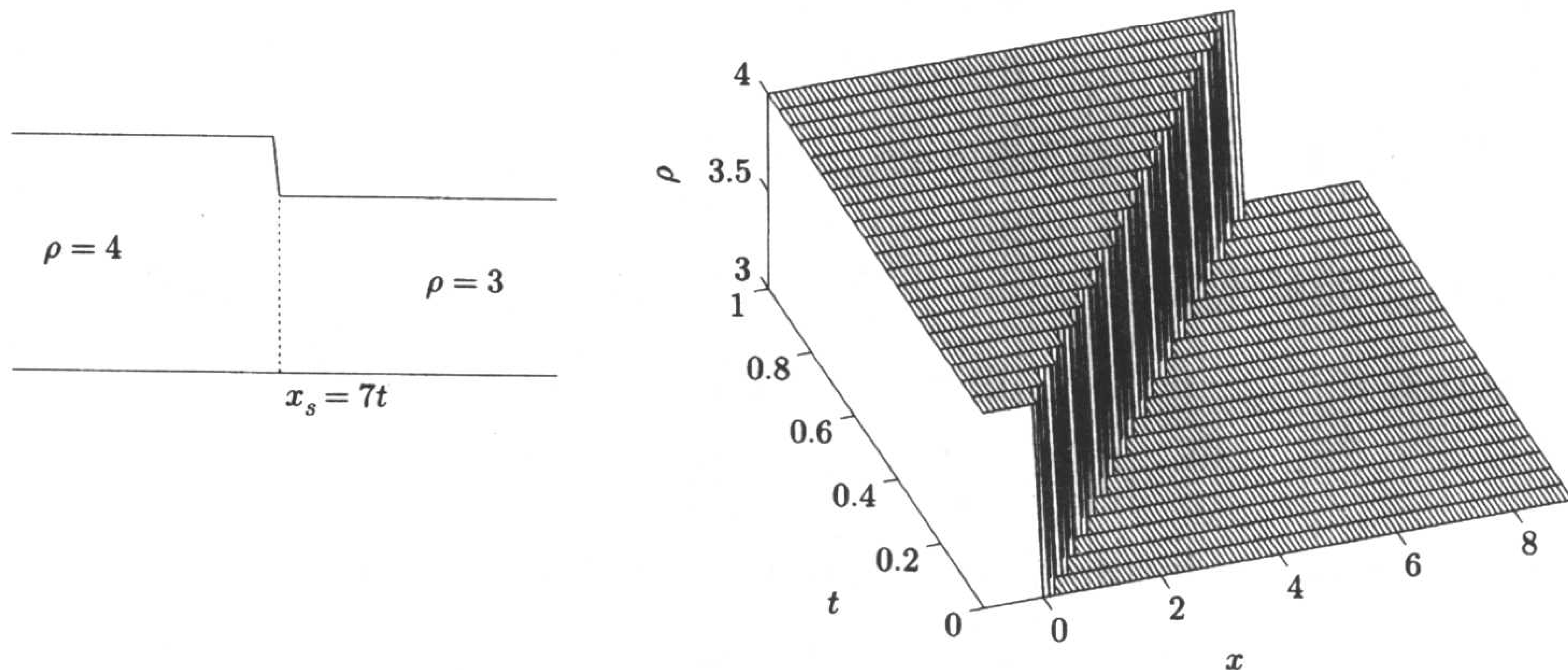


图 12.6.10　密度冲击波

熵条件. 如图 12.6.9c 所示，特征线必须从两边流入冲击. 左边的特征速度($2\rho=8$)必须大于冲击速度($\mathrm{d}x_s/\mathrm{d}t=7$)，右边的特征速度($2\rho=6$)必须小于冲击速度. 这是一般原理，称为熵条件，

571

$$c(\rho(x_{s-}))>\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t}>c(\rho(x_{s+})). \tag{12.6.23}$$

冲击速度的不唯一性及其解决方法. $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=0$(其中 $q=q(\rho)$)的冲击速度是$\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t}=\frac{[q]}{[\rho]}$. 有时说冲击速度是不唯一的，因为从数学上来说，这个偏微分方程可以用任何 ρ 的函数相乘，所导致的冲击速度可能就是不同的. 对前一个有 $\rho=4$ 和 $\rho=3$ 的冲击波例子，$\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t}=\frac{[q]}{[\rho]}=\frac{[\rho^2]}{[\rho]}=7$. 然而，若用 ρ 乘以这个偏微分方程，可得$\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\rho^2\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\frac{2}{3}\rho^3\right)}{\partial x}=0$，使得假定 ρ^2 是守恒的冲击速度是不同的$\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t}=\frac{[q]}{[\rho^2]}=\frac{\left[\frac{4}{3}\rho^3\right]}{[\rho^2]}=\frac{4}{3}\frac{4^3-3^3}{7}=\frac{148}{21}$. 不过这里希望采用的观点是：只有一个守恒律是物理原理上正确的守恒律. 例如，对于交通流量问题，ρ 而不是 ρ^2 是这个守恒的量，冲击速度公式仅适用于物理上守恒的密度.

绿灯变红灯. 假定交通密度满足对应交通流量基本模型的偏微分方程：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u_{\max}\left(1-\frac{2\rho}{\rho_{\max}}\right)\frac{\partial\rho}{\partial x}=0.$$

在交通灯变红之前，假定一种非常简单的交通情况，交通密度是常数 $\rho=\rho_0$，因此所有的车辆都以相同的速度 $u=u_{\max}\left(1-\frac{\rho_0}{\rho_{\max}}\right)$前行. 设绿灯($x=0$)在 $t=0$ 时刻变成红灯. 在灯前($x<0$)，交通密度初始是统一的 $\rho=\rho_0$；但在交通灯处的密度 $\rho=\rho_{\max}$，因为车辆在此停了下来：

$$\rho(x,0)=\rho_0 \quad x<0$$
$$\rho(0,t)=\rho_{\max} \quad t>0.$$

特征速度是$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u_{\max}\left(1-\frac{2\rho}{\rho_{\max}}\right)$. 因为在 $\rho=\rho_{\max}$，特征速度是 $-u_{\max}$，始于 $x=0$ 的特征线是向后

572

移动的. 在 $\rho=\rho_0$，特征速度是 $u_{\max}\left(1-\frac{2\rho_0}{\rho_{\max}}\right)$. 由于 $u_{\max}\left(1-\frac{2\rho_0}{\rho_{\max}}\right)>-u_{\max}$，这两族平行特征线会相交. 会形成分开 $\rho=\rho_0$ 和 $\rho=\rho_{\max}$的冲击. 冲击速度由(12.6.20)确定：

$$\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t}=\frac{[q]}{[\rho]}=\frac{q(\rho_{\max})-q(\rho_0)}{\rho_{\max}-\rho_0}=\frac{-q(\rho_0)}{\rho_{\max}-\rho_0},$$

其中注意到 $q(\rho_{\max})=0$. 因为冲击在 $x=0$ 开始(于 $t=0$)，其冲击路径是

$$x_s=\frac{-q(\rho_0)}{\rho_{\max}-\rho_0}t.$$

因为 $q(\rho_0)>0$，冲击速度是负的，冲击向后传播. 此时 $q(\rho_0)=u_{\max}\left(1-\frac{\rho_0}{\rho_{\max}}\right)\rho_0$，但这并不需

要．在冲击前交通密度是ρ_0，而在冲击处增加到ρ_{max}(不像图 12.6.10)．特征线和冲击在性质上与图 12.6.9c 类似，但是交通冲击出现在较快行驶(低交通密度)的车辆在慢速行驶(高交通密度)车辆后面的时候．这里冲击速度表示了因为红灯而在红灯之后向后移动的停车线．许多交通事故就是由于交通冲击波的突然性引起的．

形成冲击的条件．如果初始特征速度$c(\rho)=q'(\rho)$是x的减函数(因此较快的波在较慢波的后面)，就会形成冲击．因此，如果初值时$\frac{\partial}{\partial x}q'(\rho)=q''(\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}<0$，就会造成冲击．对$q''(\rho)<0$的交通问题就有：当密度是$x$的增函数时，就会形成交通冲击，并且在冲击处，密度对x必定是增的．然而，如果$q''(\rho)>0$，只有$\frac{\partial\rho}{\partial x}<0$才会形成冲击，并且在冲击处密度对$x$必定是减的．否则特征线不会相交，而间断初始条件对应着扩展波．如果$q''(\rho)$不变号，那么间断初始条件或者导致冲击波，或者导致扩展波．

一个既有冲击波又有扩展波的例子．如果$q''(\rho)$至少改变一次符号，那么间断初始条件就既可能导致冲击波，也可能导致扩展波．具有这种性质的简单数学例子是$q=\frac{1}{3}\rho^3$，其中$q'=\rho^2$，$q''=2\rho$．若$\rho<0$，这与交通问题相似，下面将假设ρ的初值有正有负，例如由负增为正：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho^2\frac{\partial\rho}{\partial x}=0$$

$$\rho(x,0)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 2 & x>0.\end{cases}$$

由于ρ是x的增函数，冲击波在$q''=2\rho<0$(即$-1<\rho<0$)处发生，而对$\rho>0$则会出现扩展波．一般地，根据特征线法，ρ以速度ρ^2移动时是常值，这样，特征线满足

$$x=\rho^2(x_0,0)t+x_0.$$

而对应$\rho=-1$，$\rho=2$的重要特征线和(只在$t=0$时刻)$\rho=0$参见图 12.6.11．当$x>4t$时，$\rho=2$．扩展波满足$x=\rho^2(x_0,0)t$，使得

$$\rho_{fan}=+\sqrt{\frac{x}{t}},$$

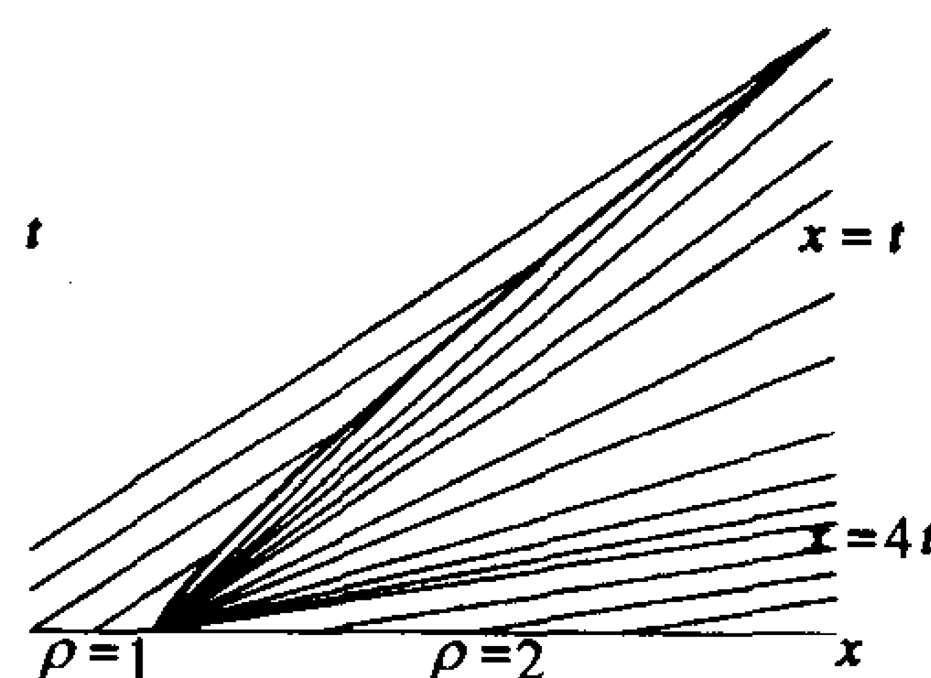


图 12.6.11　冲击波和扩展波的特征线

573

其中要注意到这一问题中的扩展波对应着$\rho>0$.(特征线$x=0t$对应$\rho=0$，所以在某种微妙的意义下界定了从$\rho=0$到$\rho=2$的扩展波.)不过，在发自$x_0<0$的特征线上$\rho=-1$以速度$+1$与扩展波区域内的特征线相交．将会形成非均匀(非恒定速度)冲击波，它将有恒定密度$\rho=-1$的区域与扩展波$\rho_{fan}=+\sqrt{\frac{x}{t}}$分开．冲击的路径由下面的冲击条件确定：

$$\frac{dx}{dt}=\frac{[q]}{[\rho]}=\frac{1}{3}\frac{1+\left(\frac{x}{t}\right)^{3/2}}{1+\left(\frac{x}{t}\right)^{1/2}}.$$

准确地求解这个常微分方程有一定的困难. 不管怎样，这个常微分方程都可以(小心地)数值求解(取 $y=x/t$). 可以证明对这些初值条件，这种非均匀冲击一直存在. 在其他(但不是这个)问题中，在某个时刻之后这种冲击就不再存在，而被分离 $\rho=-1$ 和 $\rho=2$ 的较简单均匀冲击(恒定速度)所替代.

扩散守恒定律. 此处引入一种不同的方法来理解这种唯一的冲击速度和唯一的守恒律之间

574 的关系. 假设偏微分方程是扩散的，但是只与前面所研究过的方程略有不同：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+q'(\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}, \tag{12.6.24}$$

其中 ε 是很小的正参数，$0<\varepsilon\ll 1$. 注意 ρ 在 $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(q-\varepsilon\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)=0$ 的意义下是守恒的. 在大多数情况下，这个偏微分方程可以精确地被取 $\varepsilon=0$ 的方程近似，后者可以用特征线法求解. $\varepsilon\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}$这项仅在$\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}$大的地方是重要的，即靠近在短距离内密度急剧改变的区域，也就是称作冲击的地方. (12.6.24)可以在假设车速满足 $u=\frac{q}{\rho}-\varepsilon\frac{\partial\rho/\partial x}{\rho}$时导出，这对应着在司机看到交通密度增大 $\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}>0\right)$而减速. 感兴趣的是在初值条件在 $x\to\pm\infty$ 时趋于两个不同常数 ρ_1 和 ρ_2 的条件下，求解方程(12.6.24). 这将对应着两种常态之间的一种转换波. 有两种很不相同的情形，一种对应冲击波型的初值条件，一种对应扩展波型的初值条件. 将证明仅在冲击波型情形存在着行进转换波.

行进冲击波速度. 没有寻求(12.6.24)这样非线性偏微分方程通解的方法，因而要寻找十分特殊的有未知波速 c 的行波解：

$$\rho=f(\xi)=f(x-ct), \tag{12.6.25}$$

其中 ξ 是以速度 c 移动的空间坐标. 将(12.6.25)代入(12.6.24)得到二阶非线性常微分方程：

$$(-c+q'(f))\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}=\varepsilon\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}\xi^2}, \tag{12.6.26}$$

对其积分得到一阶非线性常微分方程：

$$-A-cf+q(f)=\varepsilon\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}, \tag{12.6.27}$$

其中 $-A$ 是常数. 要确定两个常数 c 和 A，虽然速度更重要. 为了满足条件 $x\to\pm\infty$ 时 $f\to\rho_1$ 和 ρ_2，得到

$$-A-c\rho_1+q(\rho_1)=0 \tag{12.6.28}$$

$$-A-c\rho_2+q(\rho_2)=0. \tag{12.6.29}$$

由(12.6.28)减(12.6.29)确定了行波速度：

$$c=\frac{q(\rho_2)-q(\rho_1)}{\rho_2-\rho_1}=\frac{[q]}{[\rho]}. \tag{12.6.30}$$

因此，行波速度等于冲击速度，但是将证明这只对冲击波型条件成立，而对扩展波型条件不

575 成立.

行进冲击波的空间结构. 一阶自治微分方程(12.6.27)可以用一维相图分析. 需要知道 $q(\rho)$的性质. 对交通流量问题, 如图 12.6.12 所示, 假定 $q''(\rho)<0$, 所以这对应于交通流量的实验如同前面的简单例子. 这里感兴趣的是 $q(f)$ 和直线 $A+cf$ 之间的差别. 调整常数 A 使得它们有两个交点 ρ_1 和 ρ_2. 这两个是平衡解并且一定满足(12.6.28)和(12.6.29). 把这两个解标记为 $\rho_2>\rho_1$ 是非常重要的. 对(12.6.27), $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\xi$ 是 f 的已知函数, 如图 12.6.12 上图所示. 自治一阶微分方程(12.6.27)的一维相图如图 12.6.12 下图所示. 注意在上半平面 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\xi>0$, 因而 f 是 ξ 的增函数, 引入右箭头标明 f 随 ξ 的增加而增加. 类似地, 在下半平面 f 是 ξ 的减函数. 满足 $f>\rho_2$ 或 $f<\rho_1$ 的解在行波坐标 ξ 下向前或者向后爆破, 但不是这里所感兴趣的. 仅有的有界行波解对应着 $\rho_1<f<\rho_2$. 最重要的是, 当 $\rho_1<f<\rho_2$ 时 f 是 ξ 的增函数, 因此它在图 12.6.13 中的图像是个行波, 当 $x-ct\to-\infty$ 时, $f\to\rho_1$; 当 $x-ct\to\infty$ 时, $f\to\rho_2$. 重要的是它对应着交通流量方程的冲击波($\rho_2>\rho_1$)情形. 可以证明: 如果 ε 小, 从 ρ_1 到 ρ_2 的转换出现在窄区域内. 移动间断是对精确的连续行波的很好近似. 已经证明了它们的速度是相同的. 这样行波所对应的仍称为冲击波. 事实上, 当 $\varepsilon\to0$ 时, 连续行波的空间结构趋于间断的冲击波.

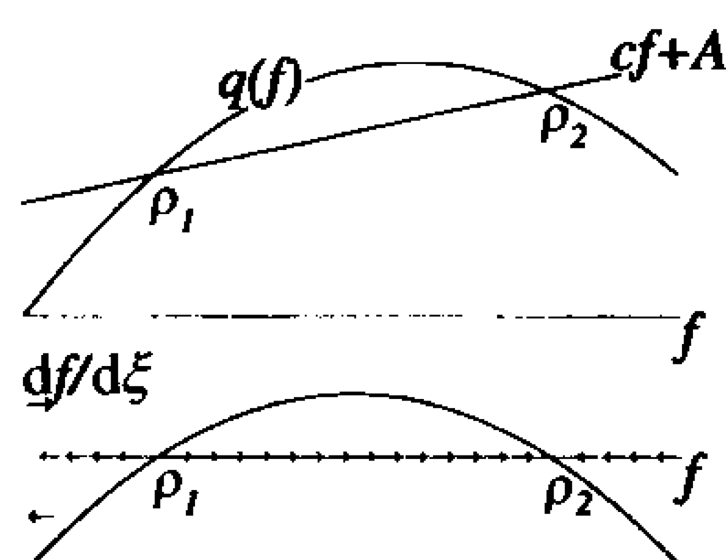


图 12.6.12 行进冲击波的相位线

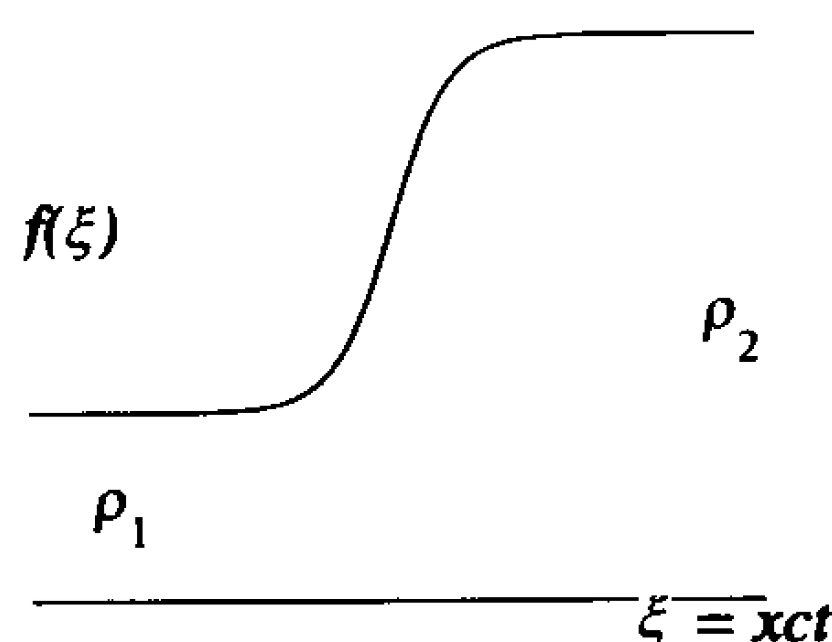


图 12.6.13 行进冲击波的空间结构

冲击波的形成. 已经介绍了冲击波的传播. 在前面考虑的例子中密度初始是间断的, 冲击波也就立刻形成了. 现在要证明如果初始密度连续, 那么冲击波将在有限时间内形成, 这里要计算出这个有限时间. 假设初始条件使得出现如图 12.6.6 所示的情况, 由于较快移动的特征 576 线位于较慢移动的特征线之后, 致使它们相交. 对偏微分方程 $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+c(\rho)\dfrac{\partial\rho}{\partial x}=0$, 其中密度波速度是 $c(\rho)=q'(\rho)$, 这族直线特征线[相应的密度 $\rho(x,\ t)=\rho(x_0,\ 0)=f(x_0)$ 是由初始条件给定的常数]满足

$$x=c[f(x_0)]t+x_0=F(x_0)t+x_0, \tag{12.6.31}$$

其中引入了恒定密度波速度的简化记号 $F(x_0)=c[f(x_0)]$. 图 12.6.6 所示起始于两条相交特征线之间的任何特征线可以基本肯定会与这两条特征线之一更早相交. 因此, 通常是相邻特征线相交. 那就先讨论这种情形.

焦散曲线(曲线族、射线或特征线的包络). 拟线性偏微分方程的特征线族(12.6.31)可能如图 12.6.6 所示的那样聚集起来, 这里要解释图 12.6.14 所示的特征线包络. 为了更具一般性, 不考虑(12.6.31), 而是任何含参数 x_0 的曲线族:

$$G(x,t,x_0)=0. \tag{12.6.32}$$

焦散曲线是一个曲线族的包络, 它一定同时满足(12.6.32)和(12.6.32)对参数 x_0 的偏导数:

$$\frac{\partial}{\partial x_0}G(x,t,x_0) = 0. \tag{12.6.33}$$

要证明(12.6.33)，考虑相邻曲线的交点，即(12.6.32)和 $G(x,\ t,\ x_0+\Delta x_0)=0$. 由泰勒级数，这变成 $G(x,\ t,\ x_0)+\Delta x_0\frac{\partial}{\partial x_0}G(x,\ t,\ x_0)+\cdots=0$. 再由(12.6.32)，除以 Δx_0，并取 $\Delta x_0\to 0$ 的极限，就证明了(12.6.33).

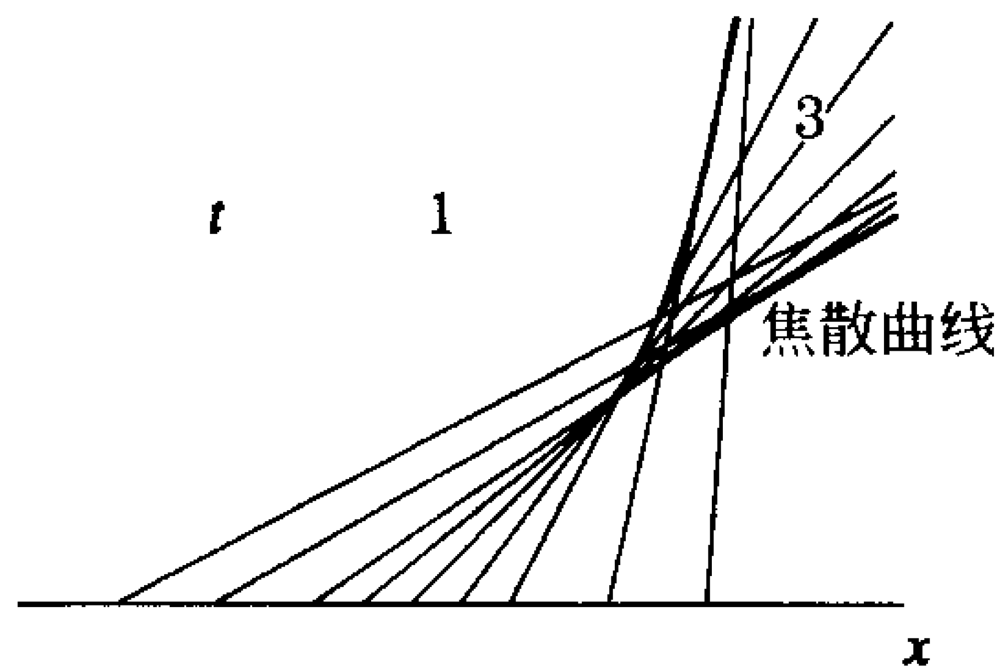


图 12.6.14 特征线包络，焦散曲线的形成

577

偏微分方程特征线的焦散曲线. 在所举的例子中，特征线族是直线族(12.6.31)，$G(x,\ t,\ x_0)=0=F(x_0)t+x_0-x$，其中 $F(x_0)=c[f(x_0)]$. 因此，同时求解 $0=F'(x_0)t+1$ 就得到焦散曲线(特征线或射线的包络). 这给出了焦散曲线的参数表示(容易由给定的初始条件作数值图像)：

$$x=-\frac{F(x_0)}{F'(x_0)}+x_0 \tag{12.6.34}$$

$$t=-\frac{1}{F'(x_0)}. \tag{12.6.35}$$

特征线相交($t>0$)必有 $F'(x_0)<0$. 由 $F(x_0)=c[f(x_0)]$，可得，如果相邻特征线是由特征速度局部减少的区域发出，则它们相交(较快行进的特征线在较慢行进特征线之后). 焦散曲线如图 12.6.14 所示. 在 14.6.2 节将证明这个焦散曲线有一个尖点.

冲击的引发. 解一直是连续的直到出现焦散曲线的有限时刻. 冲击波从这个时刻开始. 焦散曲线的时间由(12.6.35)给出. 为了确定特征线相交第一时刻，必须最小化相交时间. 因为 $F'(x_0)<0$，(12.6.35)给出的 t 的绝对最小值对应着 $F'(x_0)$ 的绝对最小值. 因此，冲击波在由(12.6.35)给定的 t 时刻开始，其中 x_0 对应 $F'(x_0)$ 的最小值并且 $F''(x_0)=0$.

三值性. 仔细观察图 12.6.14 可以发现：在焦散曲线内(焦散曲线形成后)，每个时空点都有三条不同的特征线通过，这对应图 12.6.15 或 12.6.7d 显示的偏微分方程的解是三值的. 在焦散曲线之外，唯一的特征线通过每个点，因而解是单值的. 焦散曲线是这两个区域之间的边界. 要证明：解沿着焦散曲线的斜率是无穷(见图 12.6.15)的. 由 $\rho(x,\ t)=f(x_0)$ 得到

578

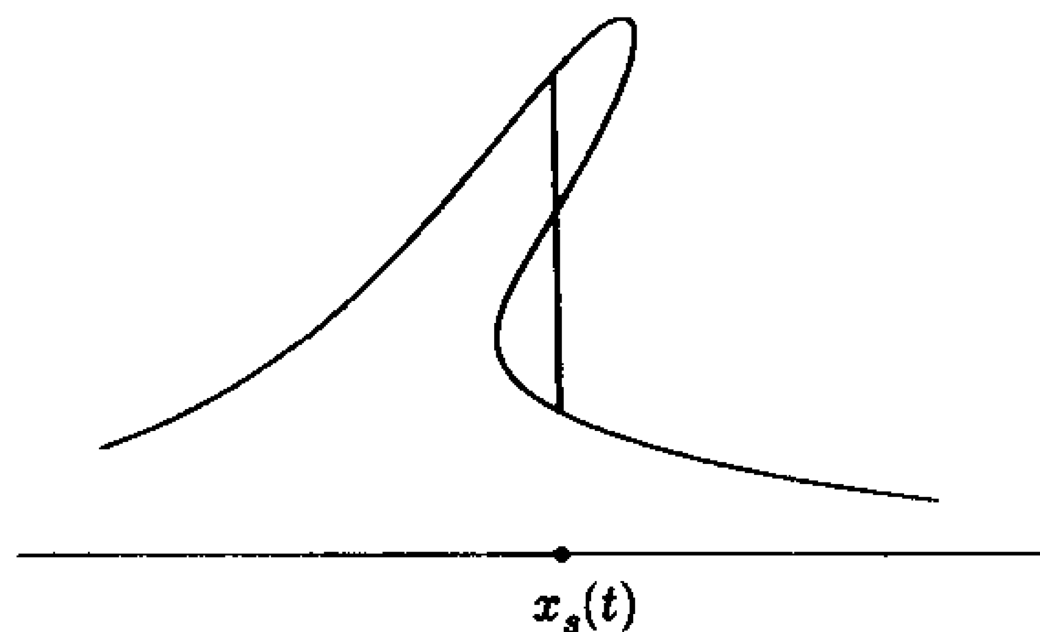


图 12.6.15 惠瑟姆的等面积原理

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}=f'(x_0)\frac{\partial x_0}{\partial x}=\frac{f'(x_0)}{F'(x_0)t+1},$$

这里用到了(12.6.31)对 x 求偏导数可得，$1=[F'(x_0)t+1]\frac{\partial x_0}{\partial x}$. 因为在焦散曲线上满足(12.6.35)，所以解的斜率在焦散曲线上是无穷的.

冲击波动力学. 这个(在焦散曲线内)三值折叠的解是没有意义的. 而是如早先的讨论，冲击波存在，是要满足冲击条件 $\frac{dx_s}{dt}=\frac{[q]}{[\rho]}$ 的，但是这里的冲击波是在由(12.6.35)最小化时间确定的时刻，从焦散曲线的尖点处开始的. 这就给出了冲击波位置的一个微分方程，但是冲击

波未必有恒定速度. 冲击波位于焦散曲线内. 惠瑟姆[1999]证明了冲击的正确位置可能是由将波瓣切成等面积区域来确定(图 12.6.15). 其原因是特征线法保持车辆, 当冲击发生时, 车辆数(对应面积 $\int \rho \mathrm{d}x$)必须和初始车辆数相等.

12.6.5 拟线性举例

考虑拟线性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = -2\rho, \tag{12.6.36}$$

满足初始条件

$$\rho(x,0) = f(x). \tag{12.6.37}$$

这可以是交通流量问题(ρ 是密度的同比例量)的模型, 其中车辆数是不守恒的, 而是以与密度成比例的速率(在出口处)离开车行道(就像汽车离开公路以免拥挤). [579]

特征线法给出

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -2\rho, \tag{12.6.38}$$

沿着特征线

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\rho. \tag{12.6.39}$$

这两个方程有时写成其等价形式

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{-2\rho} = \frac{\mathrm{d}x}{-\rho} = \mathrm{d}t. \tag{12.6.40}$$

有时这个耦合常微分方程组可以直接求解. 此时可以先解 ρ 的常微分方程, 然后用它的解确定特征线 x. 由初始条件(12.6.37)引入参数 x_0 来表示以 $x = x_0$ 为始点(在 $t = 0$ 时刻)的特征线. 由(12.6.38), 沿着特征线, 得到

$$\rho(x,t) = \rho(x_0,0)\mathrm{e}^{-2t} = f(x_0)\mathrm{e}^{-2t}. \tag{12.6.41}$$

沿每一条特征线, 参数 x_0 是常数. 解(密度)随着时间的增加沿着特征线呈指数衰减. 这样, 特征速度为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -f(x_0)\mathrm{e}^{-2t}.$$

由于在 $t = 0$, x 必为 x_0, 积分特征速度得到特征线的位置:

$$x = \frac{1}{2}f(x_0)\mathrm{e}^{-2t} - \frac{1}{2}f(x_0) + x_0, \tag{12.6.42}$$

这里, 特征线不是直线. 由(12.6.41)得到解的参量表示, 其中由(12.6.42), x_0 应该看作是 x 和 t 的函数. 显式解一般是得不到的.

初值问题的显式解. 对拟线性偏微分方程(12.6.36), 设初始条件是

$$\rho(x,0) = f(x) = x.$$

此时, 由(12.6.42), 特征线满足

$$x = \frac{1}{2}x_0\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{2}x_0.$$

这样，可以得到显式解：

580

$$x_0 = \frac{2x}{1 + e^{-2t}}.$$

对于每一个 x 和 t，只有一条特征线 x_0(因为所选择的初始条件使得特征线族自身不相交)．由(12.6.41)，偏微分方程初值问题的解是

$$\rho(x,t) = \frac{2xe^{-2t}}{1 + e^{-2t}} = \frac{2x}{1 + e^{2t}}.$$

通解．拟线性偏微分方程有通解(像线性波动方程一样)．不指定初始条件，积分(12.6.38)和(12.6.39)给出

$$\rho(x,t) = c_1 e^{-2t}$$

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2.$$

一般地，一个常数可以是另一个常数的任意函数．这样，就得到了(12.6.36)的通解

$$x = \rho + f(\rho e^{2t}).$$

习题 12.6

12.6.1 确定满足初始条件 $\rho(x, 0) = f(x)$ 的解 $\rho(x, t)$，其中

*(a) $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ (b) $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} = -3\rho + 4e^{7t}$ *(c) $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} = -3x\rho$ (d) $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} = x^2 t\rho$

*12.6.2 确定方程 $\partial\rho/\partial t = \rho$ 的解，在 $x = -2t$ 上，$\rho(x, t) = 1 + \sin x$.

12.6.3 设 $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + c_0\dfrac{\partial\rho}{\partial x} = 0$，其中 c_0 为常数.

*(a) $\rho(x, 0) = \sin x$，确定 $\rho(x, t)$.

*(b) 若 $c_0 > 0$，对 $x > 0$ 和 $t > 0$，确定 $\rho(x, t)$，其中 $\rho(x, 0) = f(x)$，$x > 0$；$\rho(0, t) = g(t)$，$t > 0$.

(c) 证明：在 $c_0 < 0$ 时(b)不可解.

*12.6.4 如果 $u(\rho) = \alpha + \beta\rho$，$u(0) = u_{max}$，$u(\rho_{max}) = 0$，确定 α 和 β 的值.

(a) 流量是密度的什么函数？画出流量作为密度函数的图形.

(b) 密度为何值时，流量最大？对应的速度是什么？最大流量(称为容量)又是多少？

581

12.6.5 若 $u(\rho) = u_{max}(1 - \rho^3/\rho_{max}^3)$，重做习题 12.6.4.

12.6.6 考虑交通流量问题

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + c(\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} = 0.$$

假定 $u(\rho) = u_{max}(1 - \rho/\rho_{max})$，求解 $\rho(x, t)$，初始条件如下：

(a) $x < 0$ 时，$\rho(x, 0) = \rho_{max}$；$x > 0$ 时，$\rho(x, 0) = 0$. 这对应着在红灯变为绿灯之后，无限长的停止车队的交通密度.

(b) $\rho(x, 0) = \begin{cases} \rho_{max} & x < 0 \\ \dfrac{\rho_{max}}{2} & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$ (c) $\rho(x, 0) = \begin{cases} \dfrac{3\rho_{max}}{5} & x < 0 \\ \dfrac{\rho_{max}}{5} & x > 0 \end{cases}$

12.6.7 求解下列问题：

(a) $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \rho^2\dfrac{\partial\rho}{\partial x} = 0$ $\rho(x, 0) = \begin{cases} 3 & x < 0 \\ 4 & x > 0 \end{cases}$ (b) $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + 4\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial x} = 0$ $\rho(x, 0) = \begin{cases} 2 & x < 1 \\ 3 & x > 1 \end{cases}$

(c) $\frac{\partial\rho}{\partial t}+3\rho\frac{\partial\rho}{\partial x}=0\qquad \rho(x,\ 0)=\begin{cases}1 & x<0\\ 2 & 0<x<1\\ 4 & x>1\end{cases}$

(d) $\frac{\partial\rho}{\partial t}+6\rho\frac{\partial\rho}{\partial x}=0$（仅在 $x>0$ 时）　$\begin{array}{ll}\rho(x,\ 0)=5 & x>0\\ \rho(0,\ t)=2 & t>0\end{array}$

12.6.8 设初始条件为 $\rho(x,\ 0)=f(x)$，求解：

* (a) $\frac{\partial\rho}{\partial t}+c\frac{\partial\rho}{\partial x}=e^{-3x}$　(b) $\frac{\partial\rho}{\partial t}+3x\frac{\partial\rho}{\partial x}=4$　* (c) $\frac{\partial\rho}{\partial t}+t\frac{\partial\rho}{\partial x}=5$

(d) $\frac{\partial\rho}{\partial t}+5t\frac{\partial\rho}{\partial x}=3\rho$　* (e) $\frac{\partial\rho}{\partial t}-t^2\frac{\partial\rho}{\partial x}=-\rho$　(f) $\frac{\partial\rho}{\partial t}+t^2\frac{\partial\rho}{\partial x}=0$

* (g) $\frac{\partial\rho}{\partial t}+x\frac{\partial\rho}{\partial x}=t$

12.6.9 设 $\rho(x,\ 0)=f(x)$，确定解的参数表达式：

* (a) $\frac{\partial\rho}{\partial t}-\rho^2\frac{\partial\rho}{\partial x}=3\rho$　(b) $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial\rho}{\partial x}=t$

* (c) $\frac{\partial\rho}{\partial t}+t^2\rho\frac{\partial\rho}{\partial x}=-\rho$　(d) $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial\rho}{\partial x}=-x\rho$

582

12.6.10 对 $t>0$，$x>0$，求解 $\partial\rho/\partial t+t^2\partial\rho/\partial x=4\rho$，$\rho(0,\ t)=h(t)$，$\rho(x,\ 0)=0$.

12.6.11 对 $x>-t/2$，$t>0$，求解 $\partial\rho/\partial t+(1+t)\partial\rho/\partial x=3\rho$，其中对于 $x>0$，$\rho(x,\ 0)=f(t)$，并且沿着 $x=-t/2$，$\rho(x,\ t)=g(t)$.

12.6.12 考虑(12.6.8)，其中存在移动的冲击 x，满足 $a<x_s(t)<b$，通过对这个[有在 $x_s(t)$ 间断被积函数的]积分求导推导出(12.6.20).

12.6.13 假设车速不是 $u=U(\rho)$，而是

$$u=U(\rho)-\frac{\nu}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x},$$

其中 ν 为常数.

(a)要使这个表达式在物理上合理，ν 应该取什么符号？

(b)现在有什么方程描述车辆守恒？

(c)设 $U(\rho)=u_{max}(1-\rho/\rho_{max})$. 请推导出伯格方程：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u_{max}\left(1-\frac{2\rho}{\rho_{max}}\right)\frac{\partial\rho}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}.$$

12.6.14 考虑在习题 11.6.13 中导出的伯格方程. 假定以速度 V 移动不改变波形的密度波解 $\rho(x,\ t)=f(x-Vt)$.

* (a) f 满足什么样的常微分方程？

(b)对这个微分方程积分一次. 用图解法证明存在满足 $x\to+\infty$，$f\to\rho_2$ 和 $x\to-\infty$，$f\to\rho_1$ 的解，必有 $\rho_2>\rho_1$. 请画出这个解的草图. 并给出物理解释.

* (c)证明波传播速度 V 与分开 $\rho=\rho_1$ 和 $\rho=\rho_2$ 的冲击波速度相同(若 $\nu=0$，会发生).

12.6.15 考虑在习题 11.6.13 中导出的伯格方程. 证明霍普夫(E. Hopf)在 1950 年和 J. D. Cole 在 1951 年各自独立地引入的因变量变换

$$\rho=\frac{\nu\rho_{max}}{u_{max}}\frac{\phi_x}{\phi},$$

将伯格方程变换为扩散方程 $\frac{\partial\phi}{\partial t}+u_{max}\frac{\partial\phi}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$. 用这个变换求解初值问题 $\rho(x,\ 0)=f(x)(-\infty<x<+\infty)$. [Whitham[1999]中证明了可以对这个精确解做 $\nu\to0$ 的渐近分析，由对指

[583] 数积分应用拉普拉斯方法可以证明$\rho(x, t)$趋于在$\nu=0$时用特征线法冲击波动力学所得到的解.]

12.6.16 设初始交通密度是：$x<0$时$\rho(x, 0)=\rho_0$，$x>0$时是$\rho(x, 0)=\rho_1$. 分别考虑两种情况$\rho_0<\rho_1$和$\rho_1<\rho_0$. 试问哪一种情况对产生密度冲击波是必要的？请作出简要解释.

12.6.17 考虑一个交通问题，其中$u(\rho)=u_{\max}(1-\rho/\rho_{\max})$. 确定$\rho(x, t)$，其中

*(a)$\rho(x, 0)=\begin{cases}\dfrac{\rho_{\max}}{5} & x<0\\ \dfrac{3\rho_{\max}}{5} & x>0\end{cases}$　　(b)$\rho(x, 0)=\begin{cases}\dfrac{\rho_{\max}}{3} & x<0\\ \dfrac{2\rho_{\max}}{3} & x>0\end{cases}$

12.6.18 假定$u(\rho)=u_{\max}(1-\rho^2/\rho_{\max}^2)$. 确定交通密度$\rho(x, 0)(t>0)$，使得$x<0$时$\rho(x, 0)=\rho_1$，$x>0$时$\rho(x, 0)=\rho_2$.

(a)设$\rho_2>\rho_1$.　　*(b)设$\rho_2<\rho_1$.

12.6.19 求解下列问题(假设ρ守恒)：

(a)$\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\rho^2\dfrac{\partial\rho}{\partial x}=0$　　$\rho(x, 0)=\begin{cases}4 & x<0\\ 3 & x>0\end{cases}$

(b)$\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+4\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial x}=0$　　$\rho(x, 0)=\begin{cases}3 & x<1\\ 2 & x>1\end{cases}$

(c)$\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+3\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial x}=0$　　$\rho(x, 0)=\begin{cases}4 & x<0\\ 2 & 0<x<1\\ 1 & x>1\end{cases}$

(d)$\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+6\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial x}=0(x>0)$　　$\rho(x, 0)=2\quad x>0$
$\rho(0, t)=5\quad t>0$

12.6.20 在ρ^2守恒条件下，重做习题12.6.19.

12.6.21 比较习题12.6.19(a)和习题12.6.20(a)，证明冲击速度是不同的.

12.6.22 求解$\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\rho^2\dfrac{\partial\rho}{\partial x}=0$. 如果出现非均匀冲击，只要给出了其微分方程. 那么这个非均匀冲击能够持续呢，还是最终被均匀冲击所替代？

(a)$\rho(x, 0)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 3 & x>0\end{cases}$　　(b)$\rho(x, 0)=\begin{cases}-2 & x<0\\ 1 & x>0\end{cases}$

[584] (c)$\rho(x, 0)=\begin{cases}1 & x<0\\ -3 & x>0\end{cases}$　　(d)$\rho(x, 0)=\begin{cases}2 & x<0\\ -1 & x>0\end{cases}$

12.6.23 求解$\dfrac{\partial\rho}{\partial t}-\rho^2\dfrac{\partial\rho}{\partial x}=0$. 如果出现非均匀冲击，只要给出了其微分方程. 那么这个非均匀冲击能够持续呢，还是最终被均匀冲击所替代？

(a)$\rho(x, 0)=\begin{cases}-2 & x<0\\ 1 & x>0\end{cases}$　　(b)$\rho(x, 0)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 4 & x>0\end{cases}$

(c)$\rho(x, 0)=\begin{cases}1 & x<0\\ -3 & x>0\end{cases}$　　(d)$\rho(x, 0)=\begin{cases}5 & x<0\\ -2 & x>0\end{cases}$

12.7 一阶非线性偏微分方程

12.7.1 由波动方程推导出的短时距方程

为了简单起见，考虑二维波动方程

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2}\right). \tag{12.7.1}$$

在4.6节中分析了平面波及其反射. 拟平面波在许多情况下是存在的. 如果系数 c 不是常数但变化慢，那么经过几个波长后波看起来几乎就是常数 c 了. 然而，人们对变量 c 对(相对于短波长的)长距离的影响可能更感兴趣. 另一种是引起拟平面波的情形，它是平面波关于弯曲边界的反射(或者关于两种不同折射率介质的弯曲界面反射和折射). 假设边界的曲率半径比典型的波长大得多. 在大多数这种情况中时态频率 ω 是固定的(由一个入射平面波). 因此

$$E = A(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \tag{12.7.2}$$

其中 $A(x, y)$ 满足**亥姆霍兹方程**或者**简化波方程**:

$$-\omega^2 A = c^2\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right). \tag{12.7.3}$$

时态频率 ω 也是固定的(和给定的)，但对不均匀介质 $c = c(x, y)$，而对均匀介质 c 是常数. 在均匀介质(c = 常数)中，形式为 $E = A_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1x+k_2y-\omega t)}$ 或者

$$A = A_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1x+k_2y)} \tag{12.7.4}$$

的平面波存在，就要

$$\omega^2 = c^2(k_1^2 + k_2^2). \tag{12.7.5}$$

对拟平面波，引入简化波方程

$$A(x,y) = R(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}u(x,y)} \tag{12.7.6}$$

585

的相位 $u(x, y)$. 均匀介质的波数 k_1 和 k_2 通常分别称为 p 和 q，定义为

$$p = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{12.7.7}$$

$$q = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{12.7.8}$$

作为近似(可由扰动法导出)，可以证明：(慢变化)波数满足(12.7.5)，这对应与平面波相关的给定时态频率

$$\boxed{\omega^2 = c^2(p^2 + q^2).} \tag{12.7.9}$$

这是相位 $u(x, y)$ 的一阶非线性偏微分方程(不是拟线性的)，称为短时距方程:

$$\boxed{\frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,} \tag{12.7.10}$$

其中 ω 是固定的参考时态频率，在不均匀介质中 $c = c(x, y)$，在均匀介质中 c = 常数. 有时引入与 $1/c$ 成比例的折射率 $n(x, y)$. 振幅 $R(x, y)$ 满足描述拟平面波能量传播的运输方程(这里不讨论).

12.7.2 求解均匀介质中的短时距方程和反射波

短时距方程(12.7.10)最简单的例子出现在均匀介质(c = 常数)中:

$$\boxed{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2},} \tag{12.7.11}$$

其中 ω 和 c 是常数. 这里不直接求解 $u(x, y)$，可以证明先求解 $p = \frac{\partial u}{\partial x}$，$q = \frac{\partial u}{\partial y}$ 更容易些. 因而

考虑

$$p^2+q^2=\frac{\omega^2}{c^2}. \qquad (12.7.12)$$

对(12.7.11)或(12.7.12)关于 x 求偏导给出

586

$$p\frac{\partial p}{\partial x}+q\frac{\partial q}{\partial x}=0.$$

由$\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}$，$p$ 满足一阶拟线性偏微分方程

$$p\frac{\partial p}{\partial x}+q\frac{\partial p}{\partial y}=0. \qquad (12.7.13)$$

可以用特征线法[参看(12.6.7)]求解方程(12.7.13)：

$$\frac{\mathrm{d}x}{p}=\frac{\mathrm{d}y}{q}=\frac{\mathrm{d}p}{0}. \qquad (12.7.14)$$

如果由 p 的边界条件，那么由 $q=\pm\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-p^2}$[根据(12.7.12)]可以求解 p. (12.7.14)表明沿着每条特征线 p 都是常数，并且每条特征线都是直线. 这样就可以确定 p. 然而，给定 $p=\frac{\partial u}{\partial x}$，对 u 积分并不完全是直截了当的.

已经对短时距方程关于 x 求了偏导数. 如果对 y 求偏导数，就得到

$$p\frac{\partial p}{\partial y}+q\frac{\partial q}{\partial y}=0.$$

再次利用$\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}$可以导出 q 的一阶拟线性偏微分方程：

$$p\frac{\partial q}{\partial x}+q\frac{\partial q}{\partial y}=0. \qquad (12.7.15)$$

从而$\frac{\mathrm{d}x}{p}=\frac{\mathrm{d}y}{q}=\frac{\mathrm{d}q}{0}$，与(12.7.14)结合可给出更一般的结果：

$$\frac{\mathrm{d}x}{p}=\frac{\mathrm{d}y}{q}=\frac{\mathrm{d}p}{0}=\frac{\mathrm{d}q}{0}. \qquad (12.7.16)$$

然而，通常要确定的是 u，这就要确定 u 沿着特征线是如何变化的：$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y=p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y=p^2\frac{\mathrm{d}x}{p}+q^2\frac{\mathrm{d}y}{q}=(p^2+q^2)\frac{\mathrm{d}x}{p}=\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\mathrm{d}x}{p}$，这里用到了(12.7.16)和(12.7.12). 因此，对于短时距方程有

$$\frac{\mathrm{d}x}{p}=\frac{\mathrm{d}y}{q}=\frac{\mathrm{d}p}{0}=\frac{\mathrm{d}q}{0}=\frac{\mathrm{d}u}{\omega^2/c^2}. \qquad (12.7.17)$$

因为 p 和 q 沿着特征线是常数，所以特征线是直线.

反射波. 考虑基本的入射波 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_I\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$，其中 $\boldsymbol{k}_I$ 是给定的常入射波数向量，$\omega=c|\boldsymbol{k}_I|$. 假定平面波在弯曲边界上反射(见图 12.7.1)，用参数 τ 表示为 $x=x_0(\tau)$，$y=y_0(\tau)$. 引入未知反射波 $R(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}u(x,y)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，要确定反射波的相位$u(x,y)$. 短时距方程

$$p^2+q^2=\frac{\omega^2}{c^2}=|k_I|^2$$

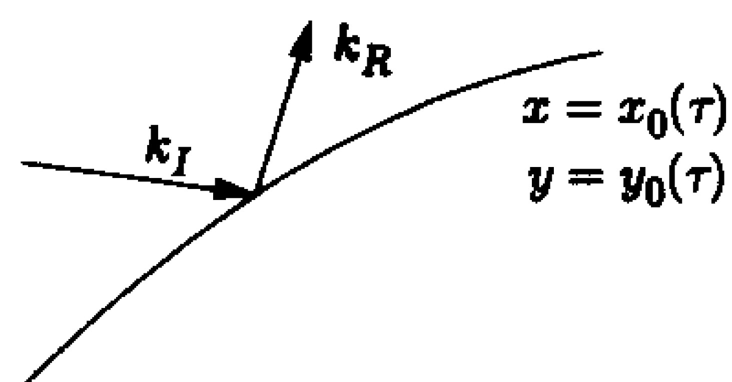


图 12.7.1 关于弯曲边界的反射波

587

可以解释为慢变化反射波数向量(p, q)与常入射波数向量有相同长度(物理上慢变化入射波与入射波总有相同的波长). 假设在弯曲边界上的边界条件是全场为零(其他边界条件给出同样的相位方程): $0=e^{i(k_I\cdot x-\omega t)}+R(x, y)e^{iu(x,y)}e^{-i\omega t}$. 因此, 在边界上入射波的相位和反射波的相位必须是相同的:

$$u(x_0,y_0)=k_I\cdot x_0, \tag{12.7.18}$$

对(12.7.18)关于参数τ求导数表明

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx_0}{d\tau}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy_0}{d\tau}=p\frac{dx_0}{d\tau}+q\frac{dy_0}{d\tau}=k_R\cdot\frac{dx_0}{d\tau}=k_I\cdot\frac{dx_0}{d\tau}, \tag{12.7.19}$$

注意: 向量(p, q)是未知反射波数向量k_R(因为p和q沿着特征线是常数). 因为$\frac{dx_0}{d\tau}$是边界的切向量, 所以(12.7.19)表明入射波和反射波的切分量一定相同. 由于入射波和反射波波数向量的长度相同, 反射波的法分量一定等于入射波法分量的负值. 因而, 弯曲边界的反射角是等于入射角的. 这样, 在边界上p和q对反射波的常值就知道了. 因为$q=\pm\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-p^2}$, 所以短时距方程有两个解; 一个表示入射波, 另一个(所感兴趣的)表示反射波. 要得到反射波的相位, 就必须求解满足边界条件(12.7.18)的短时距方程的特征方程(12.7.17). 由于在均匀介质中$\frac{\omega^2}{c^2}=|k_I|^2$是常数, 所以$u$沿着特征线的微分方程$\frac{du}{dx}=\frac{\omega^2}{c^2}\frac{1}{\rho}=\frac{|k_I|^2}{p}$可以根据边界条件沿指定特征线积分(注意$p$是常数), 得到

$$u(x,y)=\frac{|k_I|^2}{p}(x-x_0)+k_I\cdot x_0,$$

特征线方程$p(y-y_0)=q(x-x_0)$对应了反射角等于入射角. 由$p^2+q^2=|k_I|^2$知, 沿着指定特征线可得到相位更漂亮的表达式(短时距方程的解):

$$u(x,y)=p(x-x_0)+q(y-y_0)+k_I\cdot x_0, \tag{12.7.20}$$

588

其中$u(x_0, y_0)=k_I\cdot x_0$是入射波在边界上的相位.

波前. 特征方向是光传播的方向. 对于短时距方程, 由(12.7.14), $\frac{dx}{p}=\frac{dy}{q}$. 这对非均匀介质也是有效的. 由$\nabla u=\frac{\partial u}{\partial x}i+\frac{\partial u}{\partial y}j=pi+qj=\frac{p}{dx}(dxi+dyj)$可知, 光(按特征线方向)沿相位梯度方向$\nabla u$传播. 因此, 光线传播与波前正交.

12.7.3 一阶非线性偏微分方程

任意一个一阶非线性偏微分方程可以写成形式

$$\boxed{F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0.} \tag{12.7.21}$$

与前一小节的短时距方程例子一样，可以证明 $p=\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $q=\frac{\partial u}{\partial y}$ 满足拟线性偏微分方程，因而可以用特征线法求解(12.7.21). 用 p 和 q 的记号给出

$$F(x,y,u,p,q)=0. \tag{12.7.22}$$

对(12.7.22)关于 x 求偏导数，得到

$$F_x+F_u p+F_p\frac{\partial p}{\partial x}+F_q\frac{\partial q}{\partial x}=0,$$

这里用下标记号表示偏导数. 例如，$F_u\equiv\frac{\partial F}{\partial u}$，其中保持 x，y，p，q 不变. 由 $\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}$ 得到 p 的拟线性偏微分方程

$$F_p\frac{\partial p}{\partial x}+F_q\frac{\partial p}{\partial y}=-F_x-F_u p.$$

这样，对 p 用特征线法得到

$$\frac{dx}{F_p}=\frac{dy}{F_q}=\frac{dp}{-F_x-F_u p}. \tag{12.7.23}$$

类似地，对(12.7.22)关于 y 求偏导数，得到

$$F_y+F_u q+F_p\frac{\partial p}{\partial y}+F_q\frac{\partial q}{\partial y}=0.$$

其中 $\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}$ 给出 q 的拟线性偏微分方程：

589

$$F_p\frac{\partial q}{\partial x}+F_q\frac{\partial q}{\partial y}=-F_y-F_u q.$$

特征方向与(12.7.23)中的相同，因此补充(12.7.23)得到

$$\frac{dx}{F_p}=\frac{dy}{F_q}=\frac{dp}{-F_x-F_u p}=\frac{dq}{-F_y-F_u q}. \tag{12.7.24}$$

为了求解 u，需要得到 $u(x,y)$ 沿特征线的微分方程

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=p\,dx+q\,dy=pF_p\frac{dx}{F_p}+qF_q\frac{dy}{F_q}=(pF_p+qF_q)\frac{dx}{F_p}.$$

求解 p，q，u 的完整方程组是

$$\boxed{\frac{dx}{F_p}=\frac{dy}{F_q}=\frac{dp}{-F_x-F_u p}=\frac{dq}{-F_y-F_u q}=\frac{du}{pF_p+qF_q}.} \tag{12.7.25}$$

习题 12.7

12.7.1 证明：在非均匀介质中，光线总是按垂直于波前的方向传播.

12.7.2 对于均匀介质中标准化的短时距方程 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=1$.

(a)导出 q 的偏微分方程，不要用(12.7.25).

(b)用特征线法求解 q，假设 q 在 $y=0$ 处是给定的.

590

(c)证明该结果与使用(12.7.25)的结果相同.

第 13 章 偏微分方程的拉普拉斯变换解法

13.1 引言

前几章已经介绍了几种求解线性偏微分方程的方法. 对简单区域上的问题, 分离变量法启示使用傅里叶级数, 它的各种推广, 或各种形式的傅里叶变换. 其中最重要的是边界条件的类型, 包括领域是否有限、无限或半无限. 在有些问题中还可以利用格林函数, 而对一维的波动方程有特征线法. 无论这些方法是否适用, 数值法常常是最有效的(见第 6 章).

而本章介绍的另一种方法则依赖于拉普拉斯变换. 大多数偏微分方程中能够用拉普拉斯变换分析的问题, 也可以用前面所讲过的某种方法分析, 并且能得到大体上等价的结果. 因此对拉普拉斯变换的使用受到了这一方法专家们的推崇. 为了方法上的全面, 这里介绍了拉普拉斯变换的基本内容, 以便读者对拉普拉斯变换有所了解. 不过, 关于拉普拉斯变换在偏微分方程中的应用已经有了一些专门的书[⊖], 所以这章只简要讨论一下拉普拉斯变换和给出几个例子说明其在偏微分方程中的应用.

591

13.2 拉普拉斯变换的性质

13.2.1 概述

定义. 求解(常系数)常微分方程的一个方法是引入 $f(t)$ 拉普拉斯变换, 其定义如下:

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t.} \tag{13.2.1}$$

为了使拉普拉斯变换有定义, (13.2.1)中的积分必须收敛. 对许多函数 $f(t)$, s 是受限制的. 比如, 如果在 $t\to\infty$ 时, $f(t)$ 趋于非零常数, 那么积分仅对 $s>0$ 才收敛; 如果 s 是复的, $s=\mathrm{Re}(s)+\mathrm{i}\mathrm{Im}(s)$ 和 $\mathrm{e}^{-st}=\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(s)t}[\cos(\mathrm{Im}(s)t)-\mathrm{i}\sin(\mathrm{Im}(s)t)]$, 此时要收敛就需要 $\mathrm{Re}(s)>0$.

这里假设读者已经(至少简要地)学过拉普拉斯变换. 下面迅速地复习一下拉普拉斯变换的重要性质. 已有不少拉普拉斯变换用表[⊜], 本书给出的是简表. 初等函数的拉普拉斯变换可以直接积分得到, 一些基本的性质也可由定义推导出来, 这些内容都总结在表 13.2.1 中.

由拉普拉斯变换定义, 只需要 $f(t)$ 在 $t>0$ 上的值. 通常定义对 $t<0$, $f(t)=0$ 不会引起混淆. 公式(13.2.21)要用到赫维赛德单位阶梯函数

$$H(t-b)=\begin{cases}0 & t<b\\ 1 & t>b.\end{cases} \tag{13.2.2}$$

⊖ 例如 Churchill[1972].

⊜ 比较好的有 Churchill[1972]; CRC 标准数学用表[2002](来自 Churchill 用表); Abramowitz and Stegun[1974](也有 Churchill 用表); 以及 Roberts and Kaufman[1966].

表 13.2.1 拉普拉斯变换(公式和性质简表)

	$f(t)$	$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]\equiv\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$	
初等函数(习题 13.2.1 和习题 13.2.2)	1	$\dfrac{1}{s}$	(13.2.2a)
	$t^n(n>-1)$	$n!\,s^{-(n+1)}$	(13.2.2b)
	e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	(13.2.2c)
	$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	(13.2.2d)
	$\cos\omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	(13.2.2e)
	$\sinh at=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{at}-\mathrm{e}^{-at})$	$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s-a}-\dfrac{1}{s+a}\right)=\dfrac{a}{s^2-a^2}$	(13.2.2f)
	$\cosh at=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{at}+\mathrm{e}^{-at})$	$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s-a}+\dfrac{1}{s+a}\right)=\dfrac{s}{s^2-a^2}$	(13.2.2g)
基本性质(13.2.3 节和习题 13.2.3)	$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$	$sF(s)-f(0)$	(13.2.2h)
	$\dfrac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}t^2}$	$s^2F(s)-sf(0)-\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(0)$	(13.2.2i)
	$-tf(t)$	$\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}$	(13.2.2j)
	$\mathrm{e}^{at}f(t)$	$F(s-a)$	(13.2.2k)
	$H(t-b)f(t-b)$	$\mathrm{e}^{-bs}F(s)\,(b>0)$	(13.2.2l)
卷积(13.2.4 节)	$\int_0^t f(t-\bar{t})g(\bar{t})\mathrm{d}\bar{t}$	$F(s)G(s)$	(13.2.2m)
狄拉克 δ 函数(13.2.4 节)	$\delta(t-b)$	$\mathrm{e}^{-bs}\,(b\geqslant 0)$	(13.2.2n)
逆变换(13.7 节)	$\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$	$F(s)$	(13.2.2o)
其他(习题 13.2.9)	$t^{-1/2}\mathrm{e}^{-a^2/4t}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{s}}\mathrm{e}^{-a\sqrt{s}}\,(a\geqslant 0)$	(13.2.2p)
	$t^{-3/2}\mathrm{e}^{-a^2/4t}$	$\dfrac{2\sqrt{\pi}}{a}\mathrm{e}^{-a\sqrt{s}}\,(a>0)$	(13.2.2q)

拉普拉斯逆变换. 如果已知 $F(s)$ 而要计算 $f(t)$，可以利用同一个表. $f(t)$ 叫做 $F(s)$ 的拉普拉斯逆变换，也可用记号 $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$. 例如：由表(13.2.1)知道 $1/(s-3)$ 的拉普拉斯逆变换是 e^{3t}，$\mathcal{L}^{-1}[1/(s-3)]=\mathrm{e}^{3t}$.

并不是 s 的所有函数都有拉普拉斯逆变换的. 由(13.2.1)注意到如果函数 $f(t)$ 为普通类型的函数，则当 $s\to\infty$ 时有 $F(s)\to 0$. 列表中的所有函数都具有此性质.

13.2.2 拉普拉斯变换的奇点

注意：当 $f(t)$ 是简单指数函数 $f(t)=\mathrm{e}^{at}$ 时，增长率 a 也是 $f(t)$ 的拉普拉斯变换 $F(s)=1/(s-a)$ 的奇点，当 $s\to a$ 时，拉普拉斯变换趋近 ∞. 一般地，拉普拉斯变换 $F(s)$ 的奇点(其分母的零点)对应于(某种方式) $f(t)$ 的指数增长率，称为拉普拉斯变换奇点性质. 后面要用复变量证明这一点，贯穿这一章的内容就是要展示这个对应.

例. 简单讨论几个例子. 拉普拉斯变换 $\omega/(s^2+\omega^2)$ 和 $s/(s^2+\omega^2)$ 都在 $s^2+\omega^2=0$ 或者 $s=\pm i\omega$ 有奇点，所以其拉普拉斯逆变换含有指数函数 e^{st}，其中 $s=\pm i\omega$. 由表 13.2.1 可知，其拉普拉斯逆变换分别是 $\sin\omega t$ 和 $\cos\omega t$，由欧拉公式知道它们能表示为 $e^{\pm i\omega t}$ 的线性组合.

另一个例子，考虑拉普拉斯变换 $F(s)=3/[s(s^2+4)]$，确定 $f(t)$ 的一个方法就是使用部分分式(具有实因子)：

592~593

$$\frac{3}{s(s^2+4)}=\frac{a}{s}+\frac{bs+c}{s^2+4}=\frac{3/4}{s}+\frac{-(3/4)s}{s^2+4}.$$

利用表容易得到逆变换

$$f(t)=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\cos 2t.$$

经检查，$F(s)$ 有奇点 $s=0$ 和 $s=\pm 2i$. 拉普拉斯变换的奇点性质给出其逆变换必是 e^{0t} 和 $e^{\pm 2it}$ 的一个线性组合，正如在上式中所看到的那样.

部分分式. 在求拉普拉斯逆变换时，常碰到两个多项式的比 $q(s)/p(s)$. 当 $s\to\infty$ 时，拉普拉斯变换一定趋近 0. 这样可以假定 $p(s)$ 的次数比 $q(s)$ 的次数高. 部分分式展开直接就给出想要的拉普拉斯逆变换. 这里只讨论分母只有单根的情况，没有重根. 先因式分解分母：

$$p(s)=\alpha(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n),$$

其中 s_1，…，s_n 是 $p(s)$ 的 n 个不同的根，也叫 $q(s)/p(s)$ 的简单极点. $q(s)/p(s)$ 的部分分式展开是

$$\frac{q(s)}{p(s)}=\frac{c_1}{s-s_1}+\frac{c_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{c_n}{s-s_n}. \tag{13.2.3}$$

部分分式展开的系数 c_i 可以通过繁琐的通分代数运算确定. 一个更漂亮和有时更快的方法是利用 $p(s)$ 的奇点 s_i. 为了确定 c_i，先用 $s-s_i$ 乘以(13.2.3)，再取 $s\to s_i$ 时的极限，除 c_i 外的项都为零：

$$\boxed{c_i=\lim_{s\to s_i}\frac{(s-s_i)q(s)}{p(s)}.} \tag{13.2.4}$$

这个极限通常是很容易计算的，因为 $s-s_i$ 为 $p(s)$ 的因式，所以先在(13.2.4)中消去它然后再算极限.

例. 利用复根

$$\frac{3}{s(s^2+4)}=\frac{c_1}{s}+\frac{c_2}{s+2i}+\frac{c_3}{s-2i},$$

其中

$$c_1=\lim_{s\to 0}s\frac{3}{s(s^2+4)}=\frac{3}{4}$$

$$c_2=\lim_{s\to -2i}(s+2i)\frac{3}{s(s^2+4)}=\lim_{s\to -2i}(s+2i)\frac{3}{s(s+2i)(s-2i)}=-\frac{3}{8}$$

$$c_3=\lim_{s\to 2i}(s-2i)\frac{3}{s(s^2+4)}=\lim_{s\to 2i}(s-2i)\frac{3}{s(s+2i)(s-2i)}=-\frac{3}{8}.$$

594

简单极点. 在有些问题中，可以把计算弄得更简单些. 因为 $p(s_i)=0$($s=s_i$ 为 $p(s)$ 的一个根)，(13.2.4)中的极限为 0/0 型. 而计算 0/0 型极限洛必达法则给出：

$$\boxed{c_i = \lim_{s \to s_i} \frac{d/ds[(s - s_i)q(s)]}{d/ds\, p(s)} = \frac{q(s_i)}{p'(s_i)}.} \tag{13.2.5}$$

(13.2.5)只对简单极点有效.

一旦有了拉普拉斯变换的部分分式展开，它的逆变换就容易得到了. 总之，如果

$$\boxed{F(s) = \frac{q(s)}{p(s)},} \tag{13.2.6}$$

则由对(13.2.3)求逆变换，得到

$$\boxed{f(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q(s_i)}{p'(s_i)} e^{s_i t},} \tag{13.2.7}$$

其中假设 $p(s)$ 在 $s = s_i$ 只有简单极点.

例. 要应用公式于 $q(s)/p(s) = 3/[s(s^2+4)]$，取 $q(s) = 3$，$p(s) = s(s^2+4)$，有 $p'(s) = 3s^2+4$. 这样如果

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+4)} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+2i} + \frac{c_3}{s-2i},$$

则

$$c_1 = \frac{q(0)}{p'(0)} = \frac{3}{4}, \quad c_2 = \frac{q(-2i)}{p'(-2i)} = \frac{3}{-8}, \quad c_3 = \frac{q(2i)}{p'(2i)} = -\frac{3}{8},$$

对于这个例子

$$f(t) = \frac{3}{4} - \frac{3}{8}e^{-2it} - \frac{3}{8}e^{2it} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\cos 2t.$$

二次式(完全平方). 二次式的拉普拉斯逆变换

595

$$F(s) = \frac{\alpha s + \beta}{as^2 + bs + c},$$

如果根都是实的或复的，可由部分分式得到. 当根是复的时，完全平方通常更容易，例如，考虑

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 8} = \frac{1}{(s+1)^2 + 7},$$

它的根是 $s = -1 \pm i\sqrt{7}$. 由于出现了 $s+1$ 的函数，由移位定理，$\Lambda^{-1}[G(s+a)](t) = \Lambda^{-1}[G(s)](t)e^{at}$：

$$F(s) = G(s+1), \quad 其中 \quad G(s) = \frac{1}{s^2+7}.$$

根据移位定理 $G(s+1)$ 的拉普拉斯逆变换(利用 $a = -1$)是 $f(t) = e^{-t}g(t)$，其中 $g(t)$ 是 $1/(s^2+7)$ 的逆变换. 由表 13.2.1 得到 $g(t) = (1/\sqrt{7})\sin(\sqrt{7}t)$，所以

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{7}} e^{-t} \sin \sqrt{7} t.$$

这个结果与奇点性质一致，其解是 e^{st} 的线性组合，其中 $s = -1 \pm i\sqrt{7}$.

13.2.3 导数的变换

拉普拉斯变换最有用的性质之一是它对导数的作用．例如，由基本的分部积分

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right]} = \int_0^\infty \frac{df}{dt}e^{-st}dt = fe^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty fe^{-st}dt \boxed{= sF(s) - f(0).} \quad (13.2.8)$$

类似地

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right]} = s\,\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] - \frac{df}{dt}(0) = s(sF(s) - f(0)) - \frac{df}{dt}(0) \boxed{= s^2F(s) - sf(0) - \frac{df}{dt}(0).} \quad (13.2.9)$$

这个性质表明导数的变换可以通过函数变换来计算．某些"初始"条件是需要的．对一阶导数 df/dt 的变换，需要 $f(0)$；对二阶导数 d^2f/dt^2，需要 $f(0)$ 和 $df/dt(0)$．如果变量 t 是时间，这些正是已知的信息．一般在应用拉普拉斯变换时，自变量 t 是时间．另外，如果初始条件都是零，拉普拉斯变换方法常常就简化了．

596

对常微分方程的应用．对常微分方程，拉普拉斯变换将问题简化为代数方程．例如，考虑

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 3 \\ \text{满足} \quad &y(0) = 1 \\ &\frac{dy}{dt}(0) = 5. \end{aligned}}$$

对微分方程做拉普拉斯变换给出

$$s^2Y(s) - s - 5 + 4Y(s) = \frac{3}{s},$$

其中 $Y(s)$ 为 $y(t)$ 的拉普拉斯变换．这样

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+4}\left(\frac{3}{s} + s + 5\right) = \frac{3}{s(s^2+4)} + \frac{s}{s^2+4} + \frac{5}{s^2+4}.$$

$s/(s^2+4)$ 和 $5/(s^2+4)$ 的拉普拉斯逆变换可从表中容易找到，而变换为 $3/[s(s^2+4)]$ 的函数已经用其他方式得到了．因此

$$y(t) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\cos 2t + \cos 2t + \frac{5}{2}\sin 2t.$$

13.2.4 卷积定理

得到 $3/[s(s^2+4)]$ 拉普拉斯逆变换的另一个方法是利用卷积定理．先给出和推导卷积定理．如同这个例子，通常需要得到这样的函数，其拉普拉斯变换为两个变换乘积 $F(s)G(s)$．那么卷积定理是

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = g*f = \int_0^t g(\bar{t})f(t-\bar{t})d\bar{t},} \quad (13.2.10)$$

其中 $g*f$ 叫做函数 g 和 f 的卷积，$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ 而 $g(t)=\mathcal{L}^{-1}[G(s)]$．等价地，卷积定理为

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^t g(\bar{t})f(t-\bar{t})d\bar{t}\right] = F(s)G(s).} \quad (13.2.11)$$

设$t-\bar{t}=\omega$，就得到$g*f=f*g$，即次序不重要. 在前面研究傅里叶变换时(参看10.4节)，597 也引入了有些不同的函数g和f的卷积

$$g*f\equiv\int_{-\infty}^{\infty}f(t-\bar{t})g(\bar{t})\mathrm{d}\,\bar{t}.$$

不过，在讨论拉普拉斯变换时，函数g和f在$t<0$时都为0，这样，$\bar{t}>t$时$f(t-\bar{t})=0$；而$\bar{t}<0$时，$g(\bar{t})=0$因此就给出了(13.2.10).

狄拉克δ函数的拉普拉斯变换. 卷积定理的一个证法是利用狄拉克δ函数的拉普拉斯变换

$$\boxed{\mathcal{L}[\delta(t-b)]=\int_0^{\infty}\delta(t-b)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-sb},}\tag{13.2.12}$$

其中$b>0$. 这样，指数函数的拉普拉斯逆变换是一个狄拉克δ函数：

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-sb}]=\delta(t-b).}\tag{13.2.13}$$

取$b\to0$的极限，就得到

$$\mathcal{L}[\delta(t-0_+)]=1\quad\text{和}\quad\mathcal{L}^{-1}[1]=\delta(t-0_+).\tag{13.2.14}$$

卷积定理的推导. 要推导卷积定理，引入两个变换$F(s)$和$G(s)$及其乘积$F(s)G(s)$：

$$F(s)=\int_0^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\tag{13.2.15}$$

$$G(s)=\int_0^{\infty}g(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\tag{13.2.16}$$

$$F(s)G(s)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}f(\bar{t})g(T)\mathrm{e}^{-s(\bar{t}+T)}\mathrm{d}T\mathrm{d}\,\bar{t}.\tag{13.2.17}$$

设$h(t)$为$F(s)G(s)$的拉普拉斯逆变换：

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)]=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}f(\bar{t})g(T)\,\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-s(\bar{t}+T)}]\mathrm{d}\,\bar{t}\mathrm{d}T,$$

其中用到了拉普拉斯逆变换的线性性质. 由(13.2.13)，指数函数的拉普拉斯逆变换是一个狄拉克δ函数，这样

$$h(t)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}f(\bar{t})g(T)\delta[t-(\bar{t}+T)]\mathrm{d}\,\bar{t}\mathrm{d}T.$$

先对T积分，得到仅在$T=t-\bar{t}$的基值. 因此，狄拉克δ函数的基本性质给出了拉普拉斯变换的卷积定理

598

$$h(t)=\int_0^{t}f(\bar{t})g(t-\bar{t})\mathrm{d}\,\bar{t}.$$

例. 用卷积定理确定拉普拉斯变换是$3/[s(s^2+4)]$的函数. 记

$$F(s)=\frac{3}{s}[\text{所以}\,f(t)=3\,]\quad\text{和}\quad G(s)=\frac{1}{s^2+4}[\text{所以}\,g(t)=\frac{1}{2}\sin2t].$$

由卷积定理可知，$(3/s)[1/(s^2+4)]$的拉普拉斯逆变换是$\int_0^t f(t-\bar{t})g(\bar{t})\mathrm{d}\,\bar{t}$：

$$\int_0^t3\cdot\frac{1}{2}\sin2\,\bar{t}\mathrm{d}\,\bar{t}=-\frac{3}{4}\cos2\,\bar{t}\,\Big|_0^t=\frac{3}{4}(1-\cos2t),$$

与前面用部分分式得到的结果一样.

习题 13.2

13.2.1 从拉普拉斯变换的定义(即直接积分)确定$f(t)$的拉普拉斯变换:

(a)1　(b)e^{at}

(c)$\sin\omega t$[提示:$\sin\omega t=\mathrm{Im}(e^{i\omega t})$.]　(d)$\cos\omega t$[提示:$\cos\omega t=\mathrm{Re}(e^{i\omega t})$.]

(e)$\sinh at$　(f)$\cosh at$

(g)$H(t-t_0)$, $t_0>0$

13.2.2 习题 10.3.14 定义了伽马函数$\Gamma(x)$. 证明:当$n>-1$时,$\mathcal{L}[t^n]=\Gamma(n+1)/s^{n+1}$. 并解释为什么当$n\leq-1$时它不成立?

13.2.3 请推导拉普拉斯变换的下列基本性质:

(a)$\mathcal{L}[-tf(t)]=\mathrm{d}F/\mathrm{d}s$

(b)$\mathcal{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a)$

(c)$\mathcal{L}[H(t-b)f(t-b)]=e^{-bs}F(s)(b>0)$

*13.2.4 利用表 13.2.1,用$F(s)$表达$\int_0^t f(\bar{t})\,\mathrm{d}\bar{t}$的拉普拉斯变换.

13.2.5 利用表 13.2.1,确定下列函数$f(t)$的拉普拉斯变换:

(a)t^3e^{-2t}　*(b)$t\sin 4t$　(c)$H(t-3)$

*(d)$e^{3t}\sin 4t$　(e)$te^{-4t}\cos 6t$　*(f)$f(t)=\begin{cases}0 & t<5\\ t^2 & 5<t<8\\ 0 & 8<t\end{cases}$

(g)$t^2H(t-1)$　*(h)$(t-1)^4H(t-1)$

599

13.2.6 利用表 13.2.1,确定下列函数$F(s)$的拉普拉斯逆变换:

(a)$\dfrac{1}{s^2+4}$　(b)$\dfrac{e^{-3s}}{s^2-4}$　(c)s^{-3}

(d)$(s-4)^{-7}$　*(e)$\dfrac{s}{s^2+8s+7}$　(f)$\dfrac{2s+1}{s^2-4s+9}$

(g)$\dfrac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}$　(h)$\dfrac{s}{s^2-4s-5}$　(i)$\dfrac{s}{s^2-4s-5}(1-4e^{-7s})$

*(j)$\dfrac{s+2}{s(s^2+9)}(1-5e^{-4s})$　(k)$\dfrac{1}{(s+1)^2}$　(l)$\dfrac{1}{(s^2+1)^2}$

13.2.7 利用拉普拉斯变换求解下列常微分方程:

(a)$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+3\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=t^3$,满足$y(0)=7$和$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0)=5$

*(b)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=1$,满足$y(0)=2$

(c)$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+3y=\begin{cases}4e^{-t} & t<8\\ 2 & t>8\end{cases}$,满足$y(0)=1$

*(d)$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+5\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-6y=\begin{cases}0 & 0<t<3\\ e^{-t} & t>3\end{cases}$,满足$y(0)=3$和$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0)=7$

(e)$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+y=\cos t$,满足$y(0)=0$和$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0)=0$

*(f)$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+4y=\sin t$,满足$y(0)=0$和$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0)=0$

13.2.8 不用狄拉克δ函数,推导拉普拉斯变换的卷积定理(提示:在计算二重积分(13.2.17)时引入变量$z=\bar{t}+T$).

13.2.9 在本题中，要确定

$$I=\mathcal{L}\{t^{-3/2}e^{-a^2/4t}\} \quad 和 \quad J=\mathcal{L}\{t^{-1/2}e^{-a^2/4t}\}.$$

(a)把 $u=s^{1/2}t^{1/2}-(a/2)t^{-1/2}$ 代入 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}$ 中，确定出 I 和 J 之间的关系.

(b)在 I 中做变换 $s\omega=(a^2/4)t^{-1}$，确定出 I 和 J 之间的关系.

600

(c)利用(a)和(b)，推导出 $I=(2\sqrt{\pi}/a)e^{-a\sqrt{s}}$ 和 $J=(\sqrt{\pi/s})e^{-a\sqrt{s}}$.

13.3 常微分方程初值问题的格林函数

卷积定理对求解非齐次的常微分方程是很有用处的. 例如考虑

$$\alpha\frac{d^2y}{dt^2}+\beta\frac{dy}{dt}+\gamma y=f(t), \tag{13.3.1}$$

满足零[⊖]初始条件

$$y(0)=0 \tag{13.3.2}$$

$$\frac{dy}{dt}(0)=0. \tag{13.3.3}$$

对微分方程(13.3.1)作拉普拉斯变换给出

$$(\alpha s^2+\beta s+\gamma)Y(s)=F(s) \quad 或 \quad Y(s)=F(s).\frac{1}{\alpha s^2+\beta s+\gamma}, \tag{13.3.4}$$

其中 $Y(s)$ 和 $F(s)$ 分别为 $y(t)$ 与 $f(t)$ 的拉普拉斯变换. 利用卷积定理可以得到微分方程的解 $y(t)$：

$$y(t)=\int_0^t f(t_0)q(t-t_0)dt_0, \tag{13.3.5}$$

其中函数 $q(t)$ 为 $1/(\alpha s^2+\beta s+\gamma)$ 的拉普拉斯逆变换. $q(t)$ 可以通过表或部分分式得到. 这个结果(13.3.5)与在初等常微分方程教科书中用参数变易法所得到的非齐次问题结果等价.

对这个结果还有另一个重要解释. 如果 $F(s)=1$，$q(t)$ 就是(13.3.1)的解. 而 $F(s)=1$ 的拉普拉斯逆变换是 $f(t)=\delta(t-0+)$(见(13.2.14)). 这样 $q(t)$ 对 $t=0+$ 处冲激的响应：

$$\alpha\frac{d^2q}{dt^2}+\beta\frac{dq}{dt}+\gamma q=\delta(t-0_+)$$

$$q(0)=0 \tag{13.3.6}$$

$$\frac{dq}{dt}(0)=0.$$

用第9章和第11章的术语，$q(t)$ 是*初值问题的格林函数*，是对 $t=0$ 处集中源在 t 时的响应：

$$q(t)=G(t,0).$$

卷积定理表明所感兴趣的是 $q(t-t_0)$：

601

$$q(t-t_0)=G(t-t_0,0).$$

然而，由于(13.3.6)时的常系数，*在 t 时刻对 t_0 时刻冲激的响应*，$G(t,t_0)$ 与对0时刻冲激的响应是相同的，如果流逝时间是一样的，即

$$G(t,t_0)=G(t-t_0,0), \tag{13.3.7}$$

这是格林函数的平移性质. 因而

⊖ 非零初值条件可以通过加上微分方程的适当齐次解来讨论.

$$q(t-t_0) = G(t,t_0).$$

因此，由(13.3.5)，通过使用拉普拉斯变换，得到了非齐次初值问题(13.3.1)～(13.3.3)的解含格林函数的表达式

$$\boxed{y(t) = \int_0^t f(t_0)G(t,t_0)\,\mathrm{d}t_0.} \tag{13.3.8}$$

这个解是所有在时刻 t 之前作用的源的广义叠加，这是常微分方程初值问题因果性原理的一个例子. 这种形式的结果与关于常微分方程和偏微分方程边界问题格林函数的结果非常相似. 在这里格林函数 $h(t)=G(t,0)$ 就是 $1/(\alpha s^2+\beta s+\gamma)$ 的拉普拉斯逆变换.

例. 考虑微分方程

$$\alpha^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\gamma^2 y = f(t). \tag{13.3.9}$$

其满足零初值条件的解是

$$y(t) = \int_0^t f(t_0)G(t,t_0)\,\mathrm{d}t_0,$$

其中格林函数 $G(t, t_0)$ 满足 $q(t-t_0)=G(t, t_0)$. 引入 $q(t)$ 的拉普拉斯变换：

$$\mathcal{L}[q(t)] = \frac{1}{\alpha^2 s^2-\gamma^2} = \frac{1}{\alpha^2(s^2-\gamma^2/\alpha^2)}.$$

直接由表可以得到格林函数 $G(t, 0)$,

$$G(t,0) = q(t) = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\alpha}{\gamma}\sinh\frac{\gamma}{\alpha}t.$$

因此，(13.3.9)的解是

$$y(t) = \frac{1}{\alpha\gamma}\int_0^t f(t_0)\sinh\frac{\gamma}{\alpha}(t-t_0)\,\mathrm{d}t_0, \tag{13.3.10}$$

其中 $y(0)=0$ 和 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t(0)=0$.

602

习题 13.3

13.3.1 通过拉普拉斯变换，用格林函数确定初值条件对初值问题

$$\alpha\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\beta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\gamma y = 0$$

的影响，其中初值条件是 $y(0)=y_0$ 和 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t(0)=v_0$.

*13.3.2 求下列问题的格林函数：

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+y = f(t),$$

其中初值条件是 $y(0)=0$ 且 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t(0)=0$. 并求解 $y(t)$.

13.3.3 (a)请做习题 9.3.25(a). (b)请做习题 9.3.25(b).

13.3.4 证明：当 $t>t_0$ 时，由(13.3.1)～(13.3.3)确定的 $G(t, t_0)$ 满足

$$\alpha\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}t^2}+\beta\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}+\gamma G = 0$$

和 $G(t_0, t_0)=0$ 及 $\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}(t_0, t_0)=\frac{1}{\alpha}$.

13.3.5 用习题 13.3.4 求解习题 13.3.2.

13.4 波动方程的信号问题

用拉普拉斯变换求解偏微分方程往往需要很多技巧. 这里只给出一些相对简单的例子[⊖]. 考虑半无穷弦($x>0$), 其运动仅是由在 $x=0$ 的与时间有关的边界条件引起的:

$$\text{PDE:}\ \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \tag{13.4.1}$$

603

$$\text{BC:}\ \boxed{u(0,t) = f(t)} \tag{13.4.2}$$

$$\text{IC:}\ \boxed{\begin{aligned} u(x,0) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= 0. \end{aligned}} \tag{13.4.3}$$

这条弦初始是水平的和静止的. 其左端垂直运动(同时保持大张力). 因为该问题是对所有 $x>0$ 定义, 所以需要有 $x\to\infty$ 时的边界条件:

$$\lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0. \tag{13.4.4}$$

这个问题的所有初值条件都是零, 因此时间变量用拉普拉斯变换应给出一个简单解:

$$\mathcal{L}[u(x,t)] = \bar{U}(x,s) = \int_0^\infty u(x,t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t.$$

与常微分方程一样, 对(13.4.1)中的时间变量作拉普拉斯变换

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = s^2\mathcal{L}[u] - su(x,0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = s^2\mathcal{L}[u]. \tag{13.4.5}$$

这里还需要对 x 偏导数关于时间变量的拉普拉斯变换. 得到

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = \int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty u(x,t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}[u]. \tag{13.4.6}$$

这样, 偏微分方程的拉普拉斯变换给出一个定义在 $0<x<\infty$ 上的"常"微分方程

$$s^2\bar{U}(x,s) = c^2\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial x^2}, \tag{13.4.7}$$

在 $x=0$, $u(x,t)$ 对所有 t 都给定了, 于是其拉普拉斯变换是已知的:

$$\bar{U}(0,s) = \int_0^\infty u(0,t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = F(s), \tag{13.4.8}$$

其中 $F(s)$ 是边界条件的拉普拉斯变换. 由(对固定的 t) $x\to\infty$ 时 $u(x,t)\to 0$, 其拉普拉斯变换也有同样的性质:

$$\lim_{x\to\infty}\bar{U}(x,s) = 0. \tag{13.4.9}$$

方程(13.4.7)的通解是

604

$$\bar{U}(x,s) = A(s)\mathrm{e}^{-(s/c)x} + B(s)\mathrm{e}^{(s/c)x},$$

其中 $A(s)$ 和 $B(s)$ 是变换变量 s 的任意函数. 当 $s>0$(更精确的是 $\mathrm{Re}(s)>0$)时, 有 $B(s)=0$ 以满足 $x\to\infty$ 时的衰减(13.4.9). 另外, 在 $x=0$ 的边界条件(13.4.8)给出 $A(s)=B(s)$, 因而

$$\bar{U}(x,s) = F(s)\mathrm{e}^{-(s/c)x}. \tag{13.4.10}$$

⊖ 关于更困难的例子, 请参看 Churchill[1972]和 Weinberger[1995].

要求这个变换的逆，可以利用卷积定理. 不过浏览一下表 13.2.1，可知变换中的指数倍给出解中的时间移位. 因此

$$\boxed{u(x,t) = H\left(t-\frac{x}{c}\right)f\left(t-\frac{x}{c}\right),} \tag{13.4.11}$$

其中 H 是赫维赛德单位阶跃函数. 当 $x>ct$ 时，解是零. 实际上，当 $x-ct$ 是常数时，解就是常数. 解是以速度 c 行进的固定波形波. 这就得到了与第 12 章中用特征线法得到的相似结果. 图 13.4.1 是这个结果的时空图像. 信号以速度 c 传播，在时刻 t，它只行进了 ct 距离. 若 $x>ct$，弦在 $x=0$ 处的摆动未传播到.

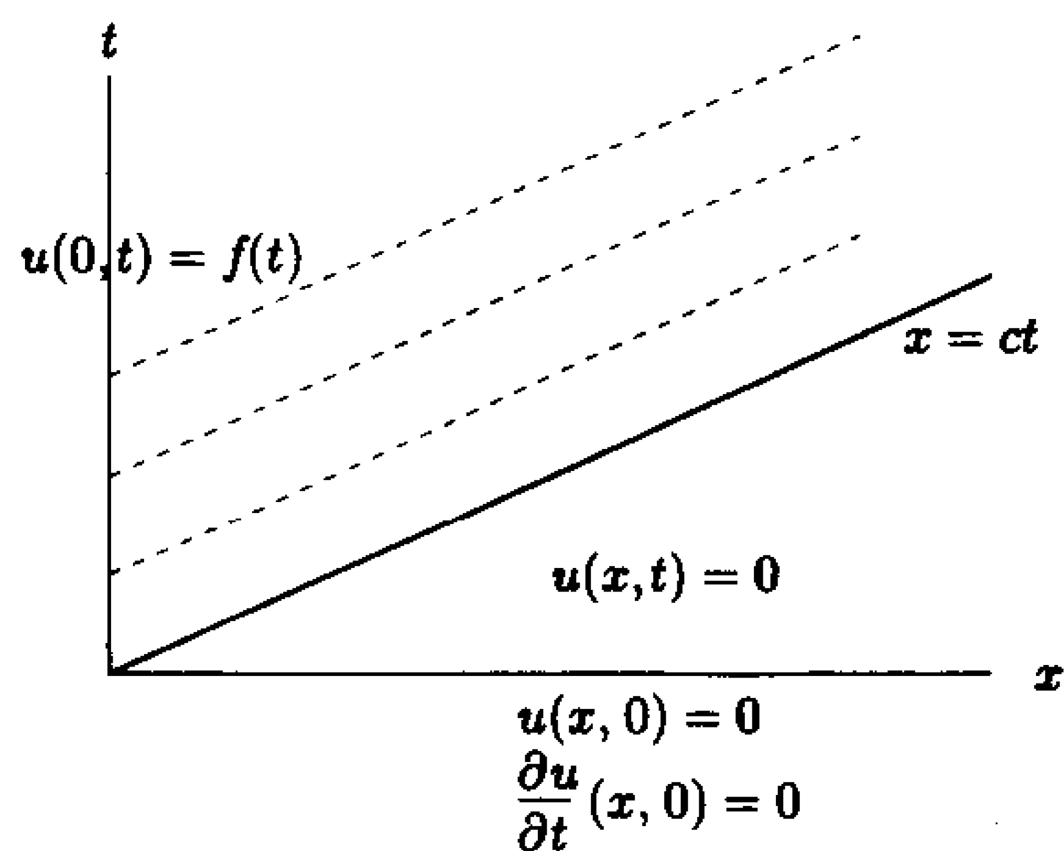


图 13.4.1 一维波动方程的信号问题

不过，用卷积定理得到同样结果仍是有益的. 由 $\bar{U}(x,s)=F(s)e^{-(s/c)x}$，

$$u(x,t) = \int_0^t f(t_0)g(t-t_0)\,dt_0,$$

其中 $e^{-(s/c)x}$ 是 $g(t)$ 的拉普拉斯变换. 从拉普拉斯变换表(也易验证) $g(t)=\delta(t-x/c)$，因而

$$u(x,t) = \int_0^t f(t_0)\delta\left(t-t_0-\frac{x}{c}\right)dt_0 = \begin{cases}0 & t<x/c\\ f(t-x/c) & t>x/c,\end{cases}$$

这与(13.4.11)等价.

605

习题 13.4

13.4.1 求解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

其中 $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=f(t)$，$u(x,0)=0$ 且 $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$.

13.4.2 求解

$$\frac{\partial w}{\partial t} = c\frac{\partial w}{\partial x} \quad c>0, x>0, t>0$$

$$w(0,t) = f(t)$$

$$w(x,0) = 0.$$

*13.4.3 求解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad -\infty<x<\infty$$

$$u(x,0) = \sin x$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

*13.4.4 考虑

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x>0$$

$$u(x,0) = 0$$

$$u(0,t) = f(t).$$

确定 $u(x, t)$ 的拉普拉斯变换. 求逆得到 $u(x, t)$. (提示：参看拉普拉斯变换表 13.2.1.)

13.4.5 当边界条件和初始条件是如下形式时，重新做习题 13.4.4：

$$u(x,0)=0 \text{ 和 } \frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=f(t).$$

13.4.6 如果 $f(t)=Ae^{i\sigma_0 t}$，重做习题 13.4.4(见习题 10.5.17).

(a)利用拉普拉斯变换求出 $u(x, t)$ 的表达式.

(b)用变量代换 $\omega=x/2\sqrt{t-\bar{t}}$ 简化(a)，其中 $\bar{t}$ 是(a)中的积分变量.

(c)求 $u(x, t)$ 当 t 大时的近似.

13.5 有限长度振动弦的信号问题

在偏微分方程中，所需的拉普拉斯逆积分经常并不像 13.4 节中的那么简单，下面用长度 606 为 L 的振动弦的例子来说明，这根弦初始是静止地在水平平衡位置上，满足 $x=L$ 端与时间有关的边界条件：

$$\text{PDE:}\ \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \tag{13.5.1}$$

$$\text{BC:}\ \boxed{\begin{aligned}u(0,t)&=0\\ u(L,t)&=b(t)\end{aligned}} \tag{13.5.2}$$

$$\text{IC:}\ \boxed{\begin{aligned}u(x,0)&=0\\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)&=0.\end{aligned}} \tag{13.5.3}$$

零初始条件方便了 $u(x, t)$ 对时间 t 作拉普拉斯变换：

$$\bar{U}(x,s)=\int_0^\infty e^{-st}u(x,t)\,dt. \tag{13.5.4}$$

通过对(13.5.1)作拉普拉斯变换，$\bar{U}(x, s)$ 满足常微分方程

$$s^2\bar{U}=c^2\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial x^2}, \tag{13.5.5}$$

并满足边界条件

$$\bar{U}(0,s)=0 \tag{13.5.6}$$

$$\bar{U}(L,s)=B(s), \tag{13.5.7}$$

其中 $B(s)$ 是 $b(t)$ 的拉普拉斯变换. 很容易确定 $\bar{U}(x, s)$：

$$\bar{U}(x,s)=B(s)\frac{\sinh(s/c)x}{\sinh(s/c)L}. \tag{13.5.8}$$

卷积定理给出

$$u(x,t)=\int_0^t b(t_0)f(t-t_0)\,dt_0, \tag{13.5.9}$$

其中 $f(t)$ 是 $F(s)$ 的拉普拉斯逆变换

607

$$F(s)=\frac{\sinh(s/c)x}{\sinh(s/c)L}. \tag{13.5.10}$$

得到拉普拉斯逆变换并不是那么简单．有一个获得(13.5.10)逆变换的方法就是利用本书的简表，其中主要包括基本指数函数的拉普拉斯变换．注意

$$\frac{\sinh(s/c)x}{\sinh(s/c)L}=\frac{e^{(s/c)x}-e^{-(s/c)x}}{e^{(s/c)L}-e^{-(s/c)L}}=\frac{e^{(s/c)x}-e^{-(s/c)x}}{e^{(s/c)L}(1-e^{-(2s/c)L})}.$$

然而由于分母的原因，不能用简单方式进行分析．由几何级数$[1/(1-x)=1+x+x^2+\cdots,\ |x|<1]$引入无穷指数级数：

$$\begin{aligned}F(s)&=\frac{e^{(s/c)x}-e^{-(s/c)x}}{e^{(s/c)L}(1-e^{-(2s/c)L})}\\&=e^{-(s/c)L}(e^{(s/c)x}-e^{-(s/c)x})(1+e^{-(2L/c)s}+e^{-(4L/c)s}+\cdots)\qquad(13.5.11)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\exp\left[-s\left(\frac{2nL-x+L}{c}\right)\right]-\exp\left[-s\left(\frac{2nL+x+L}{c}\right)\right]\right\}.\end{aligned}$$

由于$x<L$，每项都是指数衰减的，因而每项都可以用表 13.2.1 中的公式(13.2.2n)求出逆变换．拉普拉斯变是如下指数函数的线性组合：

$$\exp\left[-s\left(\frac{2nL\pm x+L}{c}\right)\right]\quad(n\geqslant 0).$$

$F(s)$的拉普拉斯逆变换就是狄拉克δ函数$\delta[t-(2nL\pm x+L)/c]$的线性组合：

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\delta\left(t-\frac{2nL-x+L}{c}\right)-\delta\left(t-\frac{2nL+x+L}{c}\right)\right].$$

因为(13.5.9)中的$f(t-t_0)$是边界条件的影响函数，这些狄拉克δ函数表示[从时刻t_0开始的]传递时间为$(2nL\pm x+L)/c$的信号．这些可以解释为直接信号及其在边界$x_0=0$和$x_0=L$上的反射．由于非齐次边界条件在$x_0=L$处，想象这些信号(在时刻$t=t_0$)起始于此．如图 13.5.1 所示，信号可以不同的方式到达x．直接信号必须以速度c行进距离$L-x$，产生延迟时间$(L-x)/c$(对应$n=0$)．信号还可以经过整数个完全回路到达x，这增加了行进距离$2Ln$．其他项对应在到达x前首先在$x=0$上反射的波．此时总行进距离是$L+x+2nL(n\geqslant 0)$．有关解的进一步细节讨论留作习题．

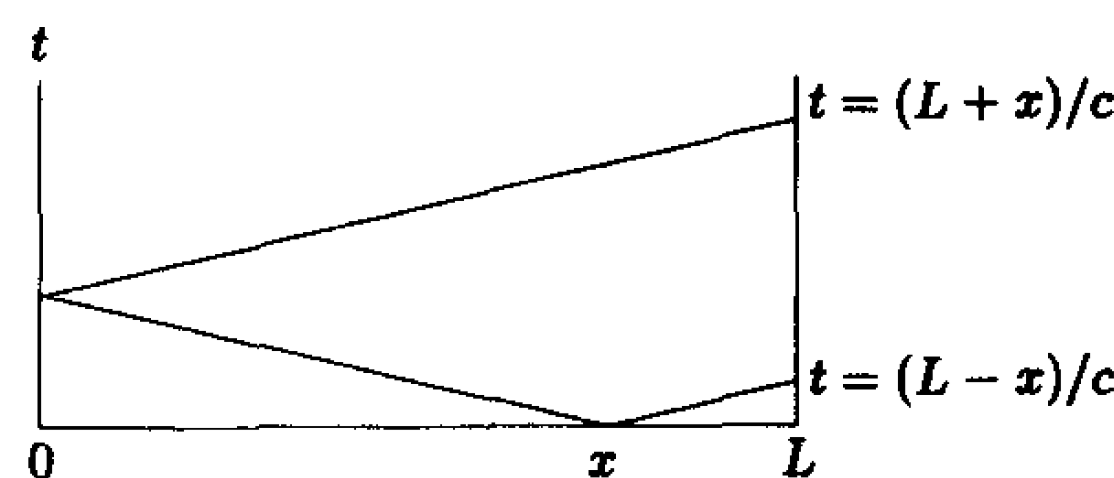


图 13.5.1　时空信号路径

利用拉普拉斯变换(及用本节的方法求逆)给出了解的反射波无穷序列表示．用特征曲线法也可以得到类似结果(见第 12 章)，或(在某些情况)用像源法(无穷空间格林函数序列)．

608

另外，在后面小节中，将用复平面的围线积分求拉普拉斯逆变换．这种方法将给出同一个解显著不同的表示．

习题 13.5

13.5.1　用拉普拉斯变换求解如下问题：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad -\infty<x<\infty$$

$$u(x,0)=f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,0)=g(x).$$

(a)如果 $g(x)=0$.　　　(b)如果 $f(x)=0$.

13.5.2 (a)利用本节的结果，由卷积定理求(13.5.8)的逆变换，并求解 $u(x,t)$，

(b)不用卷积定理，由(13.5.8)和(13.5.11)确定 $u(x,t)$.

*13.5.3 利用拉普拉斯变换求解 $u(x,t)$：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(0,t)=0 \qquad u(x,0)=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=b(t) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0.$$

13.5.4 重做习题13.5.3，如果条件变为

609

(a) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$ 和 $u(L,t)=b(t)$　　　(b) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$ 和 $\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=b(t)$

13.5.5 利用拉普拉斯变换求解 $u(x,t)$：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad -\infty<x<\infty$$

$$u(x,0)=f(x).$$

(提示：参看拉普拉斯变换表13.2.1.)

13.5.6 利用拉普拉斯变换求解 $u(x,t)$：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

其中 $u(x,0)=f(x)$，$u(0,t)=0$ 且 $u(L,t)=0$. 用其他方法也可以得到解的这个表达式吗？

13.6 波动方程及其格林函数

拉普拉斯变换可以用于确定非齐次偏微分方程的解和它相应的格林函数之间的关系. 考虑有限区间($0<x<L$)上的有源波动方程，它满足与时间有关的边界条件：

$$\text{PDE:}\quad \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+q(x,t)} \tag{13.6.1}$$

$$\text{BC:}\quad \boxed{\begin{aligned}u(0,t)&=a(t)\\ u(L,t)&=b(t)\end{aligned}} \tag{13.6.2}$$

$$\text{IC:}\quad \boxed{\begin{aligned}u(x,0)&=f(x)\\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)&=g(x).\end{aligned}} \tag{13.6.3}$$

格林函数. 格林函数 $G(x,t;x_0,t_0)$ 满足

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\delta(x-x_0)\delta(t-t_0) \tag{13.6.4}$$

$$G(0,t;x_0,t_0)=0 \tag{13.6.5}$$

$$G(L,t;x_0,t_0)=0, \tag{13.6.6}$$

根据因果性原理

610

$$G(x,t;x_0,t_0)=0, \quad 对 \quad t<t_0. \tag{13.6.7}$$

格林函数的拉普拉斯变换. 这一小节用拉普拉斯变换来确定格林函数. 对(13.6.4)～(13.6.6)作拉普拉斯变换得到

$$s^2\bar{G}=c^2\frac{\partial^2\bar{G}}{\partial x^2}+\delta(x-x_0)\mathrm{e}^{-st_0} \qquad (13.6.8)$$

$$\bar{G}(0,s;x_0,t_0)=0 \qquad (13.6.9)$$

$$\bar{G}(L,s;x_0,t_0)=0, \qquad (13.6.10)$$

其中$\bar{G}(x,\ s;\ x_0,\ t_0)$是$G(x,\ t;\ x_0,\ t_0)$对时间的拉普拉斯变换．由于因果性原理意味着$G$满足零初始条件(如果$t_0>0$)，因此(13.6.4)的变换简化了．

格林函数的拉普拉斯变换满足(13.6.8)，这是个格林函数型的常微分方程．要满足边界条件，$x<x_0$时，$\bar{G}(x,\ s;\ x_0,\ t_0)$必须与$\sinh(s/c)x$成比例，而$x>x_0$时与$\sinh(s/c)(L-x)$成比例．由于它是对称的，可知

$$\bar{G}(x,s;x_0,t_0)=\begin{cases}\gamma\sinh\dfrac{s}{c}(L-x_0)\sinh\dfrac{s}{c}x & x<x_0\\ \gamma\sinh\dfrac{s}{c}x_0\sinh\dfrac{s}{c}(L-x) & x>x_0,\end{cases} \qquad (13.6.11)$$

其中γ是一个常数(与x和x_0无关)．这样$\bar{G}$在$x=x_0$的连续性自动满足．此外，跳跃条件

$$0=c^2\frac{\mathrm{d}\bar{G}}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x_0-}^{x_0+}+\mathrm{e}^{-st_0}$$

确定γ：

$$0=-c^2\gamma\frac{s}{c}\left[\sinh\frac{s}{c}x_0\cosh\frac{s}{c}(L-x_0)+\sinh\frac{s}{c}(L-x_0)\cosh\frac{s}{c}x_0\right]+\mathrm{e}^{-st_0}.$$

利用双曲函数的加法公式($\sinh(a+b)=\sinh a\cosh b+\cosh a\sinh b$)，得到

$$\gamma=\frac{\mathrm{e}^{-st_0}}{cs\sinh(s/c)L}. \qquad (13.6.12)$$

在习题13.6.2中，格林函数本身就是由(13.6.11)满足(13.6.12)的拉普拉斯逆变换确定的．

解的格林函数表示． 下面进一步利用拉普拉斯变换来研究$u(x,\ t)$及其格林函数之间的关系．为了简化部分工作，考虑13.5节的特殊情形，$q(x,\ t)=0$，$a(t)=0$，$f(x)=0$和$g(x)=0$；仅有的非齐次项是$x=L$处的边界条件．在前一节得到了(13.5.8)：

$$\bar{U}(x,s)=B(s)\frac{\sinh(s/c)x}{\sinh(s/c)L}. \qquad (13.6.13)$$

611

这里将它与格林函数满足(13.6.12)的拉普拉斯变换(13.6.11)联系起来．因为源满足$x_0=L$，就需要$x<x_0$时的$\bar{G}$：

$$\bar{G}(x,s;x_0,t_0)=\frac{\mathrm{e}^{-st_0}\sinh(s/c)(L-x_0)\sinh(s/c)x}{cs\sinh(s/c)L}. \qquad (13.6.14)$$

比较上式与(13.6.13)，对x_0求导数：

$$\frac{\partial\bar{G}}{\partial x_0}(x,s;x_0,t_0)=-\frac{\mathrm{e}^{-st_0}\cosh(s/c)(L-x_0)\sinh(s/c)x}{c^2\sinh(s/c)L}.$$

注意$x_0=L$和$t_0=0$：

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial x_0}(x,s;L,0) = -\frac{\sinh(s/c)x}{c^2\sinh(s/c)L}, \tag{13.6.15}$$

与出现在(13.6.13)中的项类似. 从而

$$\bar{U}(x,s) = -c^2B(s)\frac{\partial \bar{G}}{\partial x_0}(x,s;L,0).$$

利用卷积定理，得到

$$u(x,t) = -c^2\int_0^t b(t_0)\frac{\partial G}{\partial x_0}(x,t-t_0;L,0)\mathrm{d}t_0,$$

由格林函数的时间平移不变性，它可以替换成更一般的形式：

$$\boxed{u(x,t) = -c^2\int_0^t b(t_0)\frac{\partial G}{\partial x_0}(x,t;L,t_0)\mathrm{d}t_0,} \tag{13.6.16}$$

由拉普拉斯变换得到的(13.6.16)等价于对特殊情况 $q(x,\ t)=0$，$a(t)=0$，$f(x)=0$ 和 $g(x)=0$ 下用格林公式获得的表达公式(11.2.24). 一般情形(11.2.24)可以同样地推导出来.

习题 13.6

13.6.1 (a)确定满足(13.6.1)～(13.6.3)的 $u(x,\ t)$ 的拉普拉斯变换.

(b)利用拉普拉斯变换根据格林函数表示出 $u(x,\ t)$[即用满足(13.6.12)的(13.6.11)].

13.6.2 由求满足(13.6.12)的(13.6.11)的逆变换确定格林函数. 并证明信号被适当反射了.

612

13.6.3 求出波动方程格林函数的拉普拉斯变换，其中边界条件是

(a) $u(0,\ t)=a(t)$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial x}(L,\ t)=b(t)$

(b) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,\ t)=a(t)$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial x}(L,\ t)=b(t)$

13.6.4 考虑

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+q(x,t) \quad \begin{matrix} x>0 \\ t>0\end{matrix}\\ u(0,t) &= h(t)\\ u(x,0) &= f(x).\end{aligned}$$

*(a)确定其格林函数的拉普拉斯变换.

(b)如果 $f(x)=0$ 且 $q(x,\ t)=0$，确定 $\bar{U}(x,\ s)$.

(c)比较(a)和(b)，导出 $u(x,\ t)$ 用格林函数的表示式(若 $f(x)=0$ 且 $q(x,\ t)=0$). 并与(11.3.21)比较.

(d)由(a)确定格林函数(提示：参看拉普拉斯变换表 13.2.1).

13.6.5 重做习题 13.6.4，如果：

(a) $h(t)=0$ 和 $q(x,\ t)=0$. (b) $h(t)=0$ 和 $f(x)=0$.

13.6.6 重做习题 13.6.4，如果边界条件是

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = h(t).$$

[考虑 $f(x)=0$ 且 $q(x,\ t)=0$ 的情形.]

13.7 用复平面上的围线积分计算拉普拉斯逆变换

拉普拉斯变换有时可以通过变换表求逆. 然而，拉普拉斯变换的最重要性质之一是它们能够用复平面上的围线积分求逆变换. 还将说明如何用复变函数计算这个积分.

傅里叶变换和拉普拉斯变换. 首先证明拉普拉斯变换是傅里叶变换的特殊情况. 作为复习，引入函数 $g(x)$ 和它的傅里叶变换 $G(\omega)$：

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x \tag{13.7.1}$$

613

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega. \tag{13.7.2}$$

如同作拉普拉斯变换函数的假定，假设函数 $g(x)$ 在 $x<0$ 时为零：

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2\pi f(x)\mathrm{e}^{-\gamma x} & x > 0. \end{cases} \tag{13.7.3}$$

引入 $\mathrm{e}^{-\gamma x}$（选择 γ）使得 $x\to\infty$ 时对于某些 $f(x)$，函数 $g(x)$ 自动衰减得非常快. 相对这种函数，傅里叶变换对(13.7.1)～(13.7.2)变为

$$G(\omega) = \int_0^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-(-\mathrm{i}\omega+\gamma)x}\mathrm{d}x$$

$$2\pi f(x)\mathrm{e}^{-\gamma x} = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega \quad (x > 0).$$

如果引入

$$s = \gamma - \mathrm{i}\omega \quad (\mathrm{d}s = -\mathrm{i}\mathrm{d}\omega)$$

和

$$F(s) \equiv G(\omega) = G\left(\frac{s-\gamma}{-\mathrm{i}}\right), \tag{13.7.4}$$

然后用 t 代替 $x(x=t)$ 给出

$$\boxed{F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t} \tag{13.7.5}$$

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s} \quad (t > 0). \tag{13.7.6}$$

方程(13.7.5)表明 $F(s)$ 是 $f(t)$ 的拉普拉斯变换.（在讨论拉普拉斯变换时，通常用 t 而不是 x.）$F(s)$ 也是下式的傅里叶变换：

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2\pi f(t)\mathrm{e}^{-\gamma t} & t > 0. \end{cases}$$

更重要的是，对给定的拉普拉斯变换 $F(s)$，(13.7.6)表明如何计算其拉普拉斯逆变换. 它包含复 s 平面上的线积分，见图 13.7.1. 由复变函数理论，可以证明这个线积分在 $F(s)$ 所有奇点的右边. 除此之外，这个积分计算与 γ 的值无关. 所有的奇点都在“左半平面”.

614

柯西定理和留数. 这里仅给出用复变函数理论计算积分的极简短讨论. 其基本工具是柯西定理：若 $g(s)$ 在封闭周线 C 上及其内部的所有点都是解析的（没有奇点），则闭线积分是零：

$$\oint_C g(s)\mathrm{d}s = 0. \tag{13.7.7}$$

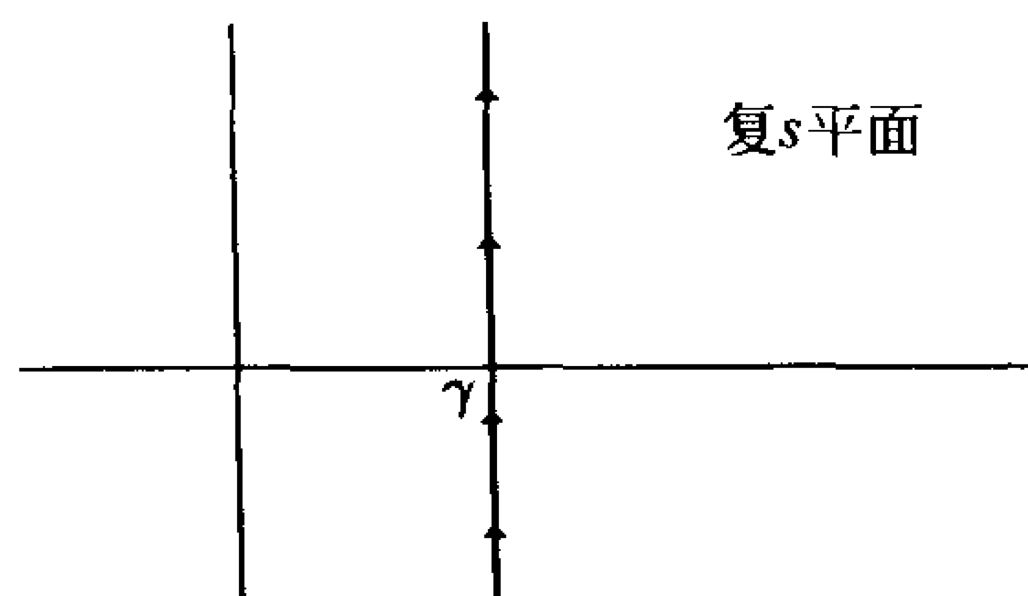


图 13.7.1 复 s 平面上拉普拉斯逆变换的线性积分

闭线积分不为零是由于 $g(s)$ 的奇点. 留数定理说的是闭线积分可以由周线内奇点 s_n 的基值(称为留数)来计算(如果没有支点，则其通常是平方根和对数型奇点):

$$\oint_c g(s)\,\mathrm{d}s = 2\pi\mathrm{i}\sum_n \operatorname{res}(s_n). \tag{13.7.8}$$

留数的计算常常是直截了当的. 如果 $g(s)=R(s)/Q(s)$ 有在周线内部 $Q(s)$ 的单零点 s_n 处的单极点，那么，复变函数证明了

$$\operatorname{res}(s_n) = \frac{R(s_n)}{Q'(s_n)} \tag{13.7.9}$$

和

$$\oint_c g(s)\,\mathrm{d}s = 2\pi\mathrm{i}\sum_n \frac{R(s_n)}{Q'(s_n)}. \tag{13.7.10}$$

逆变换积分. 拉普拉斯变换的逆变换积分不是闭线积分而是在所有奇点右边一个无限直线(实部是常数 γ)上的积分. 为了利用有限闭线积分，可以考虑图 13.7.2 中两个大半圆中的一个. 将允许其半径趋于无穷，以便闭围线的直线部分趋近于想要的无穷直线. 希望在半径趋于无穷时，沿着圆弧的线积分趋于零. 逆变换积分(13.7.6)的被积函数 $F(s)\mathrm{e}^{st}$ 必须足够小. 因为 $s\to\infty$ 时 $F(s)\to 0$[见 13.2 节或者(13.7.5)]，这就需要半径趋于无穷时，e^{st} 趋于零. 如果 $t<0$，只有当半径在右面的半圆上增加时，e^{st} 指数衰减(s 的实部 >0). 因而，若 $t<0$，在右边封闭周线. 因为在右边没有奇点，并且大半圆的基值趋于零，所以当 $t<0$ 时，得到

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s = 0.$$

在利用拉普拉斯变换时，坚持要对 $t<0$，$f(t)=0$. 更重要的是 $t>0$ 时，对逆变换积分(13.7.6)的分析. 若 $t>0$，e^{st} 在左半平面指数衰减(s 的实部 <0). 从而，若 $t>0$，就在左边封闭周线. 所有的奇点对积分都有贡献. 此时 $F(s)$ 的逆变换积分是

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s = \sum_n \operatorname{res}(s_n). \tag{13.7.11}$$

这在 $F(s)$ 没有支点时成立，其中的求和包括所有的奇点(因为所有奇点都在直线的右边).

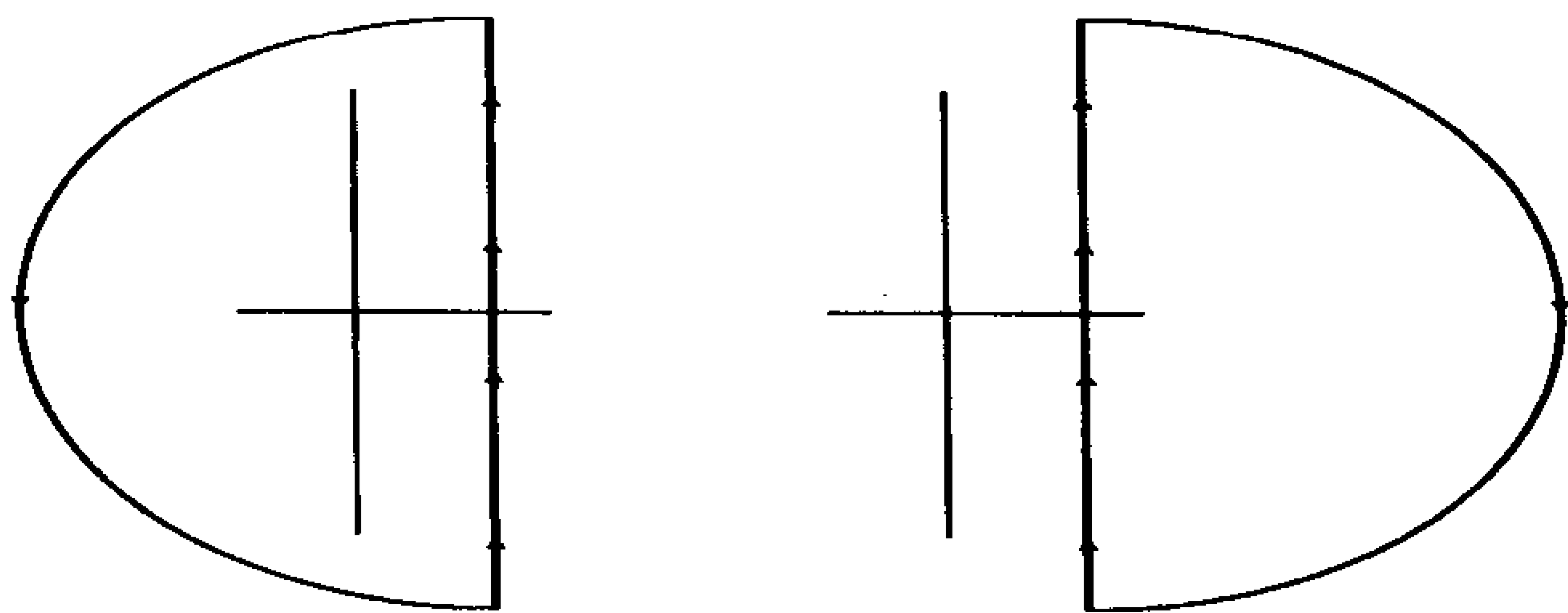


图 13.7.2 封闭线积分

简单极点. 如果 $F(s)=p(s)/q(s)$[所以 $g(s)=p(s)\mathrm{e}^{st}/q(s)$]，并且拉普拉斯变换 $F(s)$ 的奇点都是单极点[在 $q(s)$ 的单零点处]，那么 $\operatorname{res}(s_n)=p(s_n)\mathrm{e}^{s_n t}/q'(s_n)$，就有

$$f(t) = \sum_n \frac{p(s_n)}{q'(s_n)}\mathrm{e}^{s_n t}. \tag{13.7.12}$$

若 $F(s)$ 是有理函数[即 $p(s)$ 和 $q(s)$ 是多项式]，(13.7.12)与前面部分分式的结果是一样的.

计算拉普拉斯逆变换的例子. 设 $F(s)=(s^2+2s+4)/[s(s^2+1)]$. 逆变换是

$$f(t)=\sum_n \operatorname{res}(s_n).$$

616

$F(s)$ 的极点是 $s(s^2+1)$ 的零点，即 $s=0$, $\pm\mathrm{i}$. 在这些单极点的留数是

$$\operatorname{res}(0)=4\mathrm{e}^{0t}=4$$

$$\operatorname{res}(s_n=\pm\mathrm{i})=\frac{s_n^2+2s_n+4}{3s_n^2+1}\mathrm{e}^{s_nt}=\frac{3+2s_n}{-2}\mathrm{e}^{s_nt}.$$

这样，由欧拉公式，

$$f(t)=4+\left(-\frac{3}{2}-\mathrm{i}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\left(-\frac{3}{2}+\mathrm{i}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}=4-\frac{3}{2}\cdot 2\cos t-\mathrm{i}\cdot 2\mathrm{i}\sin t$$
$$=4-3\cos t+2\sin t,$$

下一节要用这些想法计算出现在偏微分方程问题中的拉普拉斯逆变换.

习题 13.7

13.7.1 用拉普拉斯变换的求逆理论确定 $f(t)$，如果 $F(s)$ 为

(a) $1/(s-a)$

* (b) $1/(s^2+9)$

(c) $(s+3)/(s^2+16)$

13.7.2 $f(s)$ 在奇点 s_0 的留数 b_{-1} 是 $f(s)$ 在 $s=s_0$ 附近的一个展开式中 $1/(s-s_0)$ 的系数. 一般地，

$$f(s)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}b_m(s-s_0)^m,$$

称为洛朗级数或洛朗展开式.

(a) 对于单极点，最负次幂是 $m=-1$ ($m<-1$ 时，$b_m=0$). 证明：此时有

$$\operatorname{res}(s_0)=\lim_{s\to s_0}(s-s_0)f(s).$$

(b) 如果 s_0 是单极点且 $f(s)=R(s)/Q(s)$ [$Q(s_0)=0$, $R(s_0)\neq 0$, $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}s(s_0)\neq 0$]，证明：

$$\operatorname{res}(s_0)=\frac{R(s_0)}{Q'(s_0)},$$

假设 $R(s)$ 和 $Q(s)$ 在 s_0 附近都有泰勒级数展开式.

(c) 对于 M 阶极点，最负次幂是 $m=-M$ ($m<-M$ 时，$b_m=0$)，证明：此时有

$$\operatorname{res}(s_0)=\frac{1}{(M-1)!}\frac{\mathrm{d}^{M-1}}{\mathrm{d}s^{M-1}}[(s-s_0)^M f(s)]\Big|_{s=s_0}. \tag{13.7.13}$$

617

(d) 在(c)中，证明在(13.7.13)中的 M 可以用任何比 M 大的整数代替.

13.7.3 利用习题 13.7.2 确定 $f(t)$，如果 $F(s)$ 为

(a) $1/s^3$

(b) $1/(s^2+4)^2$

13.7.4 如果对于大 $r\equiv|s|$，有 $|F(s)|<\alpha/r^2$，证明

$$\int_{C_R}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s\to 0 \quad 当 \quad r\to\infty, 对\ t>0,$$

其中 C_R 是圆在左半平面的弧($\operatorname{Re}s\leqslant 0$). [如果 $|F(s)|<\alpha/r$，要证明同样的结论更难一些，它与复变函数的若尔当引理等价.]

13.8 利用拉普拉斯变换求解波动方程(复变量)

在13.6节证明了

$$\text{PDE:}\ \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \tag{13.8.1}$$

$$\text{BC:}\ \boxed{\begin{aligned}u(0,t)&=0\\ u(L,t)&=b(t)\end{aligned}} \tag{13.8.2}$$

$$\text{IC:}\ \boxed{\begin{aligned}u(x,0)&=0\\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)&=0\end{aligned}} \tag{13.8.3}$$

可以通过引入 $u(x,t)$ 对时间 t 的拉普拉斯变换 $\bar{U}(x,s)$ 进行分析. 用格林函数得到了 $u(x,t)$:

$$u(x,t)=-c^2\int_0^t b(t_0)\frac{\partial G}{\partial x_0}(x,t;L,t_0)\,\mathrm{d}t_0, \tag{13.8.4}$$

已知这个影响函数的拉普拉斯变换[见(13.6.15)]:

618

$$\frac{\partial\bar{G}}{\partial x_0}(x,s;L,0)=F(s)=-\frac{\sinh(x/c)s}{c^2\sinh(L/c)s}. \tag{13.8.5}$$

在这一节, 利用拉普拉斯变换的复逆变换积分:

$$\frac{\partial G}{\partial x_0}(x,t;L,0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty}-\frac{\sinh(x/c)s}{c^2\sinh(L/c)s}\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s. \tag{13.8.6}$$

$F(s)$ 的奇点只是其分母零点的单极点 s_n:

$$\sinh\frac{L}{c}s_n=0. \tag{13.8.7}$$

不过 $s=0$ 不是极点, 因为在 $s=0$ 附近, $F(s)\approx-(x/c)s/[c^2(L/c)s]\neq\infty$. 在虚轴上有无穷多个极点

$$\frac{L}{c}s_n=\mathrm{i}n\pi,\quad n=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots. \tag{13.8.8}$$

极点 $s_n=\mathrm{i}c(n\pi/L)$ 对应着特征值 $\lambda=(n\pi/L)^2$. 这是根据拉普拉斯变换的奇点性质(见13.2节). 拉普拉斯变换的奇点 $[s=\mathrm{i}c(n\pi/L)]$ 对应着一个复指数解 $[\mathrm{e}^{\mathrm{i}c(n\pi/L)t}]$.

由 $\sinh\mathrm{i}x=\mathrm{i}\sin x$ 和 $\cosh\mathrm{i}x=\cos x$, 在每个极点的留数是

$$\mathrm{res}(s_n)=\frac{R(s_n)}{Q'(s_n)}=\frac{-\sinh(x/c)s_n\mathrm{e}^{s_nt}}{cL\cosh(L/c)s_n}=\frac{-\mathrm{i}\sin n\pi x/L\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\pi ct/L)}}{cL\cos n\pi},$$

因而, 这个问题的影响函数是

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_0}G(x,t;L,0)&=\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq0)}}^{\infty}\frac{-\mathrm{i}\sin n\pi x/L\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\pi ct/L)}}{cL\cos n\pi}\\&=\frac{2}{cL}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi ct}{L},\end{aligned} \tag{13.8.9}$$

其中把正 n 和负 n 的基值结合成了一项. 最后, 利用(13.8.4)得到

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L},\text{其中 }A_n=-(-1)^n\frac{2c}{L}\int_0^t b(t_0)\sin\frac{n\pi c}{L}(t-t_0)\,dt_0,$$

这与利用特征函数展开法得到的结果相同.

影响函数是特征函数的无穷级数. 对于带齐次边界条件的齐次问题，用一列无穷极点求拉普拉斯逆变换也给出了与分离变量所得到的同样特征函数级数. 实际上，正是拉普拉斯变换法常常用来证明分离变量法的有效性. [619]

习题 13.8

*13.8.1 利用拉普拉斯变换求解 $u(x,t)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0)=f(x),\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,u(0,t)=0,u(L,t)=0$$

利用 s 平面上围线积分的留数定理计算 $u(x,t)$ 的拉普拉斯逆变换. 并证明这样给出了与分离变量同样的结果.

13.8.2 重做习题 13.8.1，其中：

(a) $u(x,0)=0$ 和 $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x)$

(b) $u(0,t)=0$ 和 $\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0$

(c) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$ 和 $\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0$

13.8.3 利用拉普拉斯变换求解 $u(x,t)$.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

其中 $u(x,0)=f(x)$，$u(0,t)=0$ 和 $u(L,t)=0$.

利用 s 平面上围线积分的留数定理计算 $u(x,t)$ 的拉普拉斯逆变换. 还有其他方法能够得到解的这种表示吗？(与习题 13.5.6 进行比较.)

13.8.4 考虑

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin\sigma_0 t$$

$$u(x,0)=0\quad u(0,t)=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0\quad u(L,t)=0.$$

(a) 利用拉普拉斯变换求解(用围线积分求逆变换)，如果 $\sigma_0\neq c(m\pi/L)$.

(b) 在 $\sigma_0=c(3\pi/L)$ 时求解，并证明出现共鸣(见 8.5 节). [620]

第14章　色散波：缓变、稳定性、非线性性和扰动法

14.1　引言

这一章旨在简要地为教师或读者提供偏微分方程中一些比较前沿和重要课题的概述．在14.2节，引入波数与频率之间的一个关系：色散关系，说明了相速度和群速度的重要区别．讨论的色散波例子包括水波(14.2节)，并较广泛地涉及了波导(14.3节)和光纤(14.4节)．在14.5节，利用稳定相位法，展示了群速度在线性色散波传播中的重要性．在14.6节，证明了若允许振幅、波数和频率是时间和空间的缓变函数，则更容易分析色散波．14.6节通过用特征线法求解缓变波，证明了它可能形成焦散曲线．在假设波数和频率近乎常数的条件下，在14.7节，推导出了称作薛定谔方程的波包络方程和线性的KdV方程，并说明了它在彩虹焦散曲线中的应用；另外也分析了对应非线性色散波方程的孤立波，并简要地讨论了孤立子和逆散射变换．在14.8节介绍了偏微分方程的分歧现象和稳定性分析，其中包括了常微分方程动力系统(14.8.1节)；在14.8.3节，讨论了偏微分方程典型的不稳定平衡，给出了中性稳定曲线，并说明了偏微分方程中模式是如何生成的．在14.8.5节，分析了微不稳定的色散波情形，简单地推导出线性化的复金茨堡-朗道方程；在14.8.6节，介绍了偏微分方程的分歧现象；非线性项引出了复金茨堡-朗道方程，为此要分析其调制不稳定性．14.8.7节引入了长波不稳定性．反应扩散方程的模式形成和图灵不稳定性在14.8.8节有较详细的介绍．最后两节介绍了奇异扰动法，它与本章其他内容关系不大．为了便于学习这些扰动法，先介绍了常微分方程的几个简单例子．14.9节引入了用多尺度法解决的奇异扰动问题，包括缓变介质中的波动方程(14.9.4节)和缓变色散方程(14.9.5节)．14.10节中用匹配渐近展开法求解了边界层问题．14.10.2节介绍了与受对流作用控制的污染物扩散过程对应的偏微分方程．

621

14.2　色散波和群速度

14.2.1　行波和色散关系

在均匀介质中(常系数)线性偏微分方程的解，当边界条件特别简单时，常常可以利用一种等价于甚至比分离变量更简单的方法得到．既然已由分离变量的经验知道了解的形式，就可以直接将它代入偏微分方程：

	波传播	非波传播
一维	$e^{i(kx-\omega t)}$	$e^{ikx}e^{\sigma t}$
二维	$e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$	$e^{ikx}e^{\sigma t}$.

在有限矩形区域中，边界条件是齐次的，比如零端点、零斜率或周期，$k(\mathbf{k})$表示由适当傅里叶

级数允许的离散波数(波向量). 波长是 $2\pi k$，所以波数 k 是在 2π 长度上的周期数. 在无穷区域(或带适当齐次边界条件的半无穷区域)上，$k(k)$代表适当傅里叶变换允许的连续的波数(波向量). 在这些问题中，ω 是时态频率，而 σ 表示偏微分方程解的指数时间依赖性.(在这一章，k 表示波数而 ω 表示时间频率；不过在本书的其他部分，k 表示热传导方程的扩散系数而 ω 表示空间波数，希望这不会引起混乱.)

一般地，在求解波传播问题的偏微分方程时，会发现时态频率是波数的实函数 622

$$\boxed{\omega = \omega(k),} \tag{14.2.1}$$

称为色散关系. 在多维问题中 $\omega=\omega(k)$ 也就是 $\omega=\omega(k_1, k_2, k_3)$. 下面举几个简单例子. 对一维波传播，$e^{i(kx-\omega t)}=e^{ik(x-\omega t/k)}$，这表示波速或相速等于 $\omega(k)/k$ 的行波. 如果这个速度确实依赖于波数，那么不同波长的波将以不同速度传播. 因为初始条件由许多不同波长(由傅里叶分析)组成，所以初始条件通常会展开或分开. 这一点在后面会看得更清楚. 这里，一个波传播问题是色散的，如果其波速依赖波数，特别地，波速不是常数. 如果波传播问题是非色散的，$\omega(k)/k=$常数，即 $\omega(k)=$常数$\times k$. 更专业地说，一维问题是色散的，如果 $d\omega/dk\neq$常数. 在高维情形，一个偏微分方程是色散的，如果$\nabla_k\omega=(\partial\omega/\partial k_1, \partial\omega/\partial k_2, \partial\omega/\partial k_3)\neq$常向量.

例：实解. 把偏微分方程(参考第 12 章)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial u}{\partial x} \tag{14.2.2}$$

作为对所有 x 的初值问题求解. 代入 $u=e^{i(kx-\omega t)}$，首先得到 $-i\omega=cik$，这样，色散关系是

$$\omega = -ck.$$

对于所有的 k，波的速度 $\omega/k=-c$ 是常数，所以说(14.2.2)是非色散的. 每一个波数都以同样的速度 $-c$ 移动. 这样就可预测任意初始条件都会给出以速度 $-c$ 移动的不变波形持久波. 这可以用傅里叶变换证明：

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)e^{i(kx-\omega t)}dk = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)e^{ik(x+ct)}dk, \tag{14.2.3}$$

这里用到了(14.2.2). 为了将它与初始条件 $u(x, 0)=f(x)$联系起来：

$$u(x,0) = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)e^{ikx}dk. \tag{14.2.4}$$

可以求出 $A(k)$，但没必要. 由(14.2.3)和(14.2.4)可以看出

$$u(x,t) = f(x+ct). \tag{14.2.5}$$

这在第 12 章是用特征线法证明的.

有一个解是 $Ae^{i(kx-\omega(k)t)}$，其中 A 是常数. 也许这不是令人喜欢的解，因为它不是实的. 要看清如何得到这种类型的实解，只要注意到 k 和 $-k$ 都是允许的波数就够了. 由 $\omega(k)$是 k 的奇函数，叠加给出微分方程的一个解为 $Ae^{i(kx-\omega(k)t)}+Ae^{i(-kx-\omega(-k)t)}=A(e^{i(kx-\omega(k)t)}+e^{-i(kx-\omega(k)t)})=2A\cos(kx-\omega(k)t)$. 在许多(不是所有)问题中，这样有可能构造出实解. 所以大多数自然科学家都用记号 $Ae^{i(kx-\omega t)}$表示实波. 但在偏微分方程本身是非线性的或者不是实的时候，要格外小心. 623

例：线性化 KdV 方程. 这个线性偏微分方程来源于很多物理情形，特别是，当更一般的色散存在时，作为对长波(其波长相对物理问题的其他长度尺度长)的近似：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}.$$

后面会讨论这个方程的推导．行波假设 $u=e^{i(kx-\omega t)}$ 给出 $-i\omega+c(ik)=\beta(ik)^3$，色散关系即为

$$\omega = ck+\beta k^3. \tag{14.2.6}$$

波速不是常数而是依赖于波数：$\omega/k=c+\beta k^2$，其中 $d\omega/dk\neq$ 常数，这就得到了第一个色散波的例子．利用傅里叶变换：

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}A(k)e^{i(kx-\omega t)}dk=\int_{-\infty}^{+\infty}A(k)e^{i(k(x-ct)-\beta k^3 t)}dk.$$

从这个精确解并不能直接看到多少东西，这是典型的色散波问题．在本章的后面，将给出基于对精确解的长距离和长时间逼近来分析色散波的方法.

色散关系的算子结果．对于线性色散方程的基本行波解，$u(x,t)=Ae^{i(kx-\omega t)}$，其中 A 表示常振幅．注意

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-i\omega u$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=iku.$$

由此注意到波数和频率等价于空间和时间的微分算子

624

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\Rightarrow -i\omega(k) \text{ 或 } \omega(k)\Rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}} \tag{14.2.7}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\Rightarrow ik \quad \text{或} \quad k\Rightarrow -i\frac{\partial}{\partial x}.} \tag{14.2.8}$$

在讨论波包络方程时，会发现这些观察是很有用的.

14.2.2 群速度 I

线性色散波 $e^{i(kx-\omega t)}$ 的特征是频率依赖波数，这样相速度 $\omega(k)/k$ 也依赖波数．不同波长的波有不同的相速度．然而，对色散波还有一个更重要的速度，群速度，其重要性是由于能量是以这个速度(而不是相速度)传播的．这一点不太容易说明，因此，先讨论一个简单的例子．不考虑由所有的波数组成的连串波(用傅里叶变换)，而是考虑只由两个波数接近的波组成的解，波数分别为 k 和 $k+\Delta k$，其中 Δk 非常小．为了方便，选择形式为 $\cos[kx-\omega(k)t]$ 的波，为简单假定这两个波有相同的常振幅 A.

$$u(x,t)=A\cos(kx-\omega(k)t)+A\cos[(k+\Delta k)x-\omega(k+\Delta k)t].$$

由三角函数的余弦和差化积公式($\cos\theta+\cos\phi=2\cos[(\theta+\phi)/2]\cos[(\theta-\phi)/2]$)得到

$$u(x,t)=2A\cos\left[\left(k+\frac{\Delta k}{2}\right)x-\frac{\omega(k)+\omega(k+\Delta k)}{2}t\right]\cos\left[\frac{\Delta k}{2}x-\frac{\omega(k+\Delta k)-\omega(k)}{2}t\right].$$

这个和是两个空间性态不同的三角函数的乘积，一个波数是 $k+\Delta k/2$ 几乎和原来的两个波数一样，而另一个波数非常小 $\Delta k/2$，对应着很大的波长．这个解有两个非常不同的波长尺度．为了作出解的图像(t 固定)，先作长正弦波的图像．解周期地(又相对短的波长)待在长波和它的

负值上，见图 14.2.1. 快速振荡波的振幅在空间缓慢改变. 而两个波建设性或破坏性地相互干扰. 长波就像是短波的波包. 在波包的零点之间出现一群短波. 这些短波几乎就是波数为 $k+\Delta k/2$ 的单个色散波，其相速度也几乎就是单个色散波的相速度

$$\frac{\omega\left(k+\frac{\Delta k}{2}\right)}{k+\frac{\Delta k}{2}} \approx \frac{\omega(k)+\omega(k+\Delta k)}{2\left(k+\frac{\Delta k}{2}\right)} \approx \frac{\omega(k)}{k}.$$

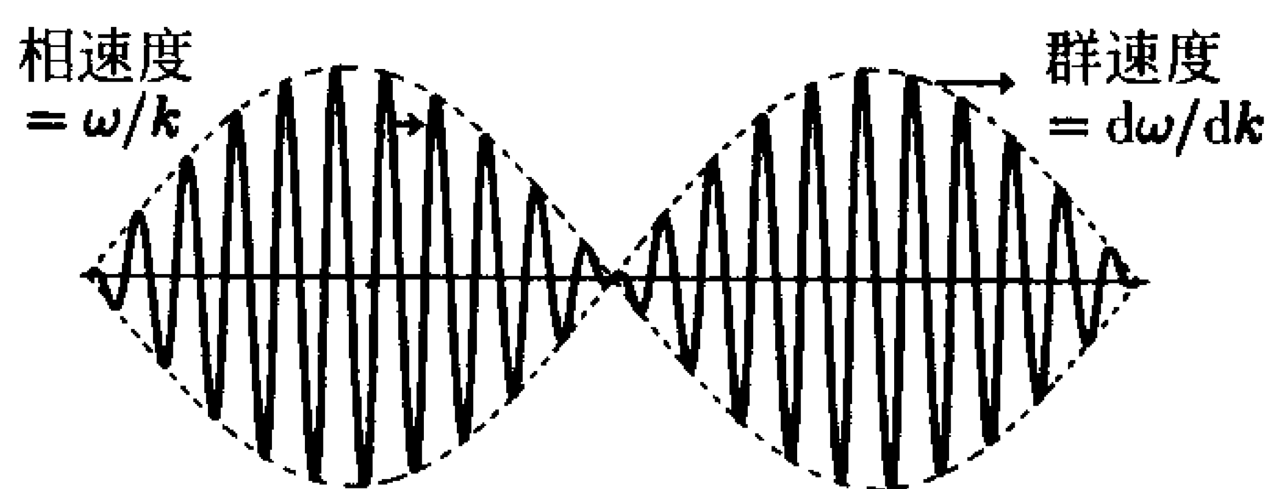


图 14.2.1 群速度和相速度

625

而波包或者波群以完全不同的速度 $(\omega(k+\Delta k)-\omega(k))/\Delta k$ 移动，$\Delta k\to 0$ 时的极限称为群速度

$$\boxed{\text{群速度} \equiv \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}.} \tag{14.2.9}$$

在后面更详细讨论的某种意义上说，一群色散波的振幅是以群速度移动. 能量以群速度移动. 单个波好像在波包中穿过，因为相速度通常与群速度是不同的.

例. 对于线性化 KdV 方程，色散关系是(14.2.6)，$\omega=ck+\beta k^3$，此时

$$\text{相速度} = \frac{\omega}{k} = c+\beta k^2$$

$$\text{群速度} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = c+3\beta k^2.$$

群速度和相速度甚至可能是相反方向. 例如，可能出现 $c+3\beta k^2>0$，而 $c+\beta k^2<0$.

水波. 对于水面波，已知色散关系是 $\omega^2=gk\tanh(kh)$，其中 $g=9.8\mathrm{m/s^2}$ 是重力常数，h 是恒定水深. 对深水波，$kh\gg 1$，有 $\tanh(kh)\simeq 1$，色散关系可近似为 $\omega^2=gk$ 或 $\omega=\pm\sqrt{gk}$，而相速度 $\frac{\omega}{k}=\pm\sqrt{\frac{g}{k}}$，群速度 $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}$，群速度恰好是相速度的一半. 海滩上的大多数波都是由远处的暴风雨生成的，这些波大都是深水波，大海的标准深度是 5 千米. 由波数和波长 L 的关系是 $L=2\pi/k$，群速度 $=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$，即较长的波有较大的群速度. 如果局部暴风雨生成了具有所有波长的波，那么较长的波移动较快并更快抵达远方的海岸线. 因而，在海岸线上的频率改变是由这些波到达海岸线的时间不同造成的. (在海滩上观测频率是有意义的，因为波的频率与深度变化得一样慢). 因而，在海滩上先观测到的小频率长波(较长周期)是其他波的先驱(也许风暴自己就要上岸了). 有兴趣的读者可以参考 Kinsman[1984].

626

习题 14.2

14.2.1 求出下面一维偏微分方程的色散关系：

(a) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (b) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\gamma^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$

*(c) $\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (d) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-u$

14.2.2 求出下面二维偏微分方程的色散关系：

(a) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ (b) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+c_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

14.2.3 设线性偏微分方程有单模式色散关系 $\omega=\omega(k)$. 证明：如果色散关系是奇的，$\omega(-k)=-\omega(k)$，则方程有实解.

14.2.4 设(高维)线性偏微分方程有单模式色散关系 $\omega=\omega(k)$. 证明：如果色散关系是奇的，$\omega(-k)=-\omega(k)$，则方程有实解.

*14.2.5 对 $y\leqslant 0$，水波满足 $\partial^2\phi/\partial x^2+\partial^2\phi/\partial y^2=0$，其中 ϕ 是速度位势，使得液体的速度是 $u=\nabla\phi$. 在平坦的水底 $y=-h$ 的边界条件是 $\partial\phi/\partial y=0$. 对于小振幅水波(仍有巨大物理兴趣)，在未知自由面 $y=s(x,t)$ 上的边界条件可由在 $y=0$ 的两个条件 $\partial\phi/\partial t+gs=0$ 和 $\partial s/\partial t=\partial\phi/\partial y$ 近似，其中 g 是重力常数. 试通过假设 $\phi=A(y)e^{i(kx-\omega t)}$ 和 $s=Be^{i(kx-\omega t)}$ 找到色散关系.

14.2.6 对水波，把 $\partial\phi/\partial t+gs=0$ 换成 $\partial\phi/\partial t+gs-\gamma/\rho\partial^2 s/\partial x^2=0$，其中 γ 是表面张力系数，ρ 是水的质量密度常数，求出水波的色散关系[Whitham(1999)].

*14.2.7 通过求解习题14.2.5，确定深水波方程的色散关系，其中的边界条件是 $y\to-\infty$ 时 $\partial\phi/\partial y\to 0$ 而不是 $y=-h$ 时 $\partial\phi/\partial y=0$.

627

14.2.8 推出内波的色散关系，假设双流体模型满足：$y\geqslant 0$ 时，密度为 ρ_1，而 $y\leqslant 0$ 时，密度为 ρ_2，对应习题14.2.5在 $y=0$ 用压力连续条件 $\rho_1(\partial\phi/\partial t+gs)=\rho_2(\partial\phi/\partial t+gs)$ 代替零压力条件. 在 $y=0$ 的另一个条件对两种流体都成立. 假定 $y\to\pm\infty$.

14.2.9 比较下列方程的相速度和群速度：

(a) $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\beta\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}$.　　(b) $i\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

(c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-u$. 并证明相速度比声速 c 大，而群速度比声速 c 小.

14.2.10 求出满足色散关系 $\omega^2=gk\tanh(kh)$ 水波的群速度.

14.2.11 海啸(地震生成的水波)是满足 $kh\ll 1$ 的长波，证明该长波满足 $\omega=\pm k\sqrt{gh}$. 假定海深为5千米，请求出海啸的近似相速度和群速度.

14.3 波导

在波传播问题中(其中的物理现象由波动方程或其他偏微分方程描述)三维空间的局部扰动衰减的很快. 为了在三维空间有效交流，能量必须限制在二维或一维. 波导就是为了这个目的而对电磁波(光)或声波(声音)引入的. 典型的波导是圆形横截面的长空心管，将会看到，波导可以设计得允许电磁波或声波作一维传播. 声波满足三维的波动方程

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).}\tag{14.3.1}$$

而电磁波则满足一个更复杂的波动方程组，这是因为电场和磁场的不同分量通过各种边界条件而耦合在一起. 不过分析了这些电磁波的数学方法与声波的是一样的，所以为简化讨论，这里只研究三维的波动方程(14.3.1).

对波导的分析中有几个新想法，下面将尽可能使数学上的分析容易接受. 所以这里研究矩形截面的波导而不是更切合实际的圆形截面(见图14.3.1)，矩形波导($0<y<L$, $0<z<H$)用到的是傅里叶级数的三角函数，而圆形波导则需要

628

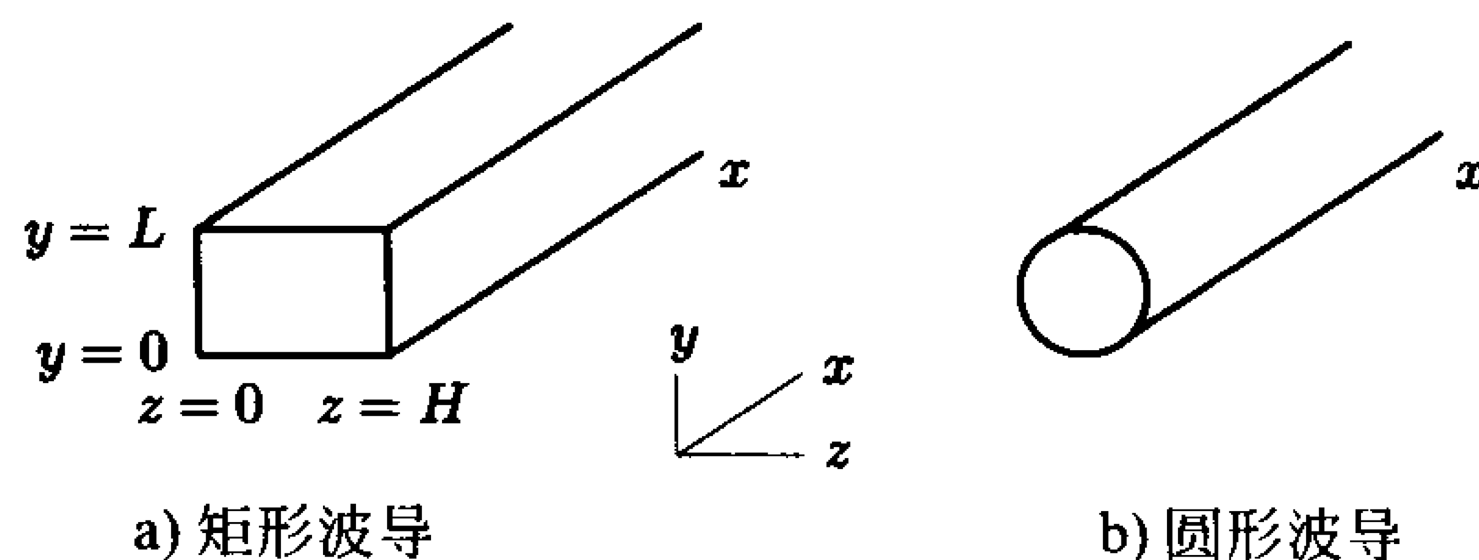


图 14.3.1

贝赛尔函数．圆形波导的讨论留作习题，相信在理解了矩形波导之后，圆形波导中就没有什么新问题了．

关于电磁波，对不同的现象要应用不同的边界条件．选择研究在波导边界 $u=0$ 的边界条件．对此边界条件，偏微分方程(14.3.1)解的形式为

$$\boxed{u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}\sin\frac{n\pi y}{L}\sin\frac{m\pi z}{H},} \quad n=1,2,3,\cdots \text{ 和 } m=1,2,3,\cdots, \tag{14.3.2}$$

与在 y 和 z 方向的傅里叶正弦级数对应．在 x 方向的行波 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$ 则对应关于 x 的傅里叶变换，(14.3.1)的初值问题的解通过关于 n 和 m 求和以及关于 k 积分得到．把(14.3.2)代入(14.3.1)给出波导的所有固有频率 ω，色散关系是

$$\omega^2 = c^2\left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2\right], \quad n=1,2,3,\cdots \text{ 和 } m=1,2,3,\cdots. \tag{14.3.3}$$

这也可以由分离变量得到．重要的是分清 k 的连续特性和 n 与 m 的离散特性．每个解(14.3.2)称为波导的一个模式．它们构成一个二重无穷模式族 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$和 $m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$，而每个模式(固定 m 和 n)都是色散的．群速度由(14.3.3)对波数 k 求导 $2\omega\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k=2c^2k$ 得到：

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = c^2\frac{k}{\omega}.$$

波导的群速度和相速度 ω/k 有相同的方向，并且向左行进的波有向左行进能量(对其他偏微分方程，相位和能量的传播不必要在相同的方向上)．图 14.3.2 给出了前几个模式中，频率为波数函数的图像．最小固有频率称为截断频率，这样命名的原因见后．此时 $n=1$，$m=1$ 以及 $k=0$(无限长波)： [629]

$$\omega_c = c\sqrt{\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2}. \tag{14.3.4}$$

让波传播出现在波导中是通过用调制频率 ω_f 按某种方式调制波导来实现的．粗略地说，与共鸣有关系．后面要证明：如果调制频率比截断频率大($\omega_f>\omega_c$)，某种共鸣就是可能的，波就会以常振幅沿波导传播．给定调制频率 $\omega=\omega_f$，色散关系(14.3.3)确定要传播的波数 k_f (对每个 n 和 m)：

$$k_f \equiv \pm\sqrt{\frac{\omega_f^2}{c^2} - \left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2\right]}.$$

能够传播的波的个数依赖 ω_f. 由图 14.3.2 可以看出，ω_f 越大，能够传播的模式就越多．下面会证明：如果调制频率小于截断频率($\omega_f<\omega_c$)，系统的响应则要小得多.

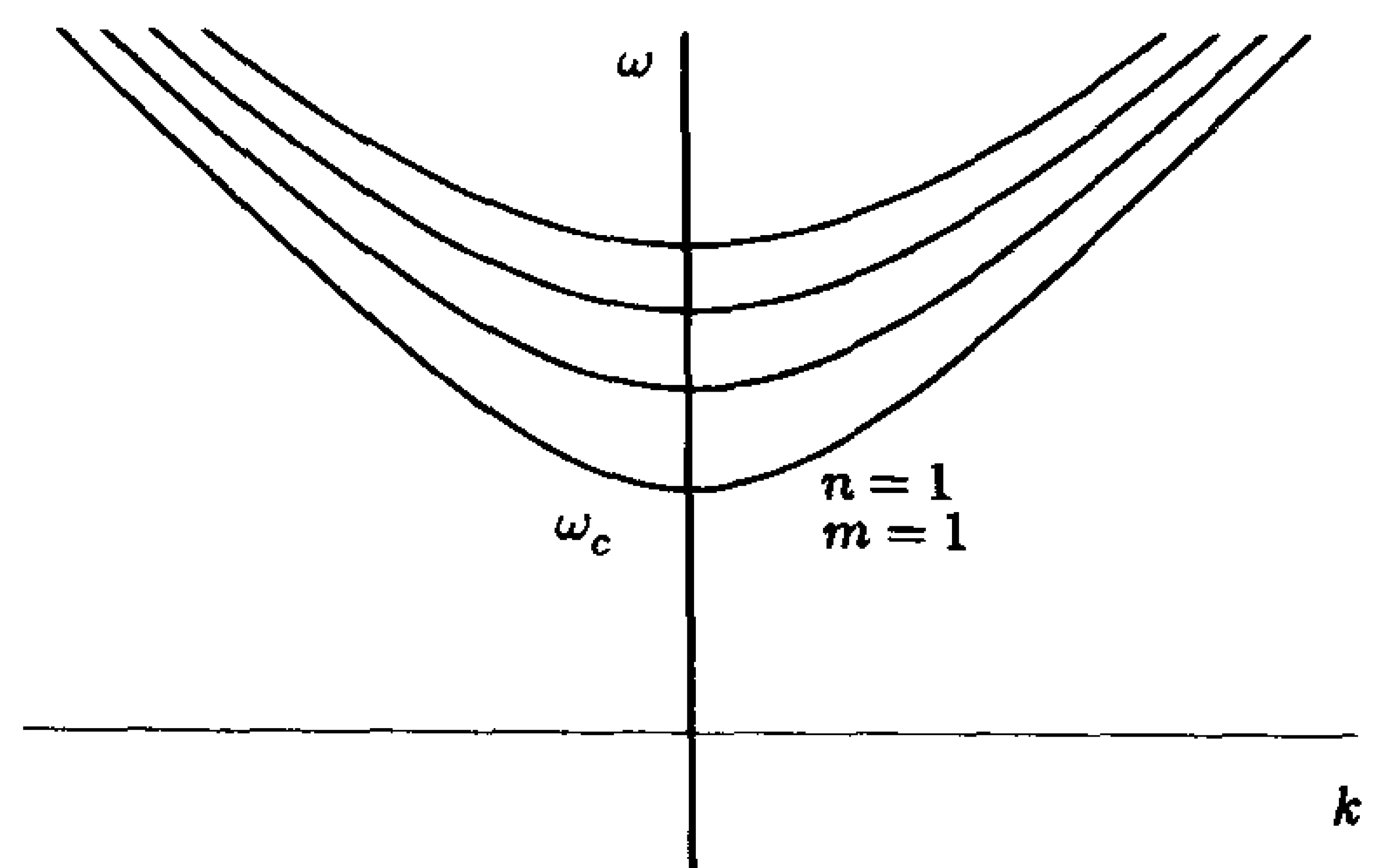


图 14.3.2 波导不同模式的色散关系

14.3.1 对 ω_f 频率集中周期性源的响应

为了理解波导响应周期源的方式，考虑波导内在 $x=x_0$，$y=y_0$，$z=z_0$ 点调制频率为 ω_f 的集中周期源：

[630]

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_f t}\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0).} \tag{14.3.5}$$

仍取同样的边界条件：在边界上 $u=0$. 因此寻求 y 与 z 的二重傅里叶正弦级数形式的解

$$u(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}(x,t)\sin\frac{n\pi y}{L}\sin\frac{m\pi z}{H}. \tag{14.3.6}$$

振幅 A_{nm} 满足方程(为方便起见丢掉其下标)

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - c^2\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2\right]A + \frac{4}{LH}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_f t}\delta(x-x_0)\sin\frac{n\pi y_0}{L}\sin\frac{m\pi z_0}{H}. \tag{14.3.7}$$

每个模式的振幅都满足(14.3.7)，这是带有附加恢复力和集中周期源的一维波动方程(在波导的 x 方向传播). 由(14.3.7)有简单周期强制项，就可以找到(14.3.7)带有同样周期强制的特解：

$$A(x,t) = G(x,x_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_f t}, \tag{14.3.8}$$

其中沿波导的每个模式(固定 n 和 m)的一维格林函数 $G(x,\ x_0)$ 满足：

$$c^2\frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}x^2} + \left\{\omega_f^2 - c^2\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2\right]\right\}G = \frac{4}{LH}\delta(x-x_0)\sin\frac{n\pi y_0}{L}\sin\frac{m\pi z_0}{H}. \tag{14.3.9}$$

14.3.2 模式传播的格林函数

既然(14.3.9)的右段是在空间中的狄拉克 δ 函数，那就用第 8 章所述的步骤求解这个微分方程：在 $x<x_0$ 和 $x>x_0$ 上用齐次解和跳跃条件．齐次解有调制频率 ω_f 大于或小于第 nm 模式固有频率的两种情形.

如果调制频率大于某个模式的固有频率式(m 和 n 固定)，齐次解是 $\sin k_f x$ 和 $\cos k_f x$，其中的 k_f 正好是对指定的频率 ω_f 由色散关系(14.3.3)得到的波数：$k_f\equiv\sqrt{\frac{\omega_f^2}{c^2}-\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2\right]}$. 然而，关于 x 的微分方程(14.3.9)没有任何 x 的边界条件，即使要求解对 x 有界，所有的解对 x 已经是有界的了．没有简单而数学上严格的方法能导出唯一的格林函数. 为此这里用(来自更高深数学的)辐射条件．利用等价齐次解 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}k_f(x-x_0)}$ 看得更清楚．根据(14.3.8)，为了得到第 nm 模式的振幅，必须乘以 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_f t}$. 因而，第 nm 模式的齐次解相应的是 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}k_f(x-x_0)-\mathrm{i}\omega_f t}$. 这些可以看成能量向左传播和向右传播的一维波．由于在 $x=x_0$ 有一个源，辐射条件断言 $x>x_0$ 时，波带着能量向右传播，而 $x<x_0$ 时，波带着能量向左传播．这样(如果 ω_f 大于第 nm 模式的固有频率)，就导出格林函数为

[631]

$$G(x,x_0) = \frac{4}{2\mathrm{i}k_f LHc^2}\sin\frac{n\pi y_0}{L}\sin\frac{m\pi z_0}{H}\begin{cases}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_f(x-x_0)} & \text{对 } x>x_0\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_f(x-x_0)} & \text{对 } x<x_0,\end{cases}$$

其中应用了由(14.3.9)给出的跳跃条件

$$\left.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0-}^{x=x_0+} = \frac{4}{LHc^2}\sin\frac{n\pi y_0}{L}\sin\frac{m\pi z_0}{H}.$$

这样第 nm 模式的振幅就很简单并且对应在波导内(由于集中源)能量向外传播的波，如果调制频率 ω_f 大于那个模式的固有频率．由于 ω_f 是给定的，波数就是离散的. 由(14.3.6)可知，波

导中的解是波数为 k_f 的能量向外传播的电磁波或声波的和，其中 k_f 对应着给定的调制频率 ω_f. 这些解都是行波；在离开波源后，它们也不随空间和时间衰减.

14.3.3 模式不传播的格林函数

下面继续考虑生成结构为 $\sin\frac{n\pi y}{L}\sin\frac{m\pi z}{H}$ 横截波导的第 nm 模式的响应部分. 这个由集中源生成的模式的振幅满足(14.3.9). 如果调制频率 ω_f 小于第 nm 模式的固有频率，(14.3.9)的齐次解不再是正弦而是增长和衰减的指数函数 $e^{\pm\beta_f x}$，其中 $\beta_f=\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2-\frac{\omega_f^2}{c^2}}>0$. 仍然要求解对 x 是有界的. 这样，解对 $x<x_0$ 和 $x>x_0$ 都必须是指数衰减的. (14.3.9)的格林函数就是

$$G(x,x_0)=\frac{4}{-2\beta_f LHc^2}\sin\frac{n\pi y_0}{L}\sin\frac{m\pi z_0}{H}\begin{cases}e^{-\beta_f(x-x_0)} & 对\ x>x_0\\ e^{\beta_f(x-x_0)} & 对\ x<x_0\end{cases}.$$

例如对 $x>x_0$，就得到三维波动方程的一个简单精确基本解 $u=Be^{-\beta_f x}\sin\frac{n\pi y}{L}\sin\frac{m\pi z}{H}e^{-i\omega_f t}$ 也叫做消失波.

14.3.4 设计思路

常常希望设计这样的一个波导，只有一个波以给定的频率传播. 不然，由两个或更多相同频率的不同波长波组成的信号较复杂. 但这只对最低频率模式(其中 $n=1$，$m=1$)容易实现. 设计一个波导，使得所要的频率略大于截断频率. 对于满足三维波动方程的方形波导($L=H$)，$\omega_c=\frac{c\pi}{L}\sqrt{2}<\omega_f$，接下来的最低频率对应 $n=1$ 和 $m=2$(或 $n=2$，$m=1$)：$\omega_2=\frac{c\pi}{L}\sqrt{5}$. 为了保证只有频率为 ω_f 的一个波传播，要求 [632]

$$\frac{c\pi}{L}\sqrt{2}<\omega_f<\frac{c\pi}{L}\sqrt{5}.$$

如果电磁波或声波传播的材料确定了，就知道了 c. 那么边长 L 要满足

$$\frac{c\pi}{\omega_f}\sqrt{2}<L<\frac{c\pi}{\omega_f}\sqrt{5}.$$

习题 14.3

14.3.1 考虑如下的二维波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$，其中在 $y=0$ 和 $y=L$ 上，$u=0$.

(a)确定色散关系.

(b)确定截断频率.

(c)对于什么样的调制频率，才会只有一个波传播.

14.3.2 对边界条件在 $y=0$ 和 $y=L$ 上，$\partial u/\partial y=0$，重做习题 14.3.1($n=0$ 时不是一个传播波).

14.3.3 在一个圆形导体 $y^2+z^2=a^2$ 内考虑三维波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$，在 $r=a$ 上，$u=0$. 只考虑

圆对称解，其中 $u=u(r,x,t)$ 沿 x 方向传播.

(a)确定色散关系. (b)确定截断频率.

(c)对于什么样的调制频率，才会只有一个波传播.

14.3.4 重做习题 14.3.3，但是不假设解是圆对称的.

14.3.5 在一个矩形导体内考虑三维波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$，其中在 $y=0$ 和 $y=L$ 上，$u=0$，在 $z=0$ 和 $z=H$ 上 $\partial u/\partial z=0$，请回答与习题 14.3.1 同样的问题.

14.3.6 下列条件下，求传播模式所对应的格林函数：

(a)习题 14.3.1. (b)习题 14.3.2. (c)习题 14.3.4. (d)习题 14.3.5.

633

14.3.7 下列条件下，求不传播模式对应的格林函数：

(a)习题 14.3.1. (b)习题 14.3.2. (c)习题 14.3.4. (d)习题 14.3.5.

14.3.8 证明：对于允许在这一节的矩形波导中传播的行波模式，当集中源在这个模式波节上时，这个行波的振幅为零.

14.3.9 利用辐射条件(含群速度)，确定下列偏微分方程的格林函数：

*(a) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+e^{-i\omega_f t}\delta(x)$ (b) $\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+e^{-i\omega_f t}\delta(x)$

(c) $i\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+e^{-i\omega_f t}\delta(x)$(分析 $\omega_f>0$ 和 $\omega_f<0$ 两种情形)

14.4 光纤

在前一节的波导中，用空心金属导体将能量限制在一维．本节要说明能够用一种完全不同的方式将能量限制在一维．电磁波形式的信息也可以在非导体(电介质)材料如玻璃组成的波导里传播．一般的光纤是一根细玻璃芯线，它被具有不同光学特性的较厚玻璃保护套围绕，如图 14.4.1 所示．为了使问题简单些，假设保护层无限厚．下面要证明细玻璃芯线可以设计得让大部分光能在细芯中传输．为了能够较快地得到有意义的结果，不太适当地假设光纤中的物理机制是由三维波动方程描述的.

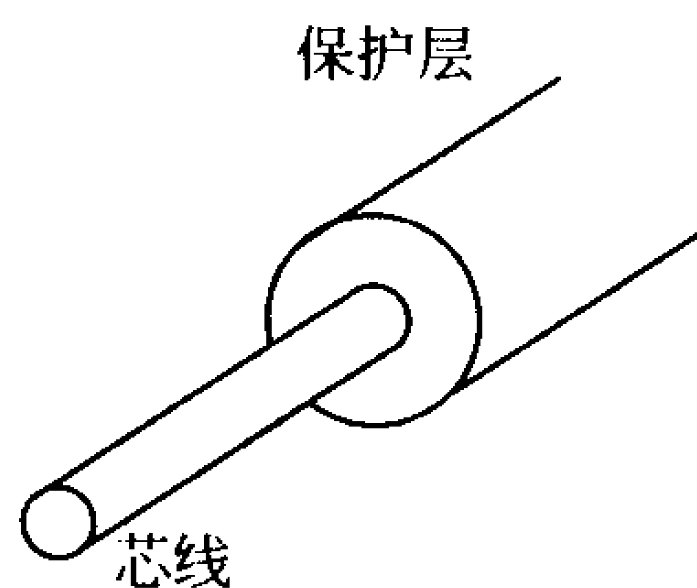


图 14.4.1 圆形截面光纤

有一个实际问题在习题中用极坐标作了分析．这里进一步简化这个问题．想象一个二维区域，它有内芯(从 $y=-L$ 到 $y=L$)和外芯在两个方向上都延伸到无穷 $y\to\pm\infty$．这个区域关于 $y=0$ 是对称的．要求所有的解都能够做成关于 $y=0$ 对称的或反对称的．这里只分析其中的一个问题，即反对称模式．因此要对 $y>0$，求解二维的波导问题，其反对称边界条件是

634

$$\text{在 } y=0 \text{ 处}, u=0. \tag{14.4.1}$$

假设在每个区域内二维的波动方程都成立(如图 14.4.2 所示)，只是传播的常数不同，两个区域的速度 c_1 和 c_2 是

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c_2^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\quad y>L} \tag{14.4.2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \quad L > y > 0.} \tag{14.4.3}$$

在这两种不同介质之间的边界上有与物理性质相关的条件．这里假设

u 和 $\partial u/\partial y$ 都在 $y = L$ 处连续　　(14.4.4)

(在电磁波的传播中 $\partial u/\partial y$ 常常是不连续的，但是在每个区域的某个物理常数乘以 $\partial u/\partial y$ 是连续的)．

希望波在 x 方向传播，即 $e^{i(kx-\omega t)}$．目的之一是确定色散关系 $\omega = \omega(k)$．而边界条件迫使解在两种介质中的水平和时间结构是一样的：

$$u = B(y)e^{i(kx-\omega t)}, \quad y > L \tag{14.4.5}$$

$$u = A(y)e^{i(kx-\omega t)}, \quad L > y > 0. \tag{14.4.6}$$

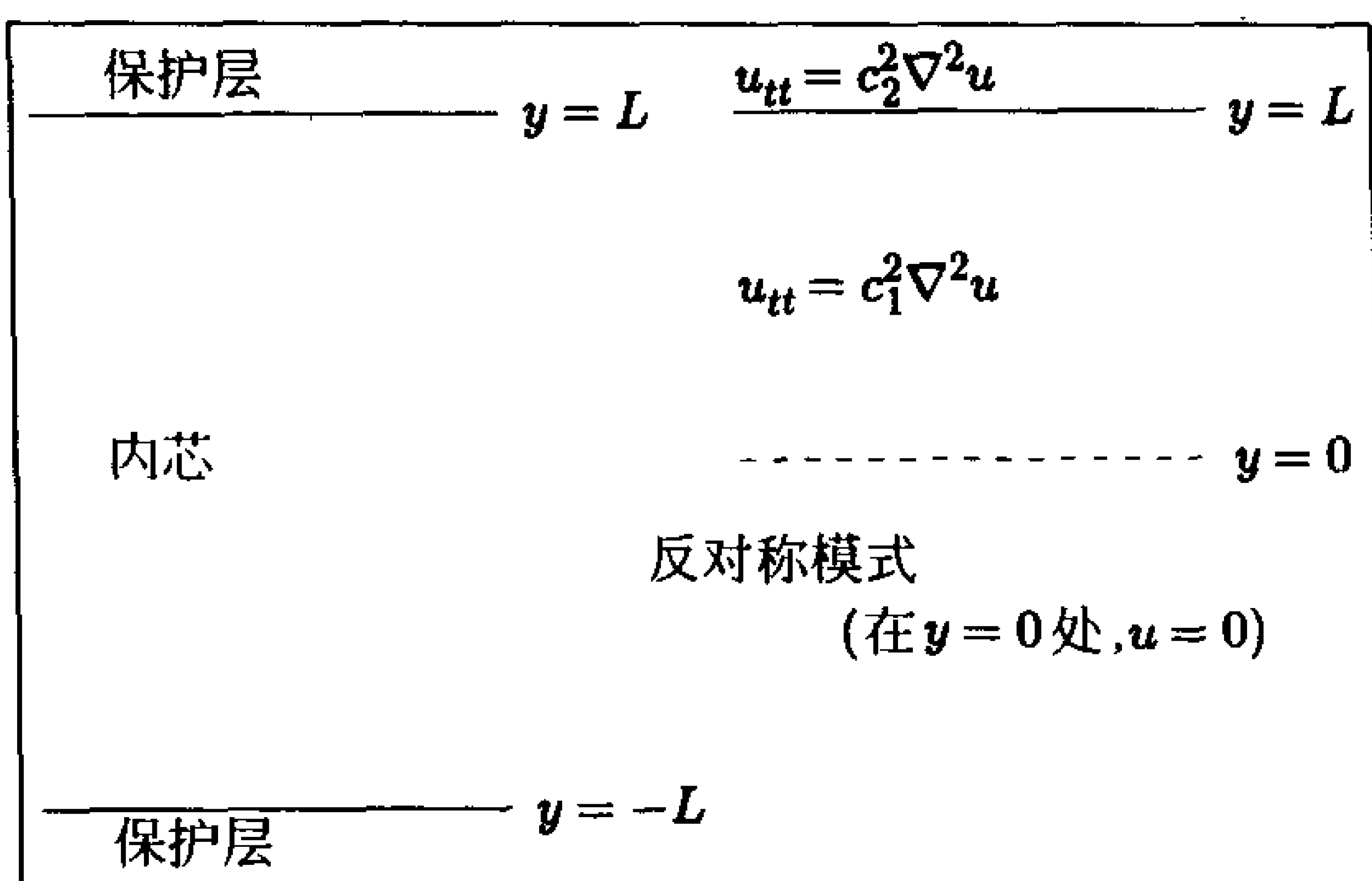


图 14.4.2　光纤的平剖面

635

将假设的行波(14.4.5)和(14.4.6)分别代入波动方程(14.4.2)和(14.4.3)，就得到了波导在两种介质横向结构中的常微分方程：

$$-\omega^2 B = c_2^2\left(\frac{d^2 B}{dy^2} - k^2 B\right) \quad y > L \quad \frac{d^2 B}{dy^2} = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}\right)B$$

$$-\omega^2 A = c_1^2\left(\frac{d^2 A}{dy^2} - k^2 A\right) \quad L > y > 0 \quad \frac{d^2 A}{dy^2} = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}\right)A. \tag{14.4.7}$$

研究那些大部分的能量在内芯 $0 < y < L$ 中传播的频率．这样就要求 ω 使得在内芯中的横向性态是振荡的而在“保护层”内是指数的：

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2} > 0 \quad 而 \quad k^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} < 0. \tag{14.4.8}$$

由(14.4.8)，频率必须满足

$$c_1 | k | < | \omega | < c_2 | k | .$$

要有这种波导，$c_1 < c_2$ 就是必要的(但不充分)．也就是，内芯中的波速必须小于保护层中的波速．在条件(14.4.8)下，(14.4.7)在内芯和保护层中的解分别是

$$u = B_0 e^{-\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{c_2^2}}y} e^{i(kx-\omega t)}, \quad y > L$$

$$u = A_0 \sin\sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2} y e^{i(kx-\omega t)}, \quad L > y > 0,$$

其中 A_0 和 B_0 是常数．这里假设了在保护层中的解是指数衰减的，并且用到了在 $y = 0$ 的反对称边界条件(14.4.1)．

色散关系由满足两种介质界面上的连续条件(14.4.4)确定：

$$B_0 e^{-\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{c_2^2}}L} = A_0 \sin\sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2} L$$

$$-B_0\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}} e^{-\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{c_2^2}}L} = A_0\sqrt{\frac{\omega_2}{c_1^2} - k^2}\cos\sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2} L.$$

这是含两个未知量(A_0 和 B_0)的两个齐次线性方程．由消元法或行列式条件可知，它们通常是零解，除非

$$\det\begin{bmatrix} \sin\sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2}-k^2}L & -\mathrm{e}^{-\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{c_2^2}}L} \\ \sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2}-k^2}\cos\sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2}-k^2}L & \sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{c_2^2}}\mathrm{e}^{-\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{c_2^2}}L} \end{bmatrix}=0.$$

636

这个条件就是所要求的色散关系：

$$\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{c_2^2}}\sin\sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2}-k^2}L+\sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2}-k^2}\cos\sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2}-k^2}L=0,$$

或者等价地，有

$$\boxed{\tan\sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2}-k^2}L=-\frac{\sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2}-k^2}}{\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{c_2^2}}}.} \tag{14.4.9}$$

对给定的 k，(14.4.9)的解 ω 就是色散关系.

在设计波导时，是先指定 ω，再由(14.4.9)确定 k. 为了确定(14.4.9)的解，在图 14.4.3 中给出了 $\beta\equiv\sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2}-k^2}L$的正切函数图像和(14.4.9)右端作为 β 函数的图像．其交点就是解．因为右端总是负的，故它的定性特征是不难看出的. 还有，右端值在 $\beta=0$ 时为 0，在 $k=\omega/c_2$ 时是无穷大$\left(\text{也就是 }\beta=\omega L\sqrt{\frac{1}{c_1^2}-\frac{1}{c_2^2}}\right)$，如图 14.4.3 所示．

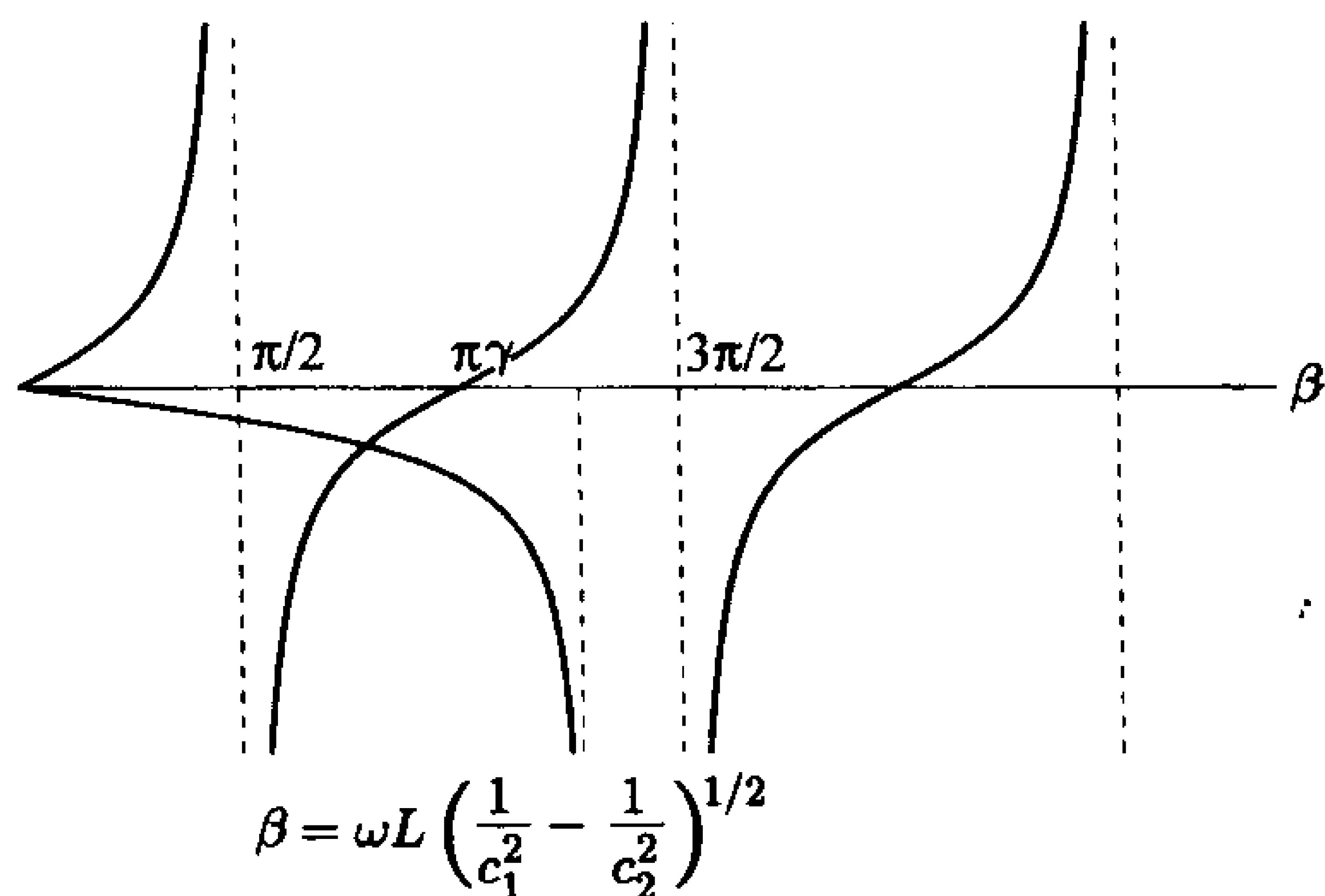


图 14.4.3 光纤中行波模式的图解

由图可知，当 $\omega L\sqrt{\frac{1}{c_1^2}-\frac{1}{c_2^2}}<\frac{\pi}{2}$时，没有交点，因而，没有模式在内芯传播．这给出了截断频率 $\omega_c=\frac{\pi}{2L\sqrt{\frac{1}{c_1^2}-\frac{1}{c_2^2}}}=\frac{\pi}{2L}\frac{c_1c_2}{\sqrt{c_2^2-c_1^2}}$，频率低于它就没有波导型模式．不过，所要的在光纤内芯只有一个模式传播的条件是$\frac{\pi}{2}<\omega L\sqrt{\frac{1}{c_1^2}-\frac{1}{c_2^2}}<\frac{3\pi}{2}$或者$\frac{\pi}{2L}\frac{c_1c_2}{\sqrt{c_2^2-c_1^2}}<\omega<\frac{3\pi}{2L}\frac{c_1c_2}{\sqrt{c_2^2-c_1^2}}$．值得注意的是当 c_2 只是略大于 c_1 时，大范围的大频率支持一个波携带其能量集中在光纤内芯传播．而所有其他的波(解)不沿光纤传播.

637

习题 14.4

14.4.1 确定由(14.4.2)和(14.4.3)所述材料使得能量主要集中于内芯的色散关系：

(a)对于对称模式.

(b)对于反对称模式，其中在两种介质界面上的边界条件为 u 和 $c\partial u/\partial y$ 都连续.

(c)对于反对称模式，其中保护层直到 $y=H>L$ 并且在 $y=H$ 处 $u=0$.

(d)对于对称模式，其中保护层直到 $y=H>L$ 并且在 $y=H$ 处 $u=0$.

14.4.2 对于反对称模式，确定(14.4.2)和(14.4.3)所述材料的色散关系，使得能量分布在整个内芯和整个保护层.

14.4.3 考虑由(14.4.2)和(14.4.3)描述的反对称模式，何种频率的波既不能在内芯中传播也不能在保护层内传播.

14.4.4 确定满足三维波动方程的圆形截面光纤的色散关系，其中 $r<L$ 时系数为 c_1，$r>L$ 时系数为 c_2(在 $r=L$ 处 u 和 $\partial u/\partial r$ 都连续)，要求能量主要集中在内芯：

(a)假设解是圆对称的.　　(b)假设解并不是圆对称的.

(c)假设解是圆对称的，但保护层直到 $r=H$ 并且在 $r=H$ 处 $u=0$.

14.5 群速度Ⅱ和稳定相位法

色散关系为 $\omega=\omega(k)$ 的线性色散偏微分方程的解具有形式

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega(k)t)}\mathrm{d}k=\int_{-\infty}^{\infty}G(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\left[k\frac{x}{t}-\omega(k)\right]}\mathrm{d}k. \tag{14.5.1}$$

函数 $G(k)$ 是和初始条件 $u(x,0)$ 的傅里叶变换有联系．尽管在固定 x 和 t 时可以数值地计算出这个积分，但这是个冗长的过程，并且对偏微分方程不会了解到什么东西．下面讨论几个基于 t 大的著名解析近似法(其中 x/t 固定). 638

14.5.1 稳定相位法

先来分析含有参数 t 的积分

$$\boxed{I(t)=\int_a^b G(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\phi(k)}\mathrm{d}k.} \tag{14.5.2}$$

后面将把有关结果用于线性色散波，其积分具有(14.5.1)的形式．如图14.5.1所示，对于大的 t 值，(14.5.2)的被积函数振荡得快．这会出现显著的抵消，以至于 $I(t)$ 对大 t 反而会小．在习题中(由分部积分)得到

$$\boxed{I(t)=O\left(\frac{1}{t}\right),\quad 若\quad \phi'(k)\neq 0.}$$

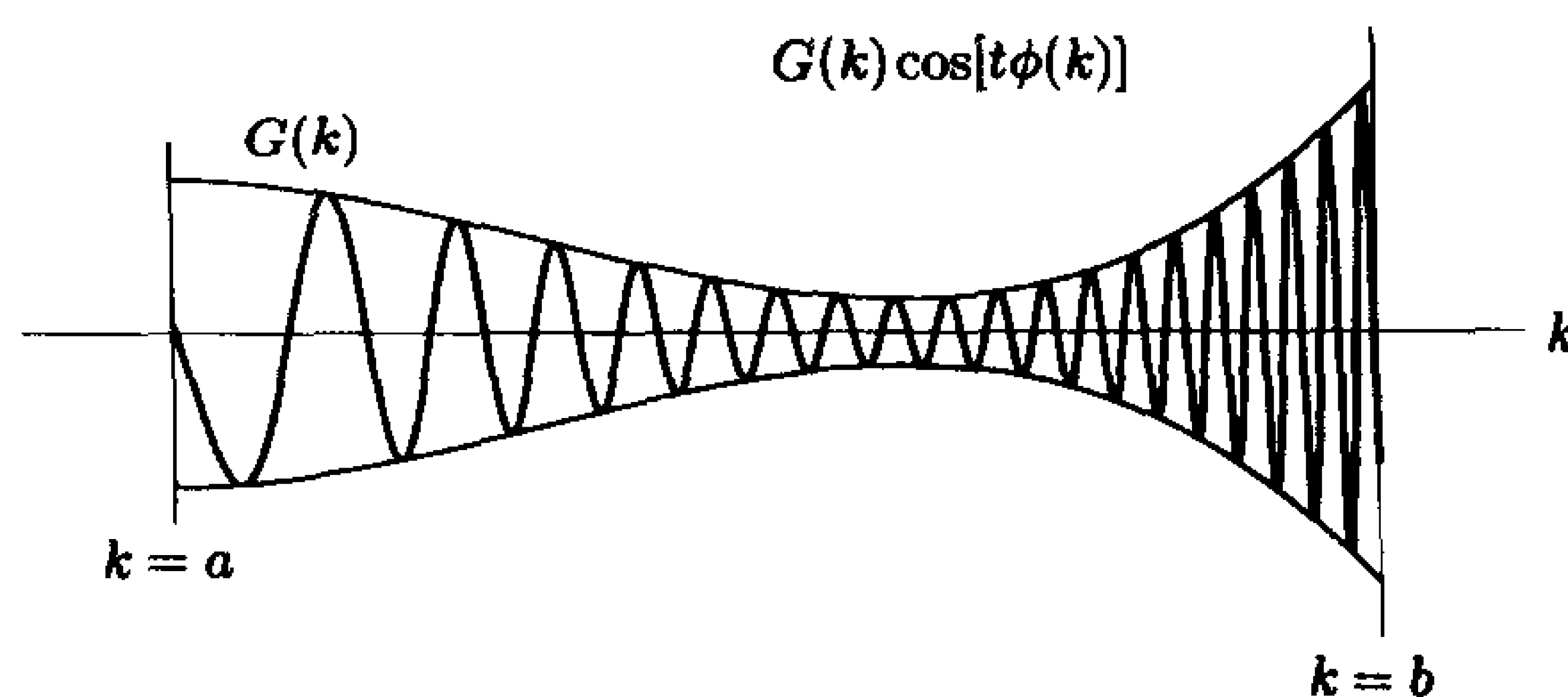


图 14.5.1　振荡积分的抵消(大 t)

由分部积分法得到的公式包括边界部分和一个积分．对于无穷区域上的积分，积分值常常小得多，这是因为边界的贡献为零，并且可以再次分部积分，也就使得积分小了．如果 $\phi(k)$ 在某处平坦($\phi'(k_0)=0$)，就减少抵消，被积函数的这些部分对积分的贡献最多．实际上，就大 t 而言，对积分(14.5.2)最大的贡献来自是稳定相位附近的点，说 k_0 是稳定的，如果

$$\boxed{\phi'(k_0)=0.} \tag{14.5.3}$$

639

先假设 $\phi(k)$ 在 a，b 之间只有一个稳定点，则对积分的最大贡献来自 k_0 的小邻域，即对大 t

$$I(t) \sim \int_{k_0-\varepsilon}^{k_0+\varepsilon} G(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\phi(k)}\mathrm{d}k,$$

其中的 ε 小(为了说明逼近的正确性，必须使 ε 在 $t\to\infty$ 时以某种方式趋于零)．还要求 $G(k)$ 可以由 $G(k_0)$ 近似(若 $G(k_0)\neq 0$)，并且 $\phi(k)$ 可以由其在 $k=k_0$ 的泰勒级数近似，由(14.5.3)：

$$I(t) \sim G(k_0)\int_{k_0-\varepsilon}^{k_0+\varepsilon} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\left[\phi(k_0)+\frac{(k-k_0)^2}{2!}\phi''(k_0)+\frac{(k-k_0)^3}{3!}\phi'''(k_0)+\cdots\right]}\mathrm{d}k,$$

若假设 ε 对大 t 足够小，使得 $\varepsilon^3 t$ 小，那么三阶项 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\frac{(k-k_0)^3}{3!}\phi'''(k_0)}$ 可近似为 1. 这样

$$I(t) \sim G(k_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\phi(k_0)}\int_{k_0-\varepsilon}^{k_0+\varepsilon} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\frac{(k-k_0)^2}{2!}\phi''(k_0)}\mathrm{d}k.$$

下面的线性变量代换简化了被积函数的指数：

$$y = (k-k_0)\left(\frac{t\,|\,\phi''(k_0)\,|}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

此时得到

$$I(t) \sim \frac{\sqrt{2}G(k_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\phi(k_0)}}{(t\,|\,\phi''(k_0)\,|\,)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\varepsilon\left(\frac{t|\phi''(k_0)|}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}^{+\varepsilon\left(\frac{t|\phi''(k_0)|}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{sign}\phi''(k_0))y^2}\mathrm{d}y.$$

可以选择 ε 使得当 $t\to\infty$ 时 $\varepsilon t^{1/2}$ 大，注意 $\varepsilon^3 t$ 必须小．(如有怀疑，可选择 $\varepsilon=t^{-p}$，$1/3<p<1/2$)这样当 $t\to\infty$ 时，积分限趋近于 $\pm\infty$，从而

$$I(t) \sim \frac{2\sqrt{2}G(k_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\phi(k_0)}}{(t\,|\,\phi''(k_0)\,|\,)^{\frac{1}{2}}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{sign}\phi''(k_0))y^2}\mathrm{d}y.$$

其中的积分就是一个数，虽然是个有趣的数．这个积分的值是

$$\int_0^\infty \cos(y^2)\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty \sin(y^2)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

640　这样，用一点小技巧(基于 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ 的代数运算)，就得到所谓的稳定相位法.

稳定相位法

积分 $I(t)=\int_a^b G(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\phi(k)}\mathrm{d}k$ 在 $t\to\infty$ 时的渐近展开可以为

$$I(t) \sim \left(\frac{2\pi}{t\,|\,\phi''(k_0)\,|}\right)^{\frac{1}{2}} G(k_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\phi(k_0)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{sign}\phi''(k_0))\frac{\pi}{4}} \tag{14.5.4}$$

[假定有简单稳定点 k_0 满足 $\phi'(k_0)=0$ 和 $\phi''(k_0)\neq 0$].

符号 ~(读作"渐近于")的意思是：右端对左端是个好逼近，并且随着 t 的增大，右端对左端的逼近在提高．这个结果的最重要部分是 $I(t)$ 对大 t 是小的，但对简单稳定点来说(假定满足 $\phi'(k_0)=0$ 和 $\phi''(k_0)\neq 0$)，稳定点附近的贡献比没有稳定点区域的贡献要大得多：

$$I(t) = O\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\right),$$

对积分的渐近近似就是被积函数在稳定点的值乘以振幅因子和相位因子．在许多应用中相移并不是特别重要的.

如果有多个稳定点，积分的近似值就是在每个稳定点基值的总和，这是因为积分在几块，使得每块中只有一个稳定点.

14.5.2 对线性色散波的应用

设线性色散偏微分方程有形式为 $e^{i(kx-\omega t)}$ 的基本解，其中 ω 满足色散关系 $\omega=\omega(k)$. 初值问题解的每个模式都有形式

$$\boxed{u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}A(k)e^{i[kx-\omega(k)t]}dk=\int_{-\infty}^{\infty}A(k)e^{it\left[k\frac{x}{t}-\omega(k)\right]}dk,}\tag{14.5.5}$$

其中 $A(k)$ 与初始条件的傅里叶变换有关．通常情况下并不能显式地求出这个积分．也可以用数值法，但这样对相应的物理过程并不能有多少了解．然而，可以用稳定相位法对大 x 和 t 导出重要的近似性态．为了用稳定相位法，假设 t 大(且 x/t 固定)．对大 t，会出现破坏性干涉，积分值也就小．对积分(14.5.5)的最大贡献来自相位稳定点 k_0

641

$$\boxed{\frac{x}{t}=\omega'(k_0).}\tag{14.5.6}$$

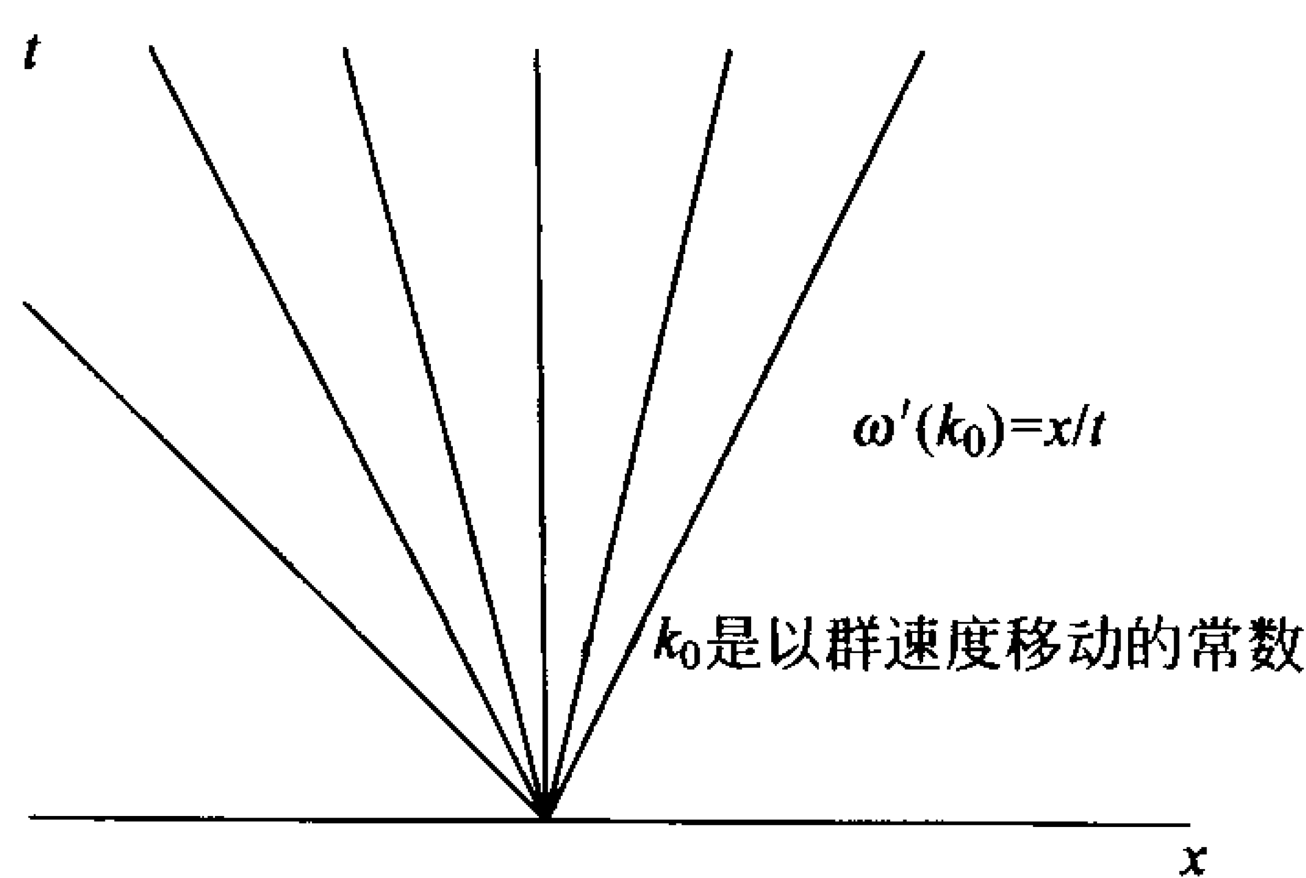


图 14.5.2 波数以群速度移动

对给定的 x 和 t，(14.5.6)确定稳定点 k_0，如图 14.5.2 所示．根据稳定相位法(14.5.4)，下面就是对大 x 和大 t 的好逼近：

$$\boxed{u(x,t)\sim A(k_0)\left|\frac{2\pi}{t\omega''(k_0)}\right|^{\frac{1}{2}}e^{i[k_0x-\omega(k_0)t]}e^{-i(\text{sign}\,\omega''(k_0))\frac{\pi}{4}}.}\tag{14.5.7}$$

注意 $\phi''=-\omega''$，其中 k_0 满足(14.5.6).(在讨论中不计通常不变的相位因子.)解(14.5.7)看起来像波数为 k_0 和频率为 $\omega(k_0)$ 的初等平面行波，其振幅衰减．由于波数和频率不是常数，这个解略显复杂些. 由于满足(14.5.6)，波数和频率与 x 和 t 有关．不过，波数和频率差不多就是常数了，因为它们对时间和空间变化得相当缓慢．因而，这个解叫*缓变色散波*．它在任何特定的位置都有特定波长的相对初等正弦波，但是经过许多个波长后，波长会有可观地变化(见图 14.5.3).

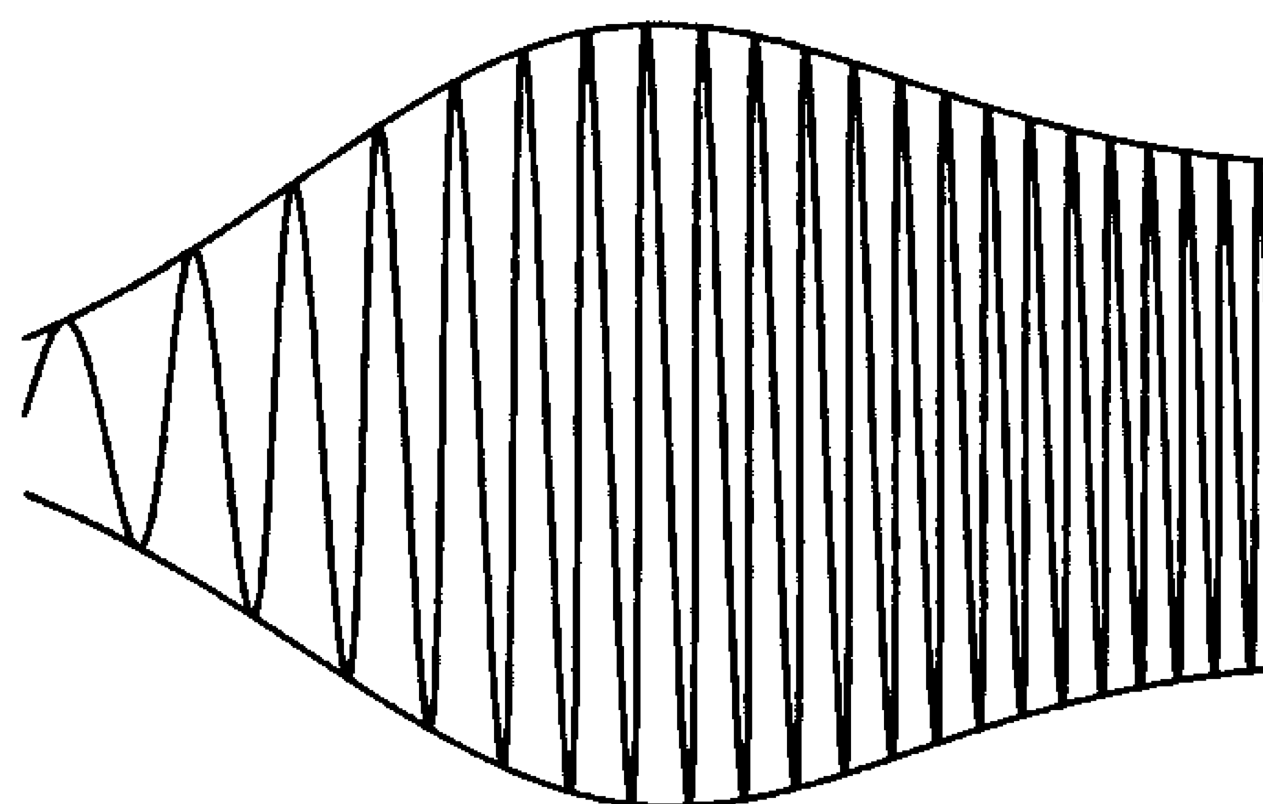


图 14.5.3 缓变色散波

方程(14.5.6)表明了群速度的重要性．波数是 x 和 t 的函数．为理解波数是如何行进的，想像这样一个初始条件：当 $t=0$ 时，每个波数都同时集中在 $x=0$ 附近．(这是一个合理的假设，因为要的是对 x 的大值逼近解，由此观点，初始条件是局限在 $x=0$ 附近的)．方程(14.5.6)表明在较后面的时间，每个波数都在它按其*群速度* $\omega'(k_0)$ *移动*的位置．更深入的讨论可以证明能量是以群速度(而不是以相速度)传播的. 能量是与所有波数

642

一起传播的. 如果有最大群速度，那么能量传播得不会比它更快. 如果一个点有 x/t 比最大群速度还大，则在那儿不会有稳定点. 如果没有稳定点，解(14.5.5)就会比用稳定相位法得到的结果(14.5.7)小得多. 也有可能有多个稳定点(此时，解就是(14.5.7)这种形式项的和).

由于偏微分方程是色散的，所以振幅(在 $t\to\infty$ 时)衰减. 解是由不同波长的波组成的，而这些波的相速度是不同的，这样解波就扩散开来(色散开了).

习题 14.5

14.5.1 考虑方程 $u_t=u_{xxx}$.

(a)求解初值问题.　(b)利用稳定相位法对大 x 和 t，逼近解.

(c)从(b)用 x 和 t 表示波数.　(d)从(b)在时空平面画出在其上波数是常数的线.

643

(e)从(b)在时空平面画出在其上相位是常数的线(称为相线).

14.5.2 考虑方程 $u_t=\mathrm{i}u_{xx}$.

(a)求解初值问题.　(b)利用稳定相位法对大 x 和 t，逼近解.

(c)从(b)用 x 和 t 表示波数.　(d)从(b)在时空平面画出在其上波数是常数的线.

(e)从(b)在时空平面画出在其上相位是常数的线(称为相线).

14.5.3 考虑色散关系 $\omega=k^3/3-k^2/2$.

(a)找出一个有这种色散关系的偏微分方程.

(b)在时空平面上，0，1，2，3，…波在什么地方?

14.5.4 假定对一个色散波，(14.5.5)成立. 假设群速度 $\omega'(k)$ 的最大值在 $k=k_1$ 处. 这也对应一个*虹焦散曲线*(参看图14.6.8).

(a)证明：若 $x<\omega'(k_1)t$，有两个稳定点；若 $x>\omega'(k_1)t$，没有稳定点.

(b)叙述(不必证明)每个区域上波包的大小次序.

(c)证明 $\omega''(k_1)=0$，并且一般有 $\omega'''(k_1)<0$.

(d)用 k_1 附近的区域近似(14.5.5)中的积分，推导出

$$u(x,t)\sim A(k_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1x-\omega(k_1)t)}\times\int_{k_1-\varepsilon}^{k_1+\varepsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[(k-k_1)(x-\omega'(k_1)t)-\frac{\omega'''(k_1)}{3!}(k-k_1)^3t\right]}\mathrm{d}k. \tag{14.5.8}$$

(e)作代换 $k-k_1=s/[t|\omega'''(k_1)|/2]^{1/3}$，引入新积分变量 s，并证明积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(ps+1/3s^3)}\mathrm{d}s$ 重要，其中 $p=[x-\omega'(k_1)t]/[t|\omega'''(k_1)|/2]^{1/3}$.

(f) 艾里函数定义为 $\mathrm{Ai}(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\left(zs+\frac{1}{3}s^3\right)\mathrm{d}s$. 不必证明它满足常微分方程 $\mathrm{Ai}''(z)=z\mathrm{Ai}(z)$. 请用艾里函数表示波解.

(g)当 $z\to\pm\infty$ 时，艾里函数具有下面著名的性质：

$$\mathrm{Ai}(z)\sim\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}|z|^{-\frac{1}{4}}\sin\left(\dfrac{2}{3}|z|^{\frac{3}{2}}+\dfrac{\pi}{4}\right) & z\to-\infty\\[2ex] \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}z^{-\frac{1}{4}}\exp\left(-\dfrac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right) & z\to+\infty.\end{cases} \tag{14.5.9}$$

644

利用这个性质，证明解在每个区域内以适当的速率衰减.

14.5.5 由分部积分法证明：若 $\phi'(k)\neq0$，由14.5.2给出的 $I(t)$ 是 $O(1/t)$.

14.5.6 (对大 t)逼近由(14.5.2)给出的 $I(t)$，其中只有一个稳定点 k_0，且满足 $\phi'(k_0)=0$，$\phi''(k_0)=0$，但 $\phi'''(k_0)\neq0$. 那么对大 t，$I(t)$ 大小的阶数是什么? 不用证明给出的结果.

14.5.7 可以看出，傅里叶正弦和余弦级数的系数对大 n 是衰减的. 如果 $f(x)$ 是连续的，$f'(x)$ 是分段光滑的，由(两次)分部积分，证明：n 很大时，

(a) $\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$　　(b) $\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$，若 $f(0) = f(L) = 0$

14.5.8 考虑方程 $u_{tt} = u_{xx} - u$.

(a)求解初值问题.

(b)利用稳定相位法对大 x 和 t 逼近解.

(c)假定群速度在 $k=0$ 时是零，群速度是稳定递增的，并且当 $k\to\infty$ 时，趋于 1. 那么有多少个波数是 x 和 t 的函数?

14.6 缓变色散波(群速度和焦散曲线)

14.6.1 色散偏微分方程的近似解

这一节说明如何得到色散偏微分方程的近似解. 这些结果中有的是由稳定相位法(及其推广)得到的. 不过，这里力求不依赖于稳定相位法一节.

线性色散波有形式为 $u(x, t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$ 的解，其中色散关系 $\omega = \omega(k)$ 是由偏微分方程得到的. 表达式

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega(k)t)}\mathrm{d}k$$

可以满足任意初始条件，只是一般过于复杂而难以直接使用. 希望考虑比基本行波解 $u(x, t) = Ae^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$ 略微复杂些的解族. 对这些基本行波解，波是振幅为常数 A 和常数 $O(1)$ 波数(波长)的周期波. 可以想象在长距离和长时间会有振幅和波数可能变化的解. 例如，这也许是由于初始条件，其中波数和(或)振幅不是常数而是随长距离缓变的. 这里引入具有缓变振幅 $A(x, t)$ 和相位 $\theta(x, t)$ 的缓变波串， 645

$$\boxed{u(x,t) = A(x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x,t)}.} \tag{14.6.1}$$

波数和频率是缓变的，由简单行波，它们可如下定义：

$$\boxed{\text{缓变波数 } k \equiv \frac{\partial\theta}{\partial x}} \tag{14.6.2}$$

$$\boxed{\text{缓变频率 } \omega \equiv -\frac{\partial\theta}{\partial t}.} \tag{14.6.3}$$

由(14.6.2)和(14.6.3)得到守恒律

$$\boxed{\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial x} = 0.} \tag{14.6.4}$$

也称为波守恒(进一步讨论参考习题 14.6.3 和 14.6.4). 对于均匀介质，即使(14.6.1)不是基本行波解，也可以推出频率 ω 满足通常的色散关系

$$\boxed{\omega = \omega(k),} \tag{14.6.5}$$

这可以由扰动法得到，但是推导中包含了较多技巧，不便在这里讨论.

若将色散关系(14.6.5)代入波守恒(14.6.4)，就确定一个一阶拟线性(真非线性)的偏微分方程，波数 $k(x, t)$ 必须满足

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\frac{\partial k}{\partial x}=0. \tag{14.6.6}$$

其初值问题可以用特征线法求解(参看 12.6 节):

$$若\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k},\quad 则\quad \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}=0, \tag{14.6.7}$$

可见波数以群速度移动保持常数. 特征线是直线, 但一般不平行(见图 14.6.1), 因为特征速度, 也就是群速度 $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$ 与 k 有关. 耦合常微分方程组是容易解的. 如果特征线(移动观察者)由其初始位置 ξ 参数化, $x(0)=\xi$, 则(14.6.7)的解是

$$k(x,t)=k(\xi,0), \tag{14.6.8}$$

其中直线特征线的方程由(14.6.7)得到

$$x=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}(k(\xi,0))t+\xi. \tag{14.6.9}$$

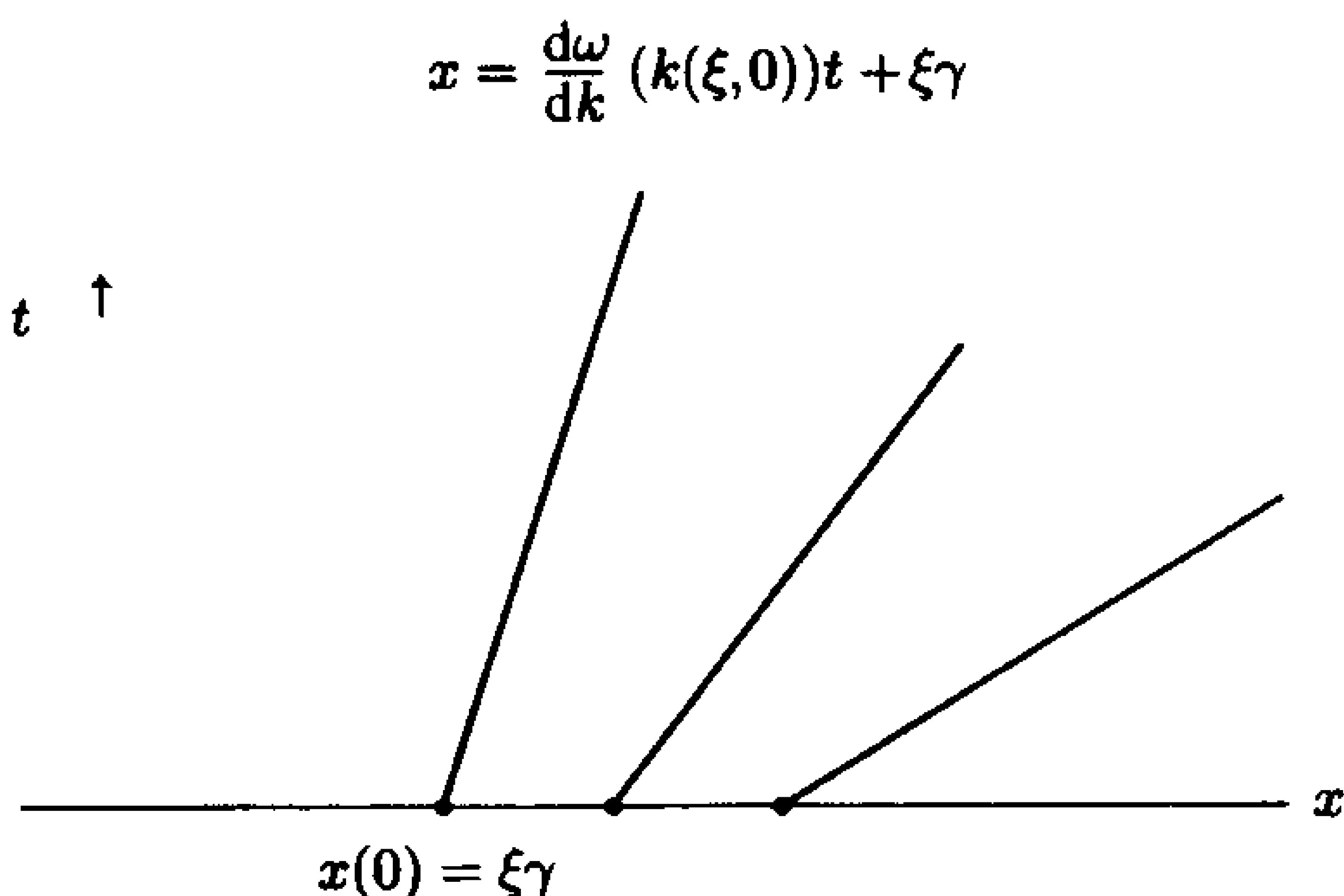


图 14.6.1 色散波传播的特征线

给定 x 和 t, 可以试着从(14.6.9)求解参数 ξ, 把 ξ 想成 x 和 t 的函数. 只要求得 $k(x, t)$, 相位就可以由对(14.6.2)和(14.6.3)的积分得到.

色散关系 $\omega=\omega(k)$ 可以由(14.6.2)和(14.6.3)解释为未知相位的非线性偏微分方程

$$-\frac{\partial\theta}{\partial t}=\omega\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right), \tag{14.6.10}$$

称为哈密顿-雅可比方程. 在现在的情形, 原本的偏微分方程就是二维波动方程, 所以(14.6.10)叫做短时距方程. 不过, 求解 θ 方程(14.6.10)最简单的方法是前面所讲的特征线法(参见 12.7 节):

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\theta_t+\theta_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\omega+k\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}.$$

既然 ω 和 $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$ 只和 k 相关, 而 k 是以群速度移动的常数

$$\theta(x,t)=\left(-\omega+k\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)t+\theta(\xi,0),$$

其中 $\theta(\xi, 0)$ 是应当给定的初始相位. 由(14.6.9), 在物理上相位可以更直观地表示为

$$\theta(x,t)=k(x-\xi)-\omega t+\theta(\xi,0).$$

14.6.2 焦散曲线的形成

考虑色散关系为 $\omega=\omega(k)$ 的线性偏微分方程. 假定缓变波以 $u(x, t)=A(x, t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x,t)}$ 形式存在, 其中 $k\equiv\partial\theta/\partial x$, $\omega\equiv-\partial\theta/\partial t$. 波数的传播是根据非线性偏微分方程

$$\boxed{\frac{\partial k}{\partial t}+\omega'(k)\frac{\partial k}{\partial x}=0,} \tag{14.6.11}$$

它可以近似原本的线性偏微分方程. 可以用特征线法求解方程(14.6.11), 但现在要考虑其中特征线相交的问题(如图 14.6.2 示). 假定初始条件 k 是 x 的光滑

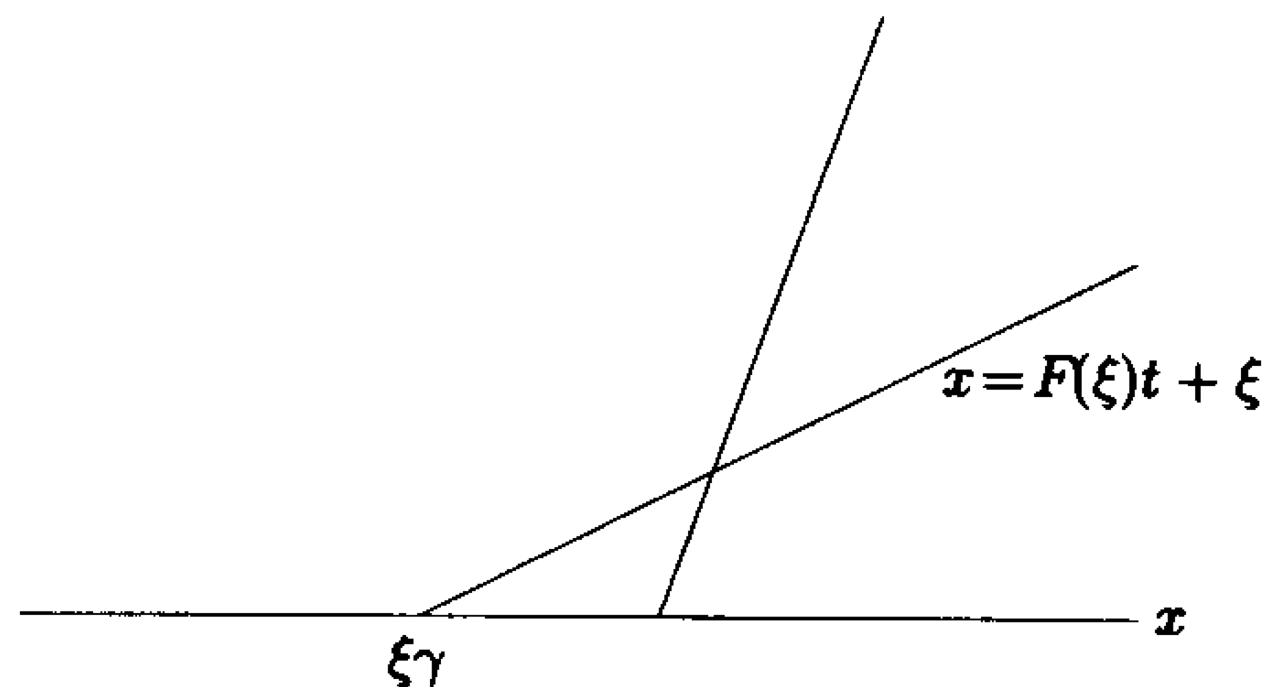


图 14.6.2 特征线相交

函数．要证明可以选择初始条件使得波数能从单值的演变为三值的．利用特征线法（若 $dk/dx=\omega'(k)$，则 $dk/dx=0$）给出

$$k(x,t)=k(\xi,0),\tag{14.6.12}$$

其中 ξ 是特征线在 $t=0$ 时刻的位置，并假定给定了 k 的初值．那么特征线的方程是

$$x=\omega'(k(\xi,0))t+\xi=F(\xi)t+\xi,\tag{14.6.13}$$

其中函数 $F(\xi)$ 是特征速度．特征线是直线，在图 14.6.2 中给出了一部分．如图 14.6.2 所示，如果右边的特征线移动得比较慢，$F'(\xi)<0$，特征线就会相交．

648

在曲线上，相邻特征线相交称为焦散（直观地看是较亮和较暗区域之间的边界）．图 14.6.3 给出了由计算机画出的一组满足（14.6.13）特征直线所生成焦散曲线．（它表明由适当缓变化，几何光学或射线理论预计振幅 $A(x,t)$ 在焦散线上变为无穷大．）这正是对光波的相同聚焦过程，由此才称之为*焦散曲线*（意思是"能燃烧的"，光聚集到点燃材料的位置）．在光波由非抛物形反射体反射可以聚集形成焦散曲线（图 14.6.4 中用到了入射角等于反射角）．如果仔细观察，就看到在焦散线内的每个点有三条反射线到达，而在焦散线外的点只有一条反射线．

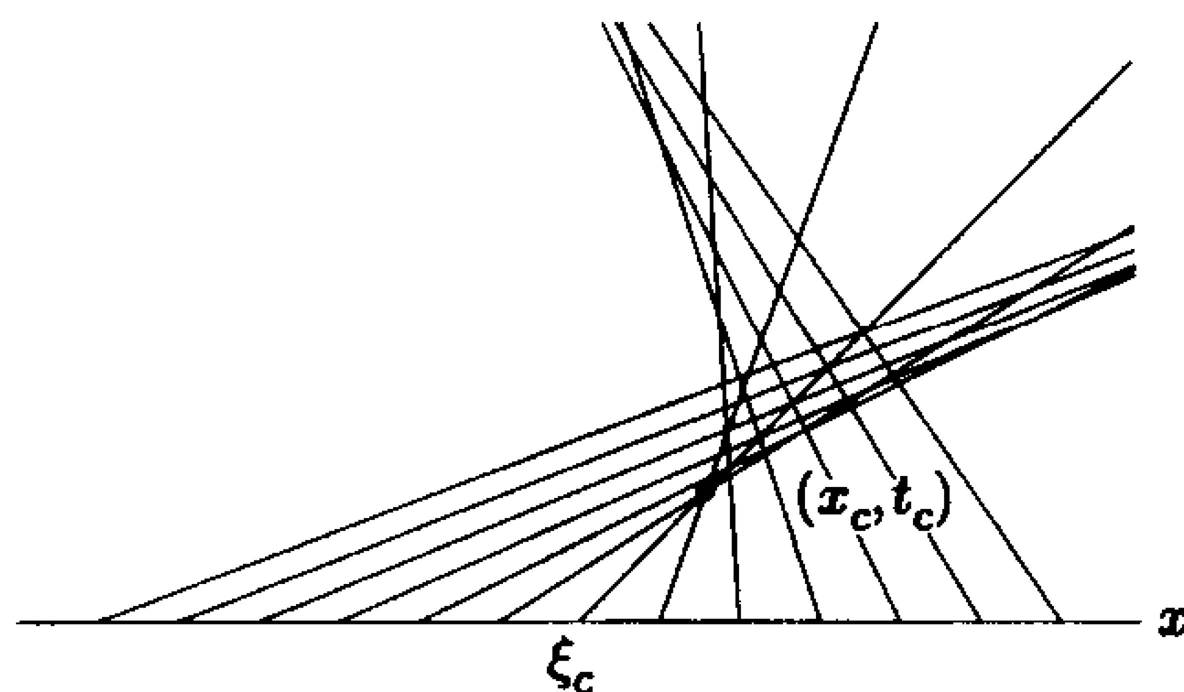


图 14.6.3 由特征线形成的焦散曲线

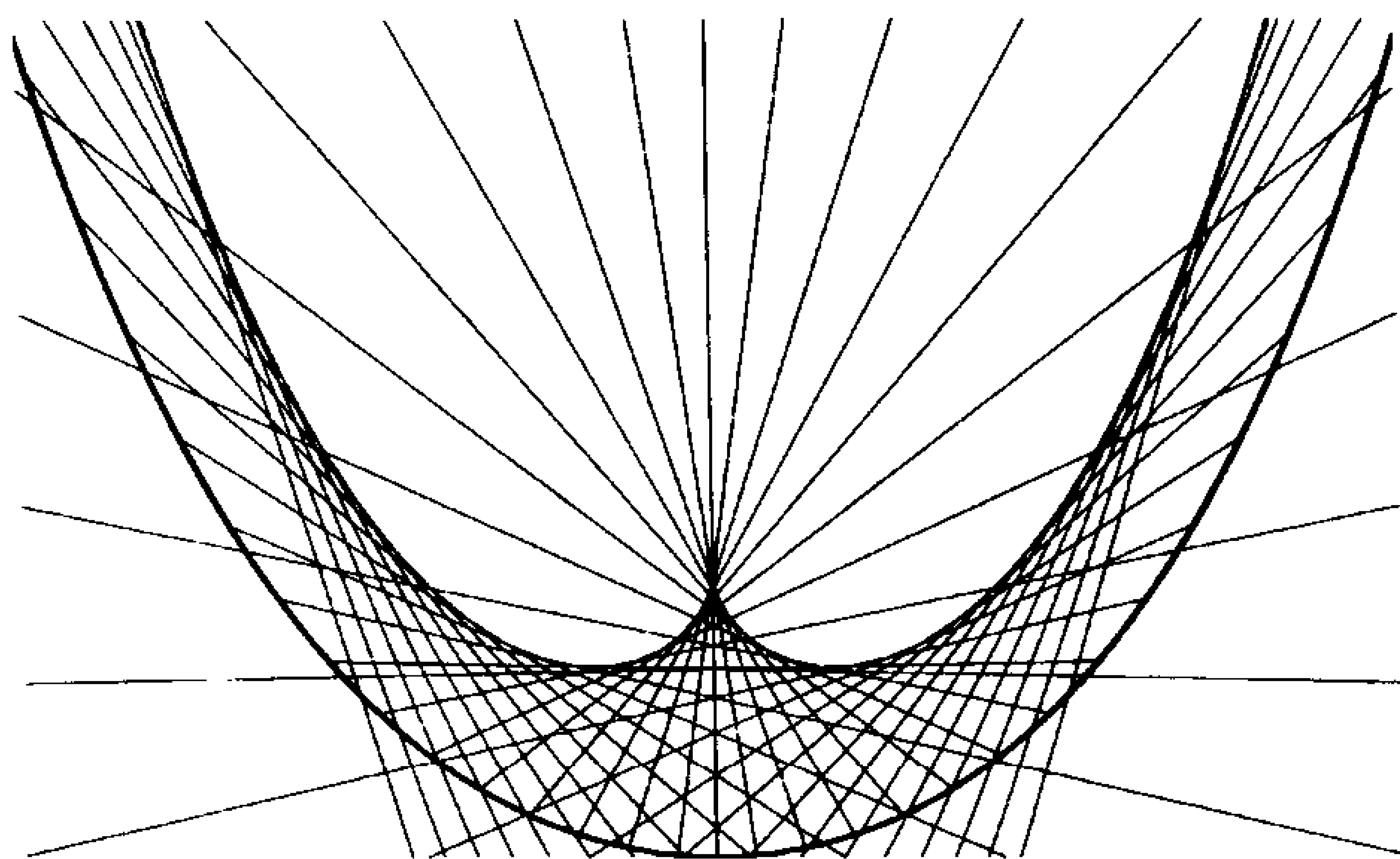


图 14.6.4 非抛物形反射体的反射线所形成的焦散曲线

可以由对（14.6.13）及其对 ξ 的导数求解（参看 12.6 节）来解析地得到焦散曲线[曲线族（14.6.13）的包络]：

649

$$0=F'(\xi)t+1 \quad 或等价地 \quad t=\frac{-1}{F'(\xi)},\tag{14.6.14}$$

它确定了（对给定特征线）焦散出现的时间．为了保证时间是正的，必须假定初始条件使得 $F'(\xi)<0$．（焦散线的空间位置是 $x=-F(\xi)/F'(\xi)+\xi$，由焦散线参数表示给出）．可以证明在焦散线上 $\partial k/\partial x$ 是无限大，使得焦散线是三值波数曲线的转向点．两个解在焦散线上合并在一起．

焦散线首先在

$$t_c = \frac{-1}{F'(\xi_c)} \quad 和 \quad x_c = F(\xi_c)t_c + \xi_c \tag{14.6.15}$$

处形成，其中 ξ_c 是 $F'(\xi)$ 有负最小值的位置(见图 14.6.5)，使得

$$F''(\xi_c) = 0 \tag{14.6.16}$$

和

$$F'''(\xi_c) > 0. \tag{14.6.17}$$

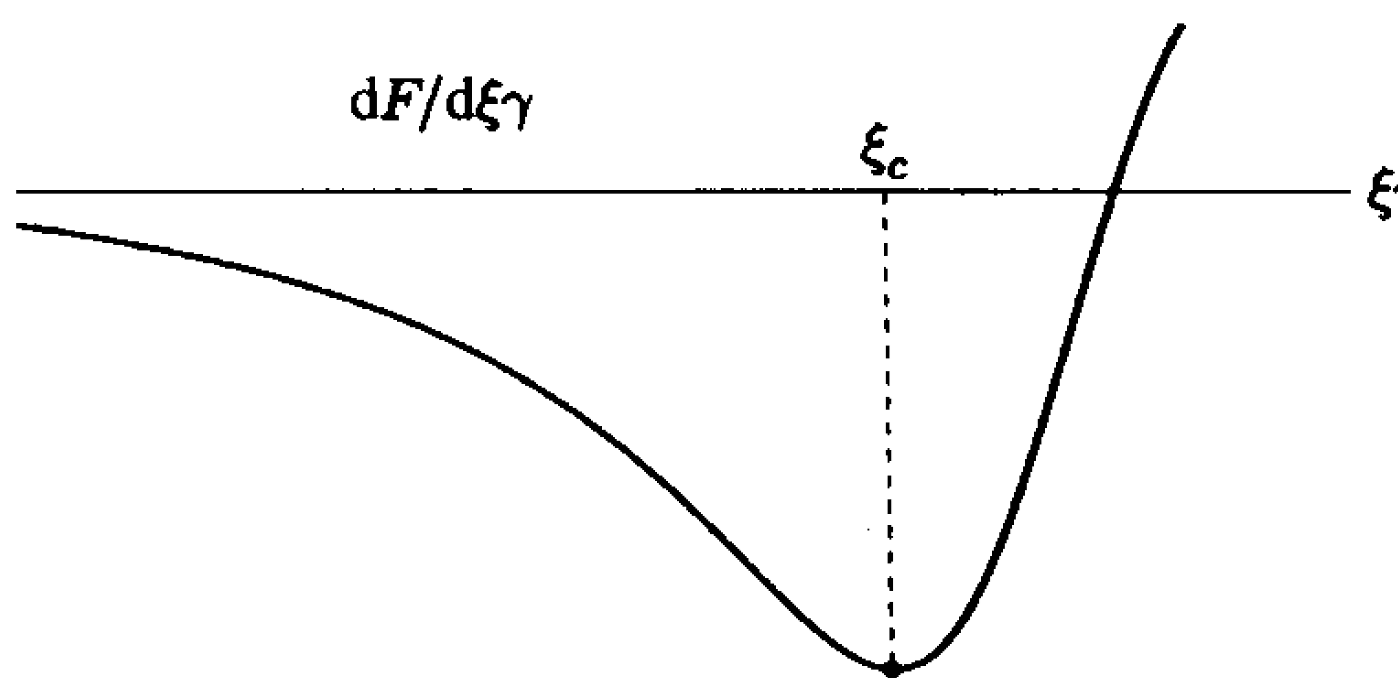


图 14.6.5 最小值(第一次相交)

下面证明焦散线在其形成的领域内是尖形的. 假定 x 靠近 x_c 和 t 靠近 t_c，使得参数 ξ 靠近 ξ_c. 解可以用 ξ 表示：

$$k(x,t) = k(\xi,0) = k(\xi_c,0) + k_\xi(\xi_c,0)(\xi - \xi_c) + \cdots. \tag{14.6.18}$$

这样，波数近似地为常数，其对空间和时间的依赖近似地与 $\xi-\xi_c$ 成比例. 为了确定 $\xi-\xi_c$ 如何依赖于 x 和 t(靠近焦散线的第一次聚焦时刻)，对 ξ_c 附近的 ξ，近似特征线(14.6.13). 由 $F(\xi)$ 的泰勒级数得到

$$x = F(\xi_c)t + \xi_c + (\xi - \xi_c)[F'(\xi_c)t + 1] + \frac{(\xi-\xi_c)^2}{2!}F''(\xi_c)t + \frac{(\xi-\xi_c)^3}{3!}F'''(\xi_c)t\cdots. \tag{14.6.19}$$

650 注意到 $t = t_c + t - t_c$，由(14.6.15)和(14.6.16)，(14.6.19)就变为

$$\boxed{x - x_c - F(\xi_c)(t - t_c) = (\xi - \xi_c)F'(\xi_c)(t - t_c) + \frac{(\xi-\xi_c)^3}{3!}F'''(\xi_c)t_c,} \tag{14.6.20}$$

在最后一项中用 t 近似了 t_c，由于 $t-t_c$ 小. (14.6.20)表明了临界特征线(群)速度 $F(\xi_c)$ 的重要性.

(14.6.20)是一个三次方程，对给定的 x 和 t，每个根对应一条特征线. 为了理解这个三次方程，引入记号 $X = x - x_c - F(\xi_c)(t - t_c)$，$T = t - t_c$ 和 $s = \xi - \xi_c$. 注意 $F'(\xi_c) < 0$，$F'''(\xi_c) > 0$，为方便，取 $F'(\xi_c) = -1$，$F'''(\xi_c)t_c = 2$，使得 X 是 s 的三次函数：

$$X = -sT + \frac{1}{3}s^3. \tag{14.6.21}$$

要对固定 T 作图，需要 $dX/ds = -T + s^2$. 注意到：若 $T<0(t<t_c)$，没有临界点，其图像在图 14.6.6 的边上，$s(X)$ 是单值的，相应着对 $t<t_c$ 只有一个根. 但是，若 $T>0(t>t_c)$，如图 14.6.6 所示，有两个在 $s = \pm T^{1/2}$ 处对应焦散的初等临界点. 对 $t>t_c$，在焦散区域中有三个实根，见图 14.6.6 和 14.6.7. 在此尺度中，焦散线满足 $-T+s^2=0$，有 $s=\pm T^{1/2}$. 由(14.6.21)，焦散线位于 $X = s(-T+s^2/3) = 2sT/3 = \pm 2T^{3/2}/3$，且是尖形的(见图 14.6.7)，因为在 $t=0$，$dx/ds = F(\xi_c)$.

这些特征线形成一条焦散曲线. 如图 14.6.3 所示，对非抛物形反射体的反射线形成这种焦散线. 在焦散线附近导出的非线性偏微分方程(14.6.11)的近似不再成立. 为此，必须回到原本的偏微分方程而得到不同的解. 特征线法所预见的三值解是有意义的，它对应了三个缓变波的线性叠加. 这将在下一节中作解释. (当特征线相交并形成焦散曲线时，能量集中了，振幅急剧增加了，虽然并不是如缓变理论、射线理论或几何光学所说的无穷大.)

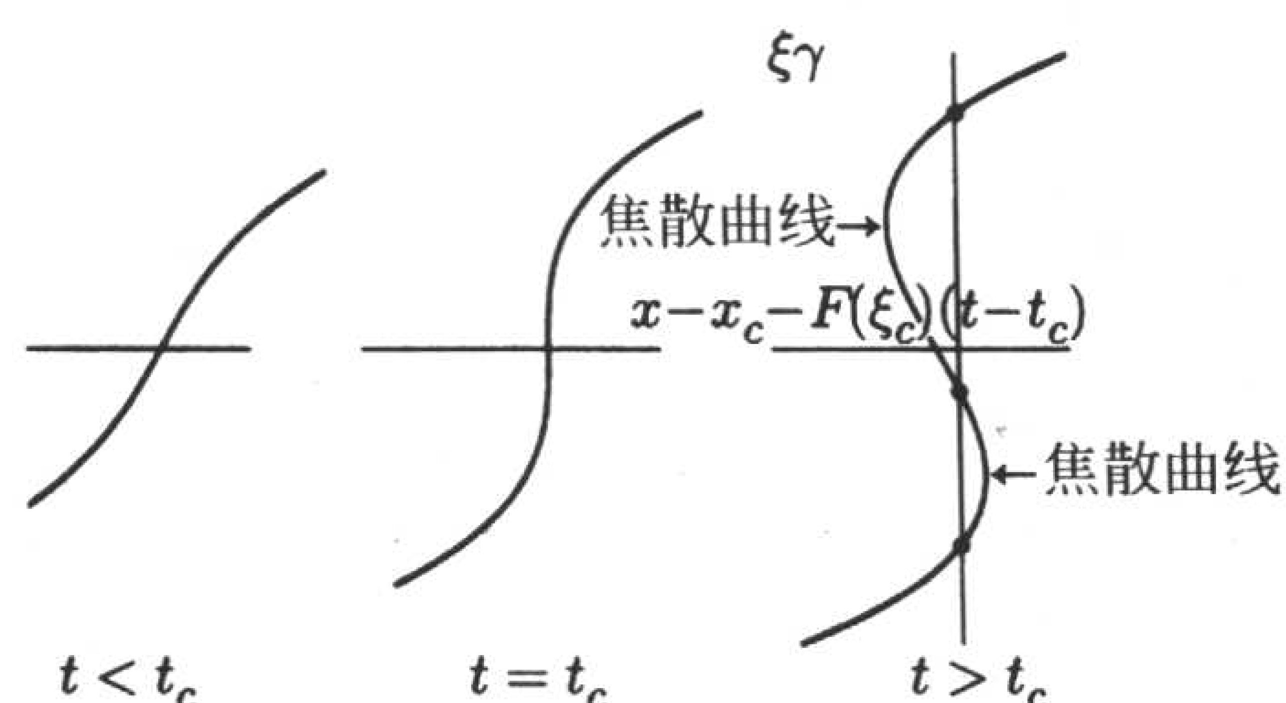


图 14.6.6 光滑解变为三值的

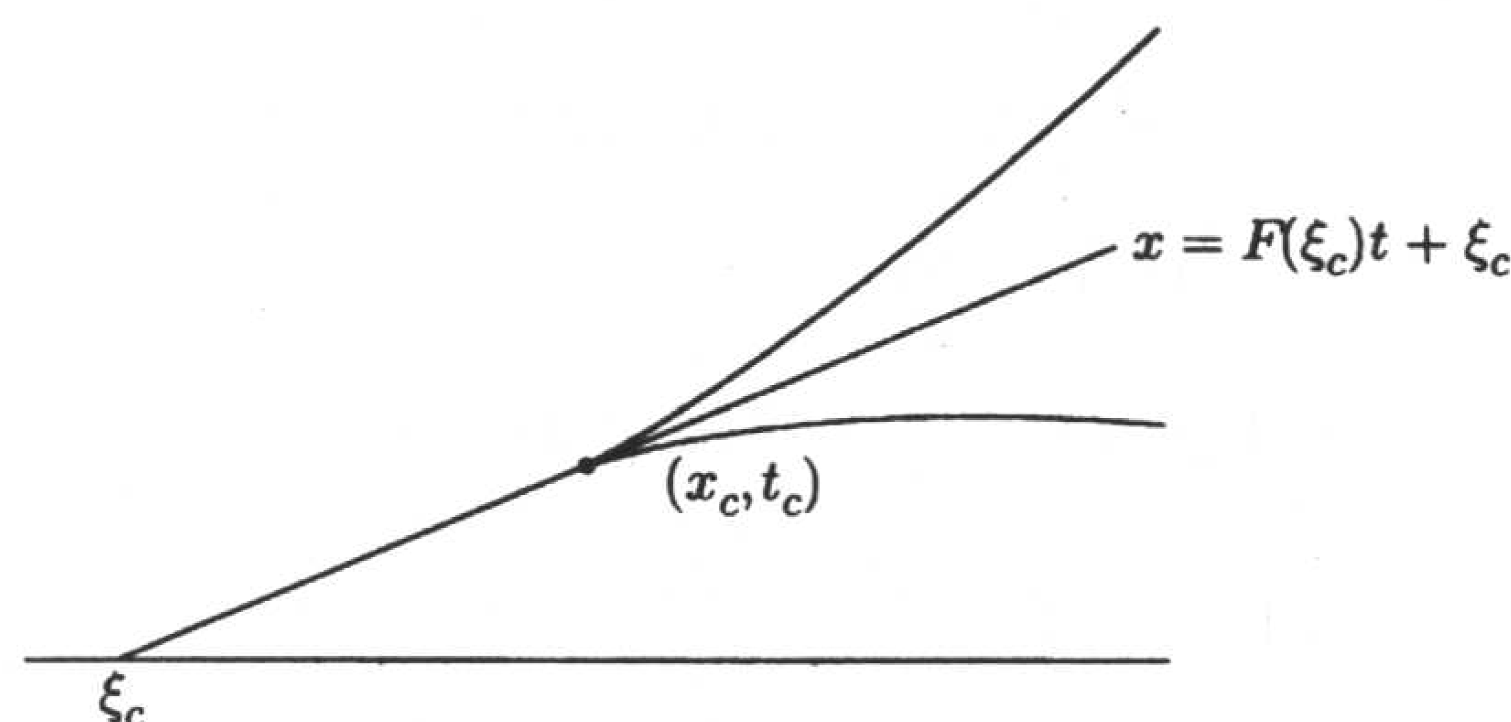


图 14.6.7 带尖的焦散曲线

焦散曲线(离开尖点)的弯曲部分的情况在习题 14.6.5 和 14.7.1 中讨论. 习题 14.5.4 和 14.7.2 节讨论了用两条射线分出一个无特征线区域的直线焦散曲线. 这就是对彩虹的解释. 来自太阳的平行光线(见图 14.6.8)在内部反射之前穿过了水滴(由斯涅耳折射定律). 存在一个使得强度大的最小角度. 光在水中的波速有些依赖波长(颜色), 因此对不同的颜色这个最小角度略有不同. 这就给出了普通的彩虹.

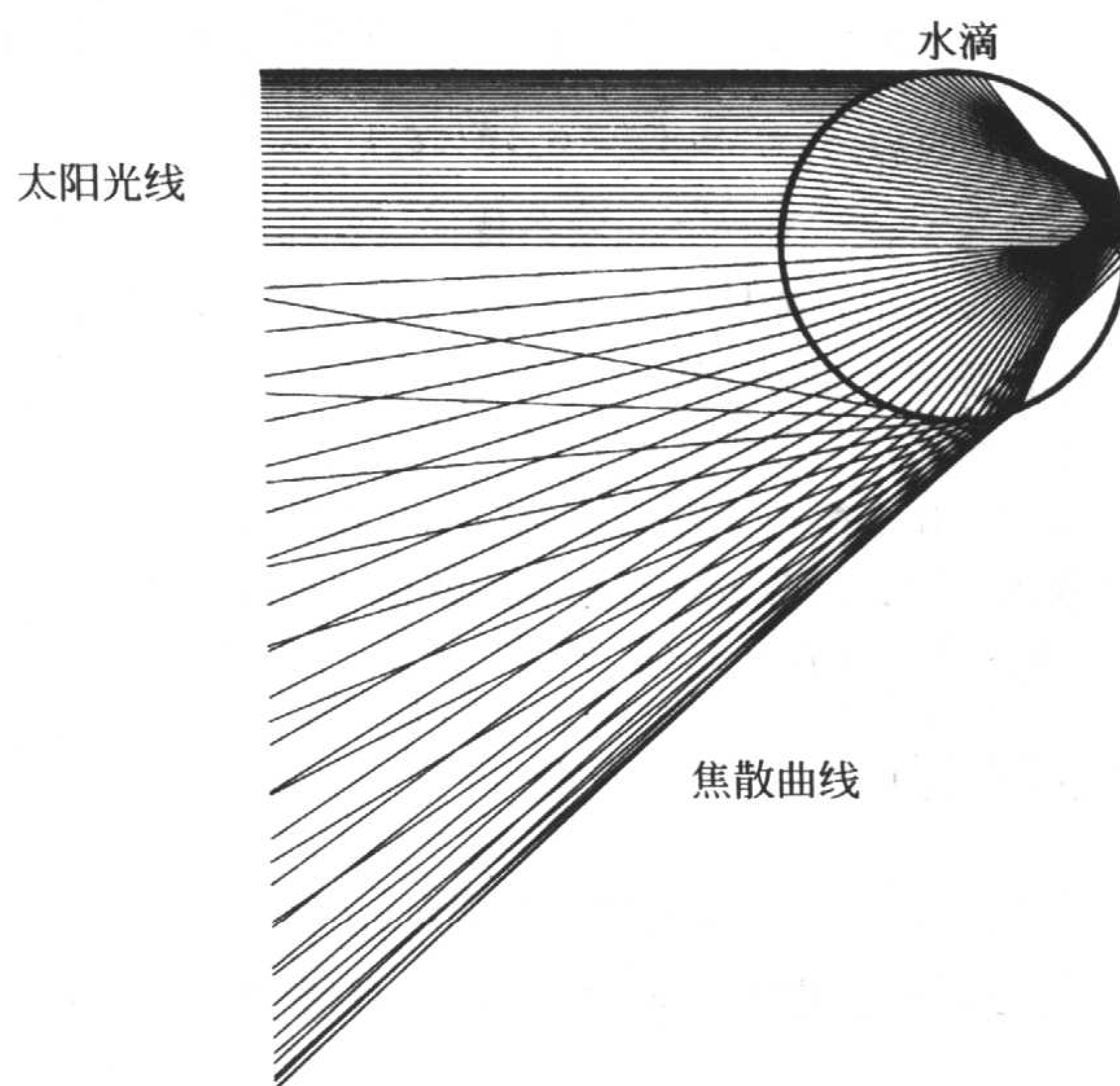


图 14.6.8 透过水滴的折射和反射形成的焦散曲线

651~652

习题 14.6

*14.6.1 用稳定相位法得到的解(14.5.7)有相位为 $\theta(x, t) = k_0 x - \omega(k_0)t$, 其中 k_0 是由对稳定点的公式(14.5.6)所给出的 x 和 t 的函数. 试确定由(14.6.2)和(14.6.3)定义的 k 和 ω.

14.6.2 在均匀矩形的波导中, 已经学过对特定的模式 $\omega^2 = c^2\left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2\right]$. 考虑均匀介质中的缓变矩形波导, 其中宽度 $L = L(x)$ 在传播方向上缓慢变化. 则

$$\omega^2 = c^2\left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{L(x)}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2\right].$$

那么波数 $k(x, t)$ 满足何种偏微分方程(不用求解)?

14.6.3 假定波数是守恒的，$k/(2\pi)$是单位空间距离内波的个数，$\omega/(2\pi)$是单位时间内波的个数．考虑在两个定点 $x=a$ 和 $x=b$ 间波的个数.

(a) 请解释为什么在 $x=a$ 和 $x=b$ 之间波的个数是$\frac{1}{2\pi}\int_a^b k(x,t)\,\mathrm{d}x$.

(b) 若波的个数是守恒的，证明$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b k(x,t)\,\mathrm{d}x = \omega(a,t)-\omega(b,t)$．

(c) 由(b)，推导出$\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial \omega}{\partial x}=0$.

14.6.4 重新做习题 14.6.3.

(a) 如果两端点不是常数而以相速度移动，为什么有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} k(x,t)\,\mathrm{d}x=0$．

(b) 由对(a)中的积分求导数，推导出$\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial \omega}{\partial x}=0$.

14.6.5 **弯曲焦散线**．分析弯曲焦散线离开尖点的一小段(见图 14.6.3)．色散波问题(14.6.11)的特征线满足(14.6.12)和(14.6.13)，在弯曲焦散线上的每个时空点$(x_c,\ t_c)$，都有一条特定的特征线 ξ_c. 对这个点的附近区域作分析，要确定其中有两条和零条特征线的区域．焦散线满足(14.6.14)，使得(14.6.15)成立．这里假设 $F''(\xi_c)\neq 0$. 并假定 ξ 在 ξ_c 附近，因此(14.6.18)仍然成立.

(a) 如果 x 在 x_c 附近，t 在 t_c 附近，证明下面的二次方程成立，而不是三次方程(14.6.20)：

653

$$x-x_c-F(\xi_c)(t-t_c)=(\xi-\xi_c)F'(\xi_c)(t-t_c)+\frac{(\xi-\xi_c)^2}{2!}F''(\xi_c)t_c. \tag{14.6.22}$$

(b) 由(14.6.22)，试问在哪个区域有两条和零条特征线？并证明该结论与函数 $F''(\xi_c)$的符号有关．

14.6.6 考虑方程$\partial u/\partial t=\beta(x,\ t)\partial^3 u/\partial x^3$，其中$\beta(x,\ t)$是缓变系数．色散关系是 $\omega=\beta(x,\ t)k^3$：

(a) 如果$\beta(x,\ t)$是常数，确定 k 和特征线.

(b) 如果$\beta(x,\ t)$是常数，确定沿特征线的相位 θ.

(c) 如果$\beta(x,\ t)$不是常数，什么微分方程能够确定 k 和特征线.

(d) 如果$\beta(x,\ t)$不是常数，什么微分方程可确定沿特征线的相位 θ.

(e) 如果只是$\beta(t)$，请确定特征线和 θ.

14.7 波包络方程(集中波数)

对于线性色散偏微分方程，有波数 k 为常数形式为 $u(x,\ t)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega(k)t)}$ 的平面行波．最一般情形有些难以分析，因为它利用傅里叶变换涉及了所有波数的叠加．更多的了解是通过考虑几种重要的特殊情况取得的.

在 14.6 节，假定波数是缓变的，而这里假定大部分能量集中到一个波数 k_0. 假定原始偏微分方程解的形式为

$$\boxed{u(x,t)=A(x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0x-\omega(k_0)t)}.} \tag{14.7.1}$$

假定振幅 $A(x,\ t)$不是常数而是随时间和空间缓慢变化的. 振幅 $A(x,\ t)$起着行波波包的作用，这里的目标是确定描述波包 $A(x,\ t)$传播的偏微分方程．下面是能量集中到一个波数的方式：

1. 选择初始条件只有一个波数，但有如(14.7.1)的缓变振幅.

2. 已经知道有所有波数的任意初始条件都色散(扩展开)．波数以群速度移动的. 如果在时间和空间特殊区域内研究解，那么在这个区域内，大部分能量有可能集中到一个波数.

3. 其上波数为常数的射线可能聚焦并形成一条焦散曲线．在焦散线上能量集中在一个

波数.

下面要确定对色散波方程，波包 $A(x, t)$ 总会满足的偏微分方程．首先注意：对所有 k， 654
$u(x, t)$ 有精确解 $u(x, t) = e^{i(kx-\omega(k)t)}$，这就得到 $A(x, t)$ 满足的偏微分方程有非常特殊但简单的精确解：

$$A(x,t) = e^{i(k-k_0)x-i(\omega-\omega_0)t},$$

其中 $\omega=\omega(k)$，$\omega_0=\omega(k_0)$．又注意到 $\partial A/\partial x = i(k-k_0)A$ 和 $\partial A/\partial t = -i(\omega-\omega_0)A$. 这样就证明了作用在振幅上的一阶与高阶导数算子对应初等的乘法运算

$$-i\frac{\partial}{\partial x}\Leftrightarrow(k-k_0) \tag{14.7.2}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Leftrightarrow(\omega-\omega_0). \tag{14.7.3}$$

波振幅的偏微分方程由色散关系 $\omega=\omega(k)$ 得到．由于假定能量集中到波数 k_0，所以可以利用色散关系在波数 k_0 附近的泰勒级数展开：

$$\omega=\omega(k_0)+(k-k_0)\omega'(k_0)+(k-k_0)^2\frac{\omega''(k_0)}{2!}+(k-k_0)^3\frac{\omega'''(k_0)}{3!}+\cdots. \tag{14.7.4}$$

将 $\omega(k_0)$ 移到左端，利用算子关系，并除以 i，就给出了所有情形的波包络方程：

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial t}+\omega'(k_0)\frac{\partial A}{\partial x}=i\frac{\omega''(k_0)}{2!}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{\omega'''(k_0)}{3!}\frac{\partial^3 A}{\partial x^3}+\cdots.} \tag{14.7.5}$$

从中可看出群速度 $c_g=\omega'(k_0)$ 的重要性．这些结果也可以用扰动法得到.

14.7.1 薛定谔方程

为了有效而精确地截断泰勒展开式(14.7.4)，必须假定 $k-k_0$ 小．由(14.7.2)可知波包的空间偏导数必须小．这对应着前面暗含的缓变振幅假定．要使得波包方程(14.7.5)有效，振幅的变化一定不能超过一个波长 $2\pi/k_0$. 在(14.7.5)右端的每个振幅的空间偏导数更小．这样，如果 $\omega''(k_0)\neq0$，就可以合理地使用薛定谔方程

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial t}+\omega'(k_0)\frac{\partial A}{\partial x}=i\frac{\omega''(k_0)}{2!}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2},} \tag{14.7.6}$$

这是忽略了三阶及更高阶的偏导数的近似．在能量集中到一个波数(所谓近乎单频近似)， 655
$u(x, t)\approx A(x, t)e^{i(k_0x-\omega(k_0)t)}$，波振幅或波包满足薛定谔方程(14.7.6)．薛定谔方程是一个线性偏微分方程，有平面波解 $A=e^{i(\alpha x-\Omega(\alpha)t)}$，它的色散关系：$\Omega(\alpha)=\omega'(k_0)\alpha+\frac{\omega''(k_0)}{2!}\alpha^2$ 是二次的. 无穷区间上薛定谔方程的解可由傅里叶变换得到：

$$A(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(\alpha)e^{i\left[\alpha(x-\omega'(k_0)t)-\frac{\omega''(k_0)}{2!}\alpha^2 t\right]}d\alpha. \tag{14.7.7}$$

在这个几乎单频的近似中，色散项小．不过，如果要理解相对长时间的性态，就不能忽略色散项．为了更好地理解时间和空间的关系，把变量变换到以群速度移动的坐标系统中：

$$X=x-\omega'(k_0)t \tag{14.7.8}$$

$$T = t. \tag{14.7.9}$$

在这个移动坐标系中，薛定谔方程有如下较简单的形式：

$$\frac{\partial A}{\partial T} - \omega'(k_0)\frac{\partial A}{\partial X} + \omega'(k_0)\frac{\partial A}{\partial X} = \frac{\partial A}{\partial T} = \mathrm{i}\frac{\omega''(k_0)}{2!}\frac{\partial^2 A}{\partial X^2}.$$

这样，小的空间偏导数被小的时间导数所平衡(在移动坐标系统中).

焦散曲线. 离开焦散曲线，缓变线性色散波可以近似地用特征线法分析. 但是在特征线集中能量的焦散线附近，这种近似失效，此时解较复杂. 在焦散线的附近区域(x 靠近 x_c，t 靠近 t_c)，波能集中到一个波数[临界值 $k_c = k(\xi_c, 0)$]使得 $u(x, t) \approx A(x, t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_c(x-x_c)-\omega(k_c)(t-t_c)]}$，波振幅 $A(x, t)$ 近似地满足线性薛定谔方程，其解由(14.7.7)给出. 若在(14.7.7)中用 x 代换 $x - x_c$，t 代换 $t - t_c$，这就对应于不同的任意函数 $G(\alpha)$. 要确定复函数 $G(\alpha) = R(\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(\alpha)}$，使得与已知焦散曲线的性态一致：

$$A(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(\alpha)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[\alpha(x-x_x-\omega'(k_c)(t-t_c))-\frac{\omega''(k_c)}{2!}\alpha^2(t-t_c)\right]}\mathrm{d}\alpha. \tag{14.7.10}$$

这个精确解可以通过在相位的稳定点 α 计算来近似：

$$x - x_c - \omega'(k_c)(t - t_c) - \omega''(k_c)\alpha(t - t_c) + \Phi'(\alpha) = 0. \tag{14.7.11}$$

将(14.7.11)和基本三次方程(14.6.20)相比较，由(14.6.13)，$F' = \omega'' k_\xi$，首先可看出 $\alpha = k_\xi(\xi - \xi_c)$. 就得到 $\Phi'(\alpha) = -\alpha^3 F'''(\xi_c)t_c/(3!\ k_\xi^3)$，使得 $\Phi(\alpha) = -\alpha^4 F'''(\xi_c)t_c/(4!\ k_\xi^3)$. 这样就在有尖焦散曲线的邻域中导出解的积分表达式：

656

$$\boxed{A(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[\alpha(x-x_c-\omega'(k_c)(t-t_c))-\frac{\omega''(k_c)}{2!}\alpha^2(t-t_c)-\frac{\alpha^4}{4!}\frac{F'''(\xi_c)}{k_\xi^3}t_c\right]}\mathrm{d}\alpha,} \tag{14.7.12}$$

其中为了简单，取 $R(\alpha) = 1$. (14.7.12)就是著名的 Pearcey 积分，虽然 Brillouin 似乎是第一个研究它的. (14.7.12)的稳定点满足三次方程(14.7.11)，使得振荡相位的个数渐近地由有尖焦散曲线外面的一个变到里面的三个.

14.7.2 线性化 KdV 方程

波包一般满足的是薛定谔方程(14.7.6). 然而，如果能量集中到一个波数，并且波数对应群速度 $\omega'(k)$ 的最大值或最小值，则 $\omega''(k_0) = 0$. 通常情况下，当群速度取极值时，波包由线性化 KdV 方程来近似：

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial t} + \omega'(k_0)\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\omega'''(k_0)}{3!}\frac{\partial^3 A}{\partial x^3},} \tag{14.7.13}$$

这可直接由(14.7.5)得到. 色散项小，但相对长的时间它的作用必须保留. [对应于以群速度移动的变换(14.7.8)和(14.7.9)可能用到.]

长波. 来源于物理问题的偏微分方程往往满足奇色散关系 $\omega(-k) = -\omega(k)$，使得对应于 k 和 $-k$ 的相速度是相同的. 由此这里假定色散关系是奇的. 长波是波长比所讨论问题中其他长度尺度都长的波. 对长波，其波数 k 小. 长波的近似色散关系可由色散关系的泰勒级数得到：

$$\omega(k) = \omega(0) + \omega'(0)k + \frac{\omega''(0)}{2!}k^2 + \frac{\omega'''(0)}{3!}k^3 + \cdots = \omega'(0)k + \frac{\omega'''(0)}{3!}k^3 + \cdots, \tag{14.7.14}$$

这里用到了奇色散关系有 $\omega(0)=0$，$\omega''(0)=0$. 这样，由通常的算子假设(14.2.7)和(14.2.8)$[k=-\mathrm{i}\partial/\partial x,\ \omega=\mathrm{i}\partial/\partial t]$，长波应当满足线性化 KdV 方程

657

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\omega'(0)\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\omega'''(0)}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}.$$

还可以按另一种方式来理解. 如果能量集中到一个波(长波)$k_0=0$，由(14.7.5)就得到波振幅方程：

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\omega'(0)\frac{\partial A}{\partial x}=\frac{\omega'''(0)}{3!}\frac{\partial^3 A}{\partial x^3}+\cdots.$$

这里的解和波包都是一样的，都满足同一个偏微分方程，因为对于几乎单频波，$k_0=0$，$\omega(0)=0$，

$$u(x,t)=A(x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0x-\omega(k_0)t)}=A(x,t).$$

对(14.7.14)求导就得到(有奇色散关系)长波的群速度，$\omega'(k)=\omega'(0)+\omega'''(0)k^2/2+\cdots$所以，群速度对长波($k=0$)有最小值或最大值. 这样，最早或者最后观测到的波是长波. 要了解长波如何传播，只要研究线性化 KdV 方程就行了. 因为方程是色散的，所观测到的振幅应该很小(如稳定相位法所证明的). 大振幅长色散波一定会另有解释(参看下一节).

最大群速度和彩虹焦散线. 下面简单研究群速度 $\omega'(k)$有最大值时(由稳定相位法得到)的解. 这样 $\omega''(k_1)=0$，此时线性化 KdV 方程成立. 特别地，由习题 14.5.4 的(14.5.8)，波包满足

$$A(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[(k-k_1)(x-\omega'(k_1)t)-\frac{(k-k_1)^3}{3!}\omega'''(k_1)t\right]}\mathrm{d}k.$$

由此可见 $A(x,t)$满足线性化 KdV 方程(14.7.13)，这在理论上可由(14.7.14)得到. 利用以群速度移动的坐标系统则更容易看到这一点，此时粗略地说[由 $\omega'''(k_1)<0$]

$$A_T=-A_{XXX}.$$

对习题 14.5.4 的进一步分析表明

$$A(x,t)=\frac{1}{t^{1/3}}\mathrm{Ai}\left(\frac{x-\omega'(k_1)t}{t^{1/3}}\right),$$

其中 Ai 是艾里函数. 因而，$A(x,t)$是线性化 KdV 方程的相似解. 证明其相似解具有形式

$$A(x,t)=\frac{1}{t^{1/3}}f\left(\frac{X}{t^{1/3}}\right)=\frac{1}{t^{1/3}}f(\xi)$$

是有益的，其中的相似变量 ξ 是

$$\xi=\frac{X}{t^{1/3}}.$$

658

对 X 的导数是直截了当的($\partial/\partial X=\partial/\partial\xi\ \partial\xi/\partial X=t^{-1/3}\partial/\partial\xi$)，但是对 t 的导数必须更小心些. 线性化 KdV 方程($A_T=-A_{XXX}$)变为

$$-\frac{1}{3}\frac{1}{t^{4/3}}f+\frac{1}{t^{1/3}}f'\left(-\frac{1}{3}\frac{\xi}{t}\right)=-\frac{1}{t^{1/3}}\frac{1}{t}f''',$$

乘以 $t^{4/3}$，上式变成一个三阶常微分方程($-f/3-f'\xi/3=-f'''$)，再积分一次得到 $-f\xi/3=-f''+c$，积分常数 $c=0$(由 $\xi\to+\infty$ 时，$f\to0$)，所以线性化 KdV 方程的相似解与艾里方程有关：

$$f''-\frac{1}{3}f\xi=0.$$

这里，有两条和零条特征线的区域是由最大群速度所引起的. 两条和零条特征线的区域被直线特征线(焦散线)$x=\omega'(k_1)t$ 分开，其中 $\omega''(k_1)=0$. 这与对彩虹的特征线所发生的情况是一样的(参看图 14.6.8)，其中有一个最大群速度.

14.7.3 非线性色散波：KdV 方程

薛定谔方程(14.7.6)或线性化 KdV 方程(14.7.13)的这些振幅方程，平衡了小的空间和时间变化(特别是从移动坐标系观测时). 在物理问题中小的非线性项经常被忽略掉，而它们却常常就像小色散项一样重要. 对每个特定的应用，具体的非线性项可由多尺度的奇异扰动法得到(这超出了本书的范围). 在不同的物理问题中，这些非线性项往往有相似的形式(因为它们是作为小的但用与对振幅的泰勒级数近似非常像的有限振幅展开得到的).

对于长波，通常出现的非线性给出 KdV 方程

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}+[\omega'(0)+\beta u]\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\omega'''(0)}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}.} \tag{14.7.15}$$

若暂时忽略色散项$\partial^3u/\partial x^3$，(14.7.15)是能用特征线法求解的拟线性偏微分方程. 特征速度 $\omega'(0)+\beta u$ 可以看作某个未知特征速度 $f(u)$ 在 $u=0$ 的线性化(小振幅近似). 较高的波移动的较快或较慢(取决于 β)而光滑初始条件变陡(最终断裂). 对具体的物理问题，由运动方程导出系数 β 是要花些气力的(通常用对应长波的扰动法). 在 1895 年试图理解运河中所观察到的异常持久水面波时，Korteweg 和 de Vries 首次推导出了(14.7.15).

659

KdV 方程是一个有趣的非线性的偏微分方程模型，它呈现了两种不同的物理作用. 有一种预计是 KdV 方程的解由于色散项而会衰减. 不过，非线性项使波变陡. 利用线性化群速度的移动和缩放 x 和 u，就得到了 KdV 方程的标准形式

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}+6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0.} \tag{14.7.16}$$

这里仅限于讨论 KdV 方程的基本行波解

$$\boxed{u(x,t)=f(\xi),\quad 其中\ \xi=x-ct.} \tag{14.7.17}$$

将(14.7.17)代入(14.7.16)，得到一个三阶常微分方程

$$f'''-cf'+6ff'=0.$$

对其积分给出非线性的二阶常微分方程(具有对应力学中 $F=ma$ 类型的方程，其中 $a=f''$)：

$$f''+3f^2-cf-A=0, \tag{14.7.18}$$

其中 A 是常数. 乘以 f'并对 ξ 积分得到对应能量守恒的方程(假如(14.7.18)是牛顿定律)

$$\frac{1}{2}(f')^2+f^3-\frac{1}{2}cf^2-Af=E, \tag{14.7.19}$$

其中 E 为总能量常数[$(f')^2/2$ 表示动能，$f^3-cf^2/2-Af$ 为势能]. 图 14.7.1 给出了势能对 f 的

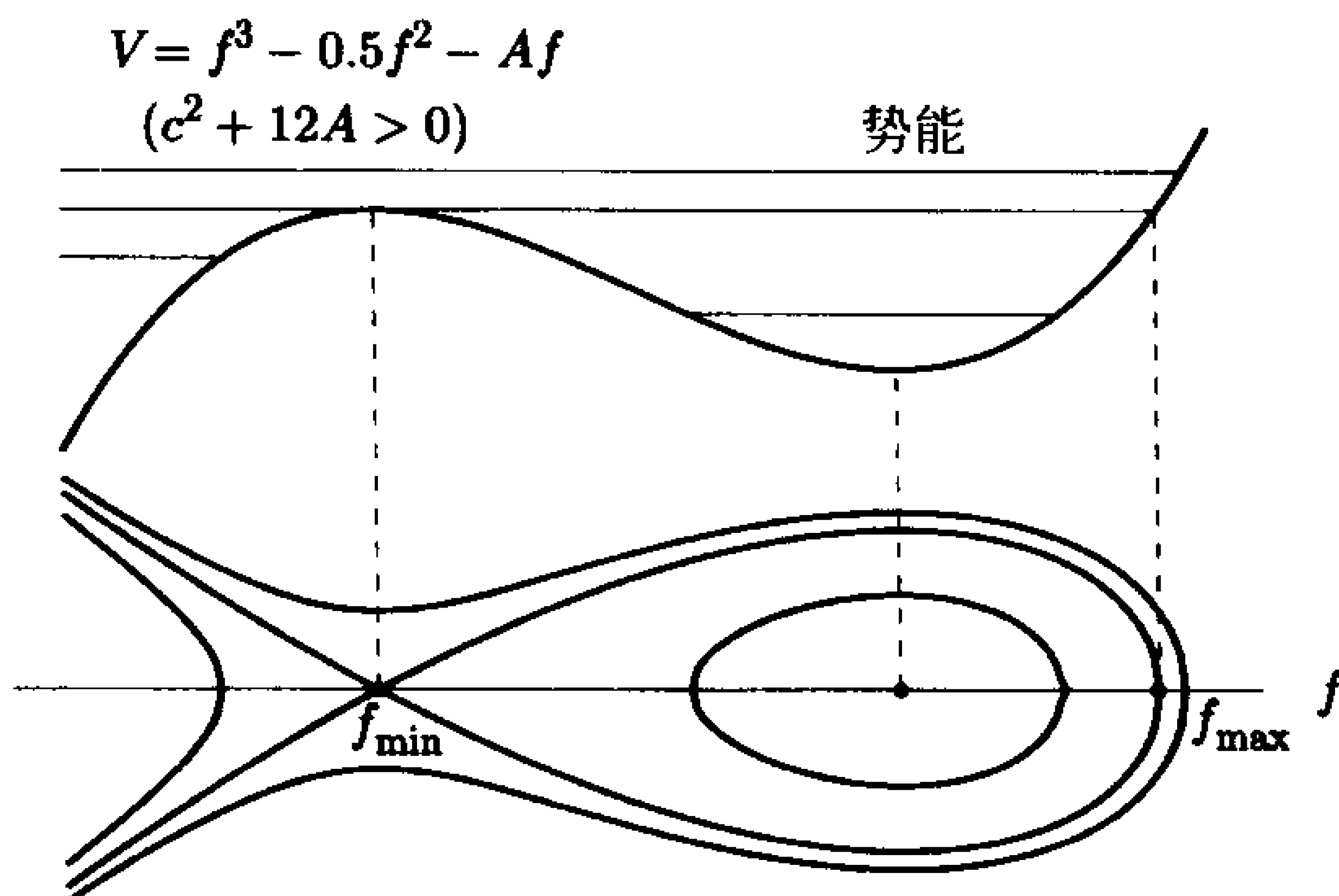


图 14.7.1 KdV 方程行波解的势能和相图

图像．$3f^2-cf-A=0$ 时，势能有对应(14.7.18)平衡解的临界点．二次方程的判别式(b^2-4ac)是 c^2+12A. 若 $c^2+12A\leqslant 0$，势能单调递增，可以证明行波是无界的．所以假定 $c^2+12A>0$，此时有两个平衡解．(在势能图中)常能量线有助于在图 14.7.1 中画出相图．注意一个平衡解是鞍点(f_{min})，另一个是中心点．

周期行波(cn 型波)．大部分有界行波都是周期的．在习题中会做一些分析． 660

孤立行波．如果能量常数 E 恰好合适，则行波有一个无穷周期．三次的势能在 f_{min} 有二重相同根，在 $f_{max}>f_{min}$ 有个较大的单根，使得

$$\frac{1}{2}(f')^2 = -(f-f_{max})(f-f_{min})^2. \tag{14.7.20}$$

相图表明解在 $f=f_{max}$ 有唯一的最大值，指数地减小到 $f=f_{min}$，称之为*孤立波*，其图像见图 14.7.2. 这种永久行波出现在非线性项的陡峭效应相平衡了色散项的时候．波速的表达式可以由比较(14.7.19)和(14.7.20)中的二次项得到：$c/2=f_{max}+2f_{min}=3f_{min}+(f_{max}-f_{min})$．最简单的例子是 $f_{min}=0$ 的时候，这要求 $f_{max}>0$，此时

$$\frac{1}{2}c = f_{max}. \tag{14.7.21}$$

只有当 $f_{max}>0$ 时才会出现如图 14.7.2 所示的孤立波．所以较高的波(向右)传播得较快．这些孤立波有一个解析表达式，当 $f_{min}=0$，可以证明

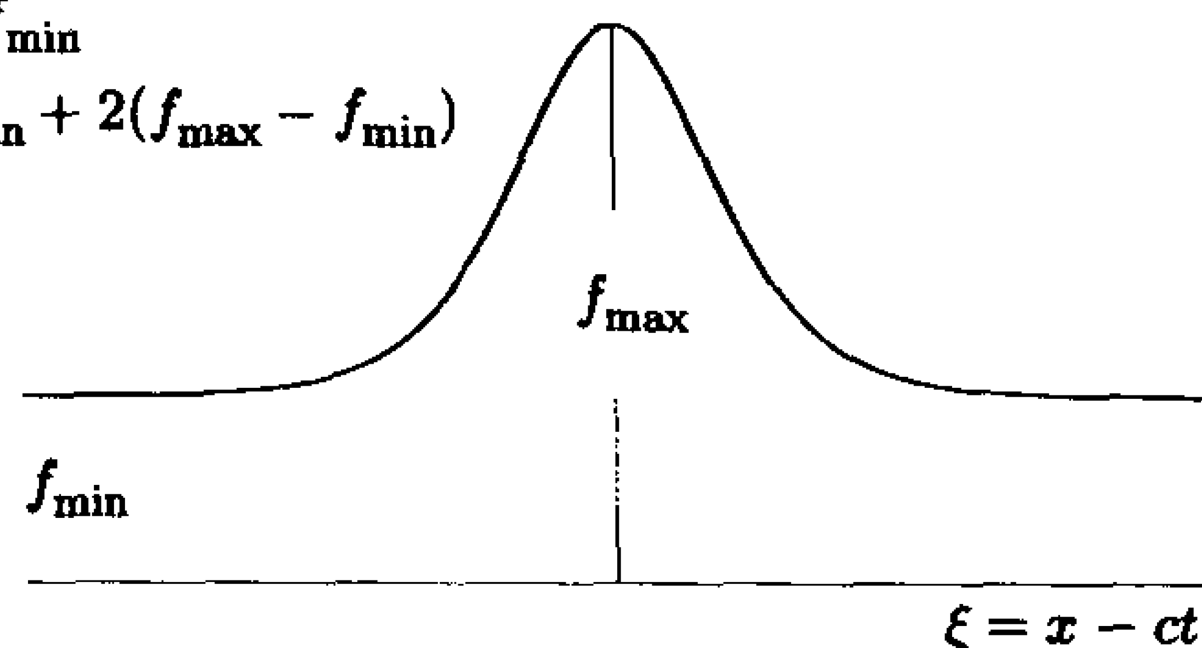


图 14.7.2 KdV 方程的孤立波

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}c\operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c}(x-ct)\right],} \tag{14.7.22}$$

其中 $c>0$ 由(14.7.21)给出．由此看出较高的波(传播得快)有更尖的峰． 661

14.7.4 孤立子与逆散射

许多别的非线性偏微分方程也具有孤立波．对大多数的非线性色散方程而言，由于非线性，还不知道是否有另外的解析结果．现代数值实验通常指出了不同速度的孤立波相互作用的方式有些复杂．然而，Zabusky and Kruskal[1965]对 KdV 方程(14.7.16)证明了不同的孤立波像粒子一样相互作用(作用后各自的振幅保持不变)，从而称之为*孤立子*．孤立子已经相当重要了，这是因为已经证明即便初始条件不是这种形状的，也会形成这种形式的解，并且许多其他有物理意义的非线性色散波的非线性偏微分方程也具有这种性质．为了理解这些数值实验，Gardner，Greene，Kruskal and Miura[1967]指出非线性 KdV 方程可能与薛定谔方程的特征值问题(参看 10.7 节)有关的散射问题以及散射问题的时间演变相联系．Lax[1968]将其推广到两个线性依赖未知函数 $u(x,t)$ 的非常系数微分算子 L 和 M：

$$L\phi = \lambda\phi \tag{14.7.23}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = M\phi. \tag{14.7.24}$$

算子 L 描述谱(散射)问题其中 ϕ 为特征函数，算子 M 描述特征函数 ϕ 随时间的演变．由这两

个方程的相容性$\left[\right.$对(14.7.23)关于时间求导，而后对两个方程求解 $L\dfrac{\partial\phi}{\partial t}\left.\right]$给出 $L\dfrac{\partial\phi}{\partial t}=LM\phi=-\dfrac{\partial L}{\partial t}\phi+\lambda\dfrac{\partial\phi}{\partial t}+\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\phi=-\dfrac{\partial L}{\partial t}\phi+ML\phi+\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\phi$，其中用到了(14.7.23)和(14.7.24). 谱参数是常数$\left(\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}=0\right)$当且仅当如下的拉克斯(Lax)方程成立：

$$\frac{\partial L}{\partial t}+LM-ML=0, \tag{14.7.25}$$

由于两个非常数算子的换位子 $LM-ML$ 通常不为零，这实际上就是 $u(x,\ t)$的非线性偏微分方程.

662

在习题中，对具体的算子

$$\boxed{L=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+u} \tag{14.7.26}$$

$$\boxed{M=\gamma-\frac{\partial u}{\partial x}+6u\frac{\partial}{\partial x}-4\frac{\partial^3}{\partial x^3},} \tag{14.7.27}$$

其中 γ 是一常数，证明了拉克斯方程是一种 KdV 方程：

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0.} \tag{14.7.28}$$

逆散射变换. KdV 方程在区间 $-\infty<x<\infty$ 上的初值问题是利用 $-\infty<x<\infty$ 上非线性 KdV 方程和线性散射问题之间复杂的关系求解的. 特征函数 ϕ 满足薛定谔特征值问题

$$\boxed{\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+(\lambda-u(x,t))\phi=0.} \tag{14.7.29}$$

这里时间是个特别参数. 在 10.7 节对逆散射的简介中，已经指出固定时刻 t 的势 $u(x,\ t)$可以由在这个时刻 t 的散射数据重建：

$$\boxed{u(x,t)=-2\frac{\partial}{\partial x}K(x,x,t),} \tag{14.7.30}$$

这里用到了 Gelfand-Levitan-Marchenko 积分方程

$$\boxed{K(x,y,t)+F(x+y,t)+\int_x^\infty K(x,z,t)F(y+z,t)\,\mathrm{d}z=0,\quad \text{对 } y>x} \tag{14.7.31}$$

的唯一解. 其中非齐次项和核与反射系数 $R(k,\ t)$的傅里叶逆变换的相关的(定义见 10.7 节)，包括了束缚态(离散特征值 $\lambda=-\kappa_n^2$)的贡献

663

$$\boxed{F(s,t)=\sum_{n=1}^{N}c_n^2(t)\mathrm{e}^{-\kappa_n s}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R(k,t)\mathrm{e}^{iks}\mathrm{d}k.} \tag{14.7.32}$$

此处的散射数据依赖参数，时间. 可惜的是，由于只给出了 KdV 方程的初始条件 $u(x,\ 0)$，依赖时间的散射数据是未知的. 不过，至少初始散射数据是可以确定的，因此就假设这些数据是已知的. 如果初始条件有离散特征值，由于对 KdV 方程，$\mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}t=0$，因而 KdV 方程的时间演化 $u(x,\ t)$的离散特征值不随时间而变化. 然而，对于 KdV 方程，已经证明了依赖时间的散射

数据可以很容易地从(14.7.29)、(14.7.26)以及(14.7.27)由初始散射数据确定：

$$R(k,t) = R(k,0)e^{8ik^3t} \tag{14.7.33}$$

$$c_n(t) = c_n(0)e^{4\kappa_n^3t}. \tag{14.7.34}$$

这个方法叫做*逆散射变换*. 将初始条件变换成初始散射数据，而散射数据满足与时间有关的简单线性常微分方程，其解由(14.7.33)和(14.7.34)给出. 依赖时间的解由逆散射方法得到.

可以证明；对应有一个离散特征值的无反射势初始条件的逆散射变换解给出了前面讨论过的孤立波解. 然而，可以得到对应两个或更多的离散特征值无反射势初始条件求的解. KdV 方程的相应解是强相互作用的非线性孤立波，它们恰好满足由 Zabusky and Kruskal[1965]首先数值模拟观测的相互作用性质. 这里的介绍非常简短. Ablowitz、Kaup、Newel 和 Segur 提出了与(14.7.23)和(14.7.24)等价的更简单些的步骤，相关的讨论在 Ablowitz and Segur[1981]以及 Ablowitz and Clarkson[1991]的书中可以找到.

14.7.5 非线性薛定谔方程

当能量集中到一个波数上 $u(x, t) = A(x, t)e^{i(k_0x-\omega(k_0)t)}$ 时，线性色散波的振幅可以由(14.7.6)近似. 小时间变化被小空间变化所平衡. 如果基本物理方程是非线性的，小而有限的振幅变化可以用扰动法研究. 在许多情况下，非线性和空间色散以下列方式平衡. 其中振幅据说满足(三阶)*非线性薛定谔方程*(NLS)

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial t} + \omega'(k_0)\frac{\partial A}{\partial x} = i\frac{\omega''(k_0)}{2!}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + i\beta|A|^2A.} \tag{14.7.35}$$

要了解方程的非线性特性，首先注意到若 $\partial A/\partial t = i\beta|A|^2A$，就有振幅与空间变量无关的解： 664
$u(x, t) = A(t)e^{i(k_0x-\omega(k_0)t)}$. 为求解这个微分方程，设 $A = re^{i\theta}$，此时分别让实部和虚部相等，就得到 $d\theta/dt = \beta r^2$ 和 $dr/dt = 0$，这样 $A(t) = r_0e^{i\beta r_0^2t}$，对应的 $u(x, t) = r_0e^{i\beta r_0^2t}e^{i(k_0x-\omega(k_0)t)}$. 这里频率 $\omega(k_0, |A|) = \omega(k_0) - \beta|A|^2$ 依赖振幅 $r_0 = |A|$. 这种在对小振幅的近似时，频率以此方式依赖波振幅的方式是相当典型的. 在包括空间依赖时，就有非线性色散波方程(14.7.35).

下面要证明 NLS 方程具有对应振荡行波的解，此振荡行波有孤立波形的波包. 设

$$\boxed{A(x,t) = r(x,t)e^{i(\theta(x,t))} = r(x,t)e^{i(\alpha x-\Omega t)},}$$

其中 $r(x, t)$ 表示的是波数为 α，频率为 Ω 的基本行波的振幅. 波数 α 是任意的，但要确定对应孤立波包的频率 Ω. 既然 $A_x = (r_x + i\alpha r)e^{i(\alpha x-\Omega t)}$，就得到 $A_{xx} = (r_{xx} + 2i\alpha r_x - \alpha^2 r)e^{i(\alpha x-\Omega t)}$. NLS(14.7.35)的实部给出

$$r_t + [\omega'(k_0) + \alpha\omega''(k_0)]r_x = 0. \tag{14.7.36}$$

特征线法能够用于(14.7.36)，并且得到

$$r(x,t) = r(x-ct),$$

其中孤立波包的波速满足

$$c = \omega'(k_0) + \alpha\omega''(k_0). \tag{14.7.37}$$

这表明复振幅的大小依群速度移动时保持常数. 既然 α 表示小扰动波数, 这只是在波数 $k_0+\alpha$ 时对群速度的近似. NLS(14.7.35)的虚部给出

$$-\Omega r+\omega'(k_0)\alpha r=\frac{\omega''(k_0)}{2!}(r_{xx}-\alpha^2 r)+\beta r^3.$$

这可以改写为非线性常微分方程

$$0=r_{xx}+\delta r+\gamma r^3, \tag{14.7.38}$$

其中 $\gamma=2\beta/\omega''(k_0)$, $\delta=-\alpha^2+2[\Omega-\omega''(k_0)\alpha]/\omega''(k_0)$. 用 r_x 乘以(14.7.38)并积分给出能量方程:

$$\frac{1}{2}(r_x)^2+\frac{\delta}{2}r^2+\frac{\gamma}{4}r^4=E=0.$$

665 为了得到具有性质当 $x\to\infty$ 时 $r\to 0$ 的波包, 取 $E=0$. 势能 $\delta r^2/2+\gamma r^4/2$ 的图像见图 14.7.3. 由这个势能, 得到相图(图 14.7.3, r_x 作为 r 的函数). 该相图表明只有在 $\gamma>0$(对应 β 与 $\omega''(k)$ 有相同符号)和 $\delta<0$ 时才存在孤立波(图 14.7.4). 这里非线性阻止了波包色散.

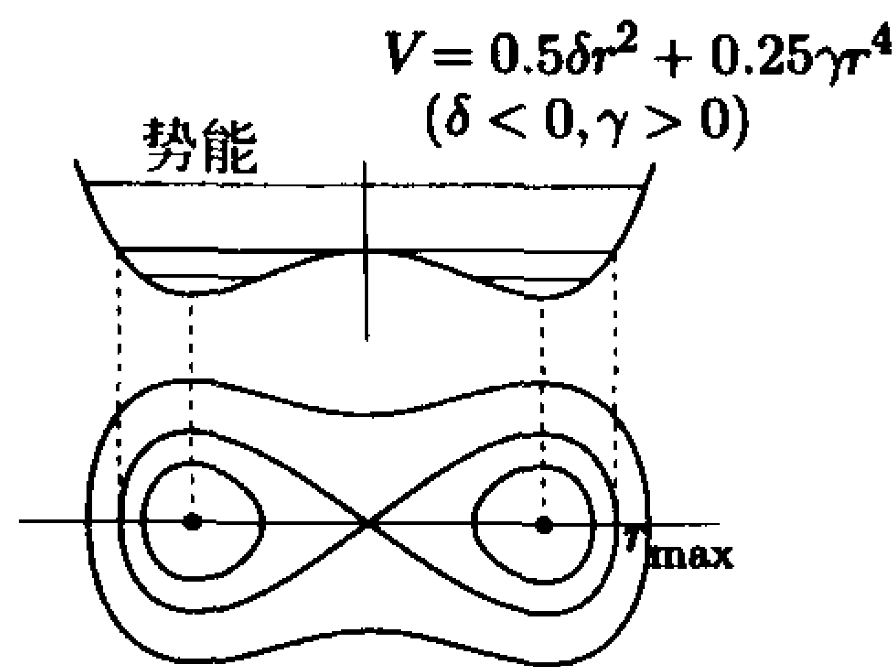
r 的最大值——孤立波包的振幅, 由 ${r_{max}}^2=-2\delta/\gamma=-\delta\omega''(k_0)/\beta$ 给出. 如果已知 r_{max}, 这个方程可以用来确定频率 Ω:

$$\Omega=\omega'(k_0)\alpha+\frac{\omega''(k_0)}{2}\alpha^2-\frac{\beta}{2}r_{max}^2. \tag{14.7.39}$$

除了扰动波数引出的频率外, 还有频率对振幅的依赖性. 可以证明 NLS 方程满足 $x\to\infty$ 时 $r\to 0$ 的波包孤立子是

$$\boxed{A(x,t)=r_{max}\operatorname{sech}\left[\sqrt{\frac{\beta}{\omega''(k_0)}}r_{max}(x-ct)\right]e^{i(\alpha x-\Omega t)},}$$

其中 Ω 由(14.7.39)给出, c 由(14.7.37)给出. (注意 α 和 r_{max} 都是任意的.)图 14.7.4 给出了 $A(x,t)$ 实部的图像. 注意单个波的相速度与波包的速度是不同的. 由于令人惊讶的恰当的非线性相互作用特性, 这些波包孤立波叫做波包孤立子.



666 图 14.7.3 NLS 的势能和相图

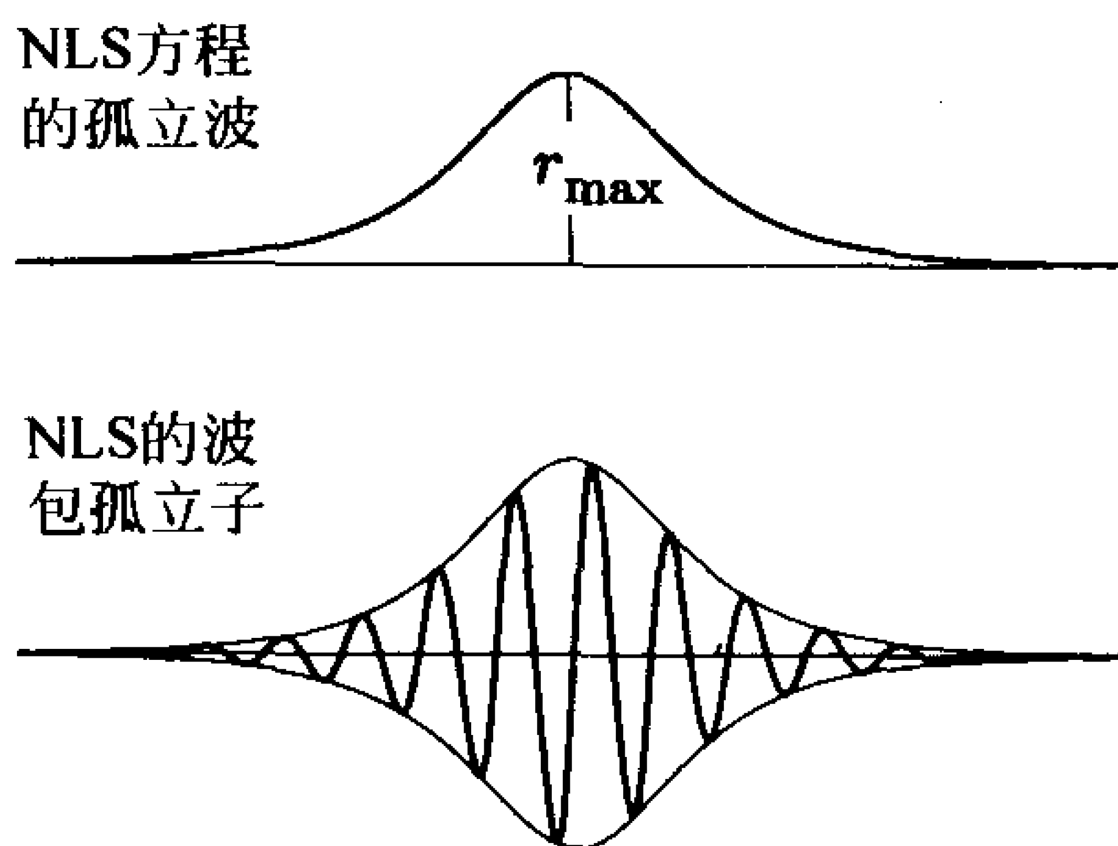


图 14.7.4 振幅的孤立波用于得到 NLS 方程的波包孤立子

习题 14.7

14.7.1 **弯曲焦散线.** 在弯曲焦散线附近, 波数近似为常数 $k_0=k_c=k(\xi_c,0)$, 这样薛定谔方程(14.7.6)适用.

(a)从(14.7.7)[假设 $R(\alpha)=1$]，由基本二次方程(14.6.22)，试推导出

$$A(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left[\alpha(x-x_c-\omega'(k_c)(t-t_c))-\frac{\omega''(k_c)}{2!}\alpha^2(t-t_c)-\frac{\alpha^3}{3!}\frac{F''(\xi_c)}{k_\xi^2}t_c\right]}d\alpha.$$

为了使(b)~(d)的计算更简单，考虑

$$B(z,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[\beta z+\beta^2\tau+\beta^3/3]}d\beta.$$

(b)证明 B 满足无量纲形式的薛定谔方程 $B_\tau=-iB_{zz}$.

(c)证明：作变换 $\beta=\gamma-\tau$，被积函数的二次项可以变换掉，有

$$B(z,\tau) = e^{i\left(-\tau z+\frac{2}{3}\tau^3\right)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i[\gamma(z-\tau^2)+\gamma^3/3]}d\gamma.$$

(d)这描述了焦散线中光线的亮度，在(c)中剩下的积分是艾里函数，其定义是

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i[\gamma x+\gamma^3/3]}d\gamma.$$

用艾里函数表示 $B(z,\tau)$.（可以看出艾里函数满足 $\omega''-x\omega=0$. 艾里函数对大自变量的渐进展开可用来证明弯曲焦散线(与艾里函数有关)把有两条射线的区域和有零条射线的区域分开.）

(e)用艾里函数确定 $A(x,t)$.

14.7.2 水波的色散关系是 $\omega^2=gk\tanh(kh)$，其中 g 是通常的重力加速度，h 是定常的深度. 试求出长波线性 KdV 方程的系数.

14.7.3 画出相图，说明存在周期的和孤立的非线性波.

(a)修正的 KdV 方程：$\frac{\partial u}{\partial t}+6u^2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$　　(b)克莱因－戈尔登方程：$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u-u^3=0$

667

(c)正弦戈尔登方程：$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin u=0$

14.7.4 确定 KdV 方程周期解周期的积分公式. 用三次方程的三个根确定波速. 周期解不能用正弦函数表示. 可以证明这个解与雅可比椭圆函数 cn 有关，因此叫做 cn 型波. 关于雅可比椭圆函数，可以参考 Abramowitz and Stegun [1974]或其他的参考资料.

14.7.5 试用积分表推导出本节中有关孤立波的公式.

(a)KdV 方程.　　(b)非线性的薛定谔方程.

(c)有求解公式的修正的 KdV 方程(见习题 14.7.3(a)).

14.7.6 利用微分公式和双曲函数的恒等式验证本节中有关孤立波的公式.

(a)KdV 方程.　　(b)非线性的薛定谔方程.

14.7.7 若特征函数满足薛定谔方程，而特征函数随时间的演变满足 $\partial\phi/\partial t=P\partial\phi/\partial x+Q\phi$，证明：仅当 $Q=-(\partial P/\partial x)/2$ 和 $u(x,t)$满足偏微分方程 $u_t=-P_{xxx}/2+2P_x(u-\lambda)+Pu_x$ 时，两个方程才是相容的.

*14.7.8 在习题 14.7.7 中，如果 $P=A+B\lambda+C\lambda^2$，其中 C 为常数，确定 A 和 B 以及函数 $u(x,t)$所满足的非线性偏微分方程.

14.7.9 证明(14.7.26)和(14.7.27)给出的算子 L 和 M 的拉克斯方程就是 KdV 方程.（提示：直接用(14.7.26)和(14.7.27)计算(14.7.23)和(14.7.24)的相容性.）

14.7.10 利用 10.7 节中反射系数和透射系数的定义，推导出(14.7.33). 为此，还应该在(14.7.27)中推导出 $\gamma=4ik^3$. 而束缚态更加复杂些.

14.7.11 假设 KdV 方程的初始条件是有一个离散特征值的无反射势 $R(k,0)=0$. 求解 Gelfand-Levitan-Marchenko 积分方程(它是可分的)，并证明 $u(x,t)$就是前面描述过的孤立波(孤立子)解.

14.7.12 将习题 14.7.11 的结果推广到有两个离散特征值的无反射势. 此时的积分方程仍然是可分的. 其解表示了两个孤立波的相互作用.

668

14.8 稳定性和不稳定性

14.8.1 常微分方程和分歧理论简介

偏微分方程的平衡解可以是稳定的或不稳定的. 这里首先对常微分方程简要讨论这些概念，它们在很多新近出版的动力系统书籍中有更全面的讨论，例如 Glendinning [1994]、Strogatz [1994]和 Verhulst [1997].

一阶常微分方程. 平衡与稳定的概念在自治的一阶常微分方程中也许是最简单的：

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = f(x).} \tag{14.8.1}$$

平衡解 x_0 是(14.8.1)与时间无关的解：

$$\boxed{0 = f(x_0).} \tag{14.8.2}$$

一个平衡解是稳定的，如果所有初始条件在附近的解都一直保持其附近. 而如果在平衡解附近总有初始条件，对应的解远离平衡解，这时就说这个平衡解是不稳定的.

分析 x_0 是稳定或不稳定只需要在 x_0 附近考虑(14.8.1). 用 $f(x)$ 在 x_0 点的泰勒级数近似微分方程(对 $f(x)$ 在 x_0 点线性化或切线近似)：

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots.$$

由于假设 x 在 x_0 附近，一般忽略非线性项. 因为 x_0 是平衡点，$f(x_0) = 0$，而微分方程(14.8.1)可以用(常系数)线性微分方程近似：

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = (x - x_0)f'(x_0).} \tag{14.8.3}$$

(14.8.3)的解是简单的：$x - x_0 = ce^{f'(x_0)t}$. 这就得到

如果 $f'(x_0) < 0$,平衡点 x_0 是稳定的；
如果 $f'(x_0) > 0$,平衡点 x_0 是不稳定的，

669

如果 $f'(x_0) = 0$，那就需要用忽略掉的非线性项来确定 x_0 的稳定性.

分歧点的例子. 希望研究微分方程的解是如何依赖于参数 R 的. 考虑具体的例子

$$\frac{dx}{dt} = R - x^2. \tag{14.8.4}$$

对平衡点，$x^2 = R$. 若 $R > 0$，有两个平衡点 $x = \pm\sqrt{R}$. 这两个平衡点在 $R = 0$ 时合并成 $x = 0$. 若 $R < 0$，没有平衡点. $R = 0$ 叫做分歧点，因为平衡点的个数在此发生了改变. 在其他例子中，会出现其他类型的分歧点. 有时会画出分歧点图，其中把平衡点看成是参数 R 的函数(如图 14.8.1所示). 平衡点的稳定性可以用线性化确定(参见习题). 不过，在图中可以用一维相图说明对稳定性的确定. 先固定

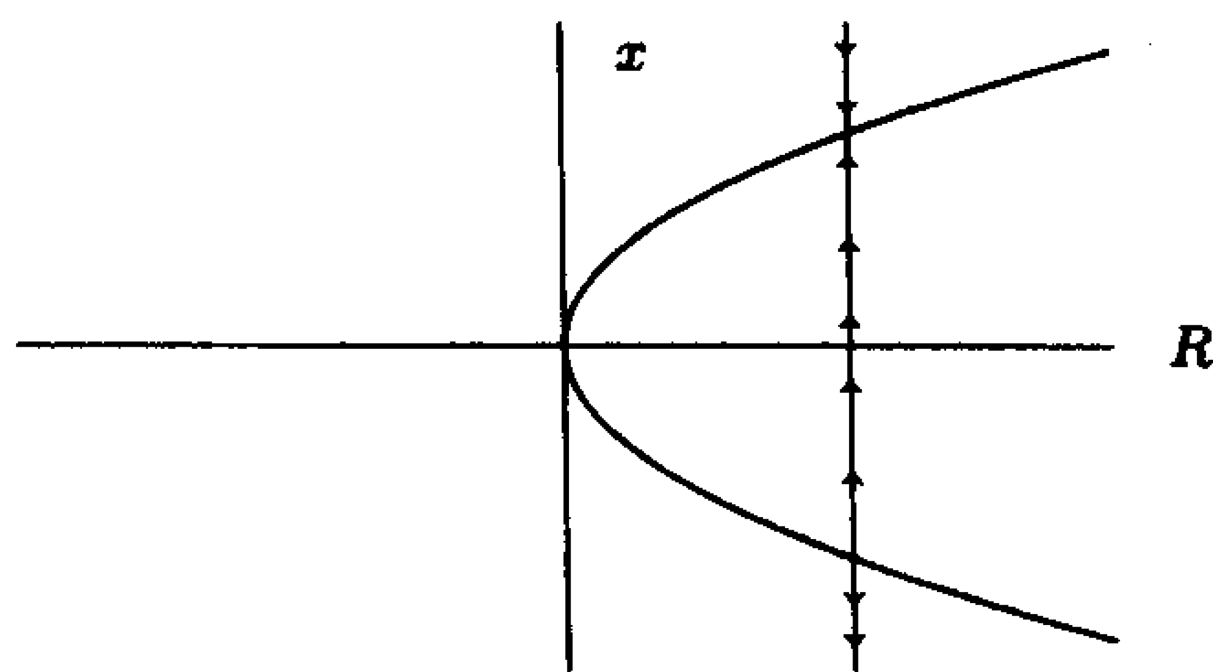


图 14.8.1 鞍结点分歧例子的一维相图和分歧图

参数 R(作垂直线). 如果 $dx/dt>0$，作向上的箭头(当 $dx/dt<0$ 时，作向下的箭头). 在例子(14.8.4)中，如果 x 大且是正的[⊖]，那么 $dx/dt<0$(由于例子中的根都是单根，dx/dt 的符号每变化一次就达到一个平衡点). 这样就看出上面的分支($x>0$)是稳定的而下面的分支($x<0$)是不稳定的.

歧点定义. 依赖参数 R 的一阶微分方程可以记成

$$\boxed{\frac{dx}{dt}=f(x,R).} \tag{14.8.5}$$

首先只是研究平衡解 x_0:

$$0=f(x_0,R).$$

670

一般来说，平衡点 x_0 依赖参数 R. 由前面的讨论可以看出，$f_x(x_0,\ R)<0$ 时 x_0 是稳定的，$f_x(x_0,\ R)>0$时则不稳定. (在具体问题中，如前面的例子，稳定性可以利用一维相图确定).

下面讨论当参数小变化时，平衡点如何变化. 考虑一个特定的参数值 R_c，已知其相应的平衡点 x_c 使得

$$0=f(x_c,R_c).$$

若 R 靠近 R_c，可假定 x_0 靠近 x_c. 这样利用两个变量函数的泰勒级数

$$0=f(x_0,R)=f(x_c,R_c)+(x_0-x_c)f_x(x_c,R_c)+(R-R_c)f_R(x_c,R_c)+\cdots.$$

作为近似，对 R_c 附近的 R，可得平衡点通常是小变化的:

$$x_0-x_c=-\frac{f_R}{f_x}(R-R_c)+\cdots. \tag{14.8.6}$$

这在 $f_x\neq 0$ 时得到保证. 因而 $f_x\neq 0$，平衡点的个数不会变. (14.8.6)是对分歧图的切线近似.

只有在 $f_x=0$ 时才会发生有趣的事. $(x,\ R)$称为歧点，如果

$$\boxed{f(x,R)=0,\quad \text{同时有}\ f_x(x,R)=0.} \tag{14.8.7}$$

平衡点的个数只有在歧点才会改变. 另外，平衡点的稳定性在歧点也可能发生改变，因为 $f_x<0$ 时，平衡点稳定，而 $f_x>0$ 时不稳定.

重新考虑前面的例子(14.8.4)，其中 $0=f(x,\ R)=R-x^2$，歧点可以由同时要求 $f_x=-2x=0$确定. 歧点是 $x=0$，此是 $R=0$.

鞍结点分歧. 在这一小节，要说明(14.8.4)中的歧点是一种典型歧点. 考虑与参数 R 有关的一阶问题

$$\boxed{\frac{dx}{dt}=f(x,R).} \tag{14.8.8}$$

假设已经知道一个歧点$(x_c,\ R_c)$满足

$$\boxed{f(x_c,R_c)=0\quad \text{和}\quad f_x(x_c,R_c)=0.} \tag{14.8.9}$$

671

既然是在对 R_c 附近的 R 求解微分方程，就假定 x 也在 x_c 附近. 这样就用 $f(x,\ R)$ 在点$(x_c,\ R_c)$的泰勒级数近似微分方程:

$$\frac{dx}{dt}=f(x,R)$$

⊖ 这里只需要 x 的绝对值大，并不需要 x 正. ——译者注

$$= f(x_c,R_c) + (x - x_c)f_x(x_c,R_c) + (R - R_c)f_R(x_c,R_c) + \frac{1}{2}(x - x_c)^2 f_{xx}(x_c,R_c) + \cdots.$$

由(x_c, R_c)是满足(14.8.9)的歧点，上式简化为

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (R - R_c)f_R(x_c,R_c) + \frac{1}{2}(x - x_c)^2 f_{xx}(x_c,R_c) + \cdots.} \tag{14.8.10}$$

可以证明泰勒级数中诸如$(R - R_c)^2$，$(x - x_c)(R - R_c)$，$(x - x_c)^3$的其他项要小得多，因为R靠近R_c，x靠近x_c满足$(x - x_c)^2 = O(R - R_c)$. 这样，忽略其他高阶项(在歧点附近的近似有效)是合理的. 在(x_c, R_c)附近的歧点图近似抛物线(与图14.8.1类似)，这可以由考虑简单近似微分方程(14.8.10)的平衡点而得到. 此处的歧点是(x_c, R_c). 抛物线的开口可以向左或向右，取决于f_R和f_{xx}的符号. 为了使这个近似合理，假设$f_R(x_c, R_c) \neq 0$和$f_{xx}(x_c, R_c) \neq 0$. 只要$f_R(x_c, R_c) \neq 0$和$f_{xx}(x_c, R_c) \neq 0$，歧点就是个转向点，也叫做鞍结点分歧(后面要简短讨论其复杂的原因). 每种情形平衡点的稳定性都可以由一维相图法确定. 平衡点的一个分支(又取决于泰勒系数的符号)是稳定的，而另一个是不稳定的.

其他分歧. 如果$f_R(x_c, R_c) = 0$和$f_{xx}(x_c, R_c) = 0$，就会出现其他类型的歧点(见习题)，如超临界分歧(交换稳定性)和音叉形分歧.

一阶微分方程组. 考虑一阶自治微分方程组

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \vec{f}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} f(\vec{x}) \\ g(\vec{x}) \end{bmatrix}.} \tag{14.8.11}$$

平衡点$\vec{x}_0$满足$\vec{f}(\vec{x}_0) = 0$. 为了分析平衡点的稳定性，考虑$\vec{x}_0$附近的$\vec{x}$和用泰勒级数. 引入自平衡点的位移$\vec{y} = \vec{x} - \vec{x}_0$，得到替代(14.8.3)的线性方程组，其中含平衡点处的雅可比矩阵J:

672

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = J\vec{y},} \tag{14.8.12}$$

其中

$$\boxed{J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}\Bigg|_{\vec{x}=\vec{x}_0}.} \tag{14.8.13}$$

为了求解线性微分方程组，代入$\vec{y}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\vec{v}$，此时

$$\boxed{J\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad 或 \quad (J - \lambda I)\vec{v} = 0,} \tag{14.8.14}$$

使得λ是雅可比矩阵J的特征值，$\vec{v}$是相应的特征向量. 要得到非平凡解，由行列式条件得到特征值

$$\boxed{0 = \det(J - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} J_{11} - \lambda & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} - \lambda \end{bmatrix},} \tag{14.8.15}$$

使得

$$\boxed{\lambda^2 - T\lambda + D = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = 0,} \quad (14.8.16)$$

其中引入了矩阵 J 的迹 $T = J_{11} + J_{22}$，J 的行列式 $D = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}$，并且将二次方程用其两个根也就是特征值 λ_1 和 λ_2 作因式分解. 比较二次方程的两种表达形式，特征值的乘积等于行列式，而特征值的和等于迹.

$$\boxed{\prod \lambda_i = \det J,} \quad (14.8.17)$$

$$\boxed{\sum \lambda_i = \mathrm{tr} J.} \quad (14.8.18)$$

这对于 $n \times n$ 的矩阵也成立.

673

方程组的稳定性. 要不稳定，对某个初始条件，自平衡点的位移必须增大. 而要稳定，对平衡点附近的所有初始条件，位移应当保持在其附近. 由于解与 $e^{\lambda t}$ 成比例，所以 λ 可能是实的或复的：

如果有一个特征值有 $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$,平衡点是不稳定的.
如果所有特征值满足 $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$,平衡点是稳定的

另外，迹和行列式在分析 2×2 矩阵平衡点的稳定性方面特别有用，图 14.8.2 中作了总结. 熟知的结果(下面解释)是：平衡点稳定当且仅当 $\mathrm{tr}\, J < 0$ 且 $\det J > 0$. 这在研究图灵歧点时特别有用. 对于实特征值，由稳定到不稳定的改变，只有当一个特征值为负，一个为零时才会出现(由负变成正)，这样 $\Pi \lambda_i = \det J = 0$，$\sum \lambda_i = \mathrm{tr}\, J < 0$，这对应鞍结点分歧(下面说明)、超临界分歧或音叉形分歧. 对于复特征值，从稳定到不稳定的改变只在虚特征值时才会出现，这样 $\prod \lambda_i = \det J > 0$，$\sum \lambda_i = \mathrm{tr}\, J = 0$，它对应着后面要讨论的霍普夫分歧. 具体地说，

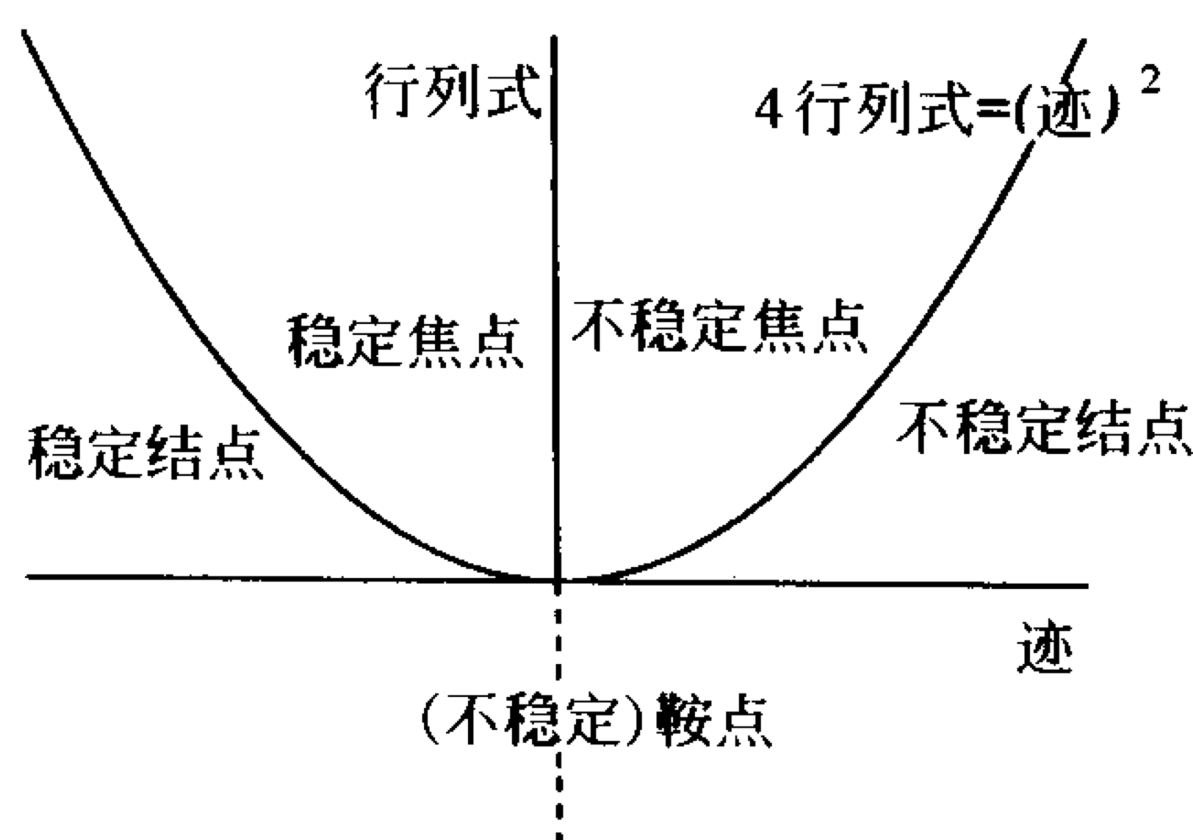


图 14.8.2　2×2 矩阵用迹和行列式对稳定性的判定(及相图)

$$0 = \det(J - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} J_{11} - \lambda & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - T\lambda + D = 0, \quad \text{因此 } \lambda = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2}.$$

如果特征值是实的($4D < T^2$)，稳定情形(两个 λ 都负，其相图是稳定结点)有 $\Pi \lambda_i = \det J > 0$，$\sum \lambda_i = \mathrm{tr}\, J < 0$；不稳定结点(两个 λ 都正)则有 $\Pi \lambda_i = \det J > 0$，$\sum \lambda_i = \mathrm{tr}\, J > 0$；不稳定鞍点($\lambda$ 一正一负)有 $\prod \lambda_i = \det J < 0$，迹可正可负. 如果特征值是复的($4D > T^2$)则 $\prod \lambda_i = |\lambda|^2 = \det J > 0$，不稳定焦点有 $\sum \lambda_i = \mathrm{tr}\, J > 0$，稳定焦点有 $\sum \lambda_i = \mathrm{tr}\, J < 0$.

674

方程组的分歧理论. 假设一阶微分方程组依赖参数 R：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \vec{f}(\vec{x}, R).} \quad (14.8.19)$$

平衡点解满足 $\vec{f}(\vec{x}_0, R) = 0$，使得平衡点 $\vec{x}_0$ 一般与参数 R 有关. 为了方便，假设在参数值 $R = R_c = 0$，已知平衡点为 $\vec{x}_c = \vec{0}$，这样 $\vec{f}(\vec{0}, 0) = 0$. 首先考虑当 R 在 0 附近变化时，平衡点如何变化. 由泰勒级数，$0 = R\vec{f}_R + J\vec{x}_0$，其中 J 还是雅可比矩阵(在已知平衡点处的值). 可以解出唯

一的平衡点$\vec{x}_0$，$\vec{x}_0=-RJ^{-1}\vec{f}_R$（根据隐函数定理），除非$J^{-1}$不存在．当$J^{-1}$不存在且对应 det $J=0$，这样雅可比矩阵的一个特征值为零($\lambda=0$)．下面分析2×2方程组，假设第二个特征值是负的．可以证明这个二维系统化成了一维系统，因为解在一个方向上指数衰减．解向另一个方向（称为中心流形）衰减，在中心流形上类似(14.8.8)的一阶方程成立．假设出现转向点，超临界分歧和音叉形分歧也是可能的．一阶微分方程转向点分歧的每个分支都代表平衡点，一个稳定（负增长率），一个不稳定（正增长率）．对于二维问题，平衡点的稳定分支有两个负增长率或者特征值（一个隐藏），称为稳定结点．不稳定平衡点有一个可见的正增长率（另一个是隐藏的负增长率），称为鞍点（在一个方向增长，在另一方向衰减）．所以说转向点分歧也叫鞍结点分歧，因为稳定分支是一支（稳定）结点，不稳定分支是一支（不稳定）鞍点．两分支在歧点处合并在一起．(14.8.8)的重要性是它甚至描述了高维方程组的分歧现象，这个方程组的特征值一个是零，其他的都有负实部．

霍普夫分歧．对于方程组，在参数某个值R_h处，叫做霍普夫分歧，对应于频率ω，雅可比矩阵的特征值可能是纯虚数$\lambda=\pm i\omega$．根据隐函数定理，由$\lambda\neq0$，对R_h附近的R存在平衡点．一般地，由于增长速率($e^{\lambda t}$)是复的($\lambda=s\pm i\omega$)，其实部由负($s<0$)变为正($s>0$)，平衡点由稳定变成不稳定．仔细地分析霍普夫分歧过于费功夫，会偏离这里的主要目的．霍普夫分歧和后面将简要讨论的偏微分方程稳定性相类似．在14.8.6节仅对非线性做粗略分析．霍普夫分歧有两种情形（见图14.8.5）．一种称为超临界霍普夫分歧，仅当平衡点不稳定($R>R_h$)时，有稳定周期解；另一种是次临界霍普夫分歧，仅当平衡点稳定($R<R_h$)时，存在不稳定的周期解．

675

14.8.2 偏微分方程稳定平衡解的基本例子

在本书中，所有至今考虑过的偏微分方程平衡解都是稳定的．例如，考虑热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

两端给定的温度不为零，$u(0,t)=A$，$u(L,t)=B$．其平衡解为$u_e(x)=A+(B-A)x/L$．要确定这个平衡解是否稳定，考虑接近它的初始条件：$u(x,0)=u_e(x)+g(x)$，其中$g(x)$小．设

$$u(x,t)=u_e(x)+v(x,t),$$

其中$v(x,t)$是自平衡点的位移．所以$v(x,t)$满足

$$\frac{\partial v}{\partial t}=K\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\quad 其中\ v(0,t)=0,\quad v(L,t)=0,\quad v(x,0)=g(x).$$

由前面的结果，有

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-K\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t},$$

其中a_n由初始条件确定（但这里不需要）．既然$t\to\infty$时，$v(x,t)\to0$，就得到$t\to\infty$时，$u(x,t)\to u_e(x)$．这里就说平衡解$u_e(x)$是（渐近）稳定的．

如果当$t\to\infty$时，$u(x,t)\to u_e(x)$有界（并且假设u初始时在$u_e(x)$附近），就说平衡解是

稳定的．如果对于某些初始条件（在 u_e 附近），$u(x, t) - u_e(x)$ 当 $t \to \infty$ 时大，就说 $u_e(x)$ 是不稳定的．

自平衡点的位移一般满足一个有无穷自由度（模式）的线性偏微分方程．如果一个或多个模式随时间是指数增长的，平衡点就是不稳定的．要稳定，所有模式随时间都必须是指数衰减的或振荡的． 676

14.8.3 偏微分方程的典型不稳定平衡点和模式形成

不稳定性的一个物理例子是从下面对两平行板间的流体加热．对这种类型问题的兴趣来自气象学，气象学中许多有趣的天气现象都是由于太阳对地球表面的加热而形成的．对加热底板的较简单情形，在简单的实验中就能够观察到，如果温和加热底板，就会产生传导热流的一个简单状态（求解通常的热传导方程，使得传导状态满足 $u = u(0) + y(u(L) - u(0))/L$，其中底是 $y = 0$，顶是 $y = L$）．对流体底部的加热造成流体的底部比上面的稀薄．由于浮力的作用，流体就要流动（稀薄的热流体上升而稠密的冷流体下降）．描述这种物理现象的偏微分方程除了关于温度的热传导方程之外，还必须包括流体速度的牛顿定律．重力有助于稳定这种状态，而浮力则倾向于破坏这种状态．实验中可看到，如果底部充分加热，传导状态就变得不稳定．流体会运动得异常剧烈并在两板之间形成漩涡（回想一下大规模的大气运动）．开始时并没有显示出什么水平尺度，但观察到了一个优先的水平尺度．这个模式形成的过程在物理和自然学科中是十分重要的．这里希望解释这些特征的类型．不过对于第一个例子，这个浮力不稳定性的高质量数学模型也许有点太难了．

这里分析如下与线性化 Kuramoto-Sivashinsky 方程有关的偏微分方程（它有许多所要讨论的特征）：

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = -u - R\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}.} \tag{14.8.20}$$

注意这里把 $u = 0$ 看作是(14.8.20)的平衡解．假设 $R > 0$ 是要考虑的参数，为了理解这个方程，代入 $u = e^{i(kx - \omega t)}$ 或 $u = e^{\sigma t} e^{ikx}$，每个都给出

$$\sigma = -1 + Rk^2 - k^4. \tag{14.8.21}$$

增长率是 R 和 k 的函数．在这个例子中，指数增长率 σ 对于所有波数 k（所有波长）都是实的．区分 $\sigma > 0$（指数增长）和 $\sigma < 0$（指数衰减）是十分重要的．图 14.8.3 中通过画出中性稳定曲线

$$\sigma = 0, \quad 若 R = \frac{1}{k^2} + k^2$$

给出了指数增长区域和指数衰减区域．这个将稳定与不稳定分开的中性稳定曲线（见图 14.8.3）在 $k = 0$ 处有一条垂直渐近线，并且对大的 k 接近抛物线 $R = k^2$．而它仅有一个临界点，是最小点，此时 $dR/dk = 0$．要确定这个最小值，注意 $0 = -2/k^3 + 2k$ 给出 $k_c = 1$，这就有 $R_c = 1 + 1 = 2$． 677

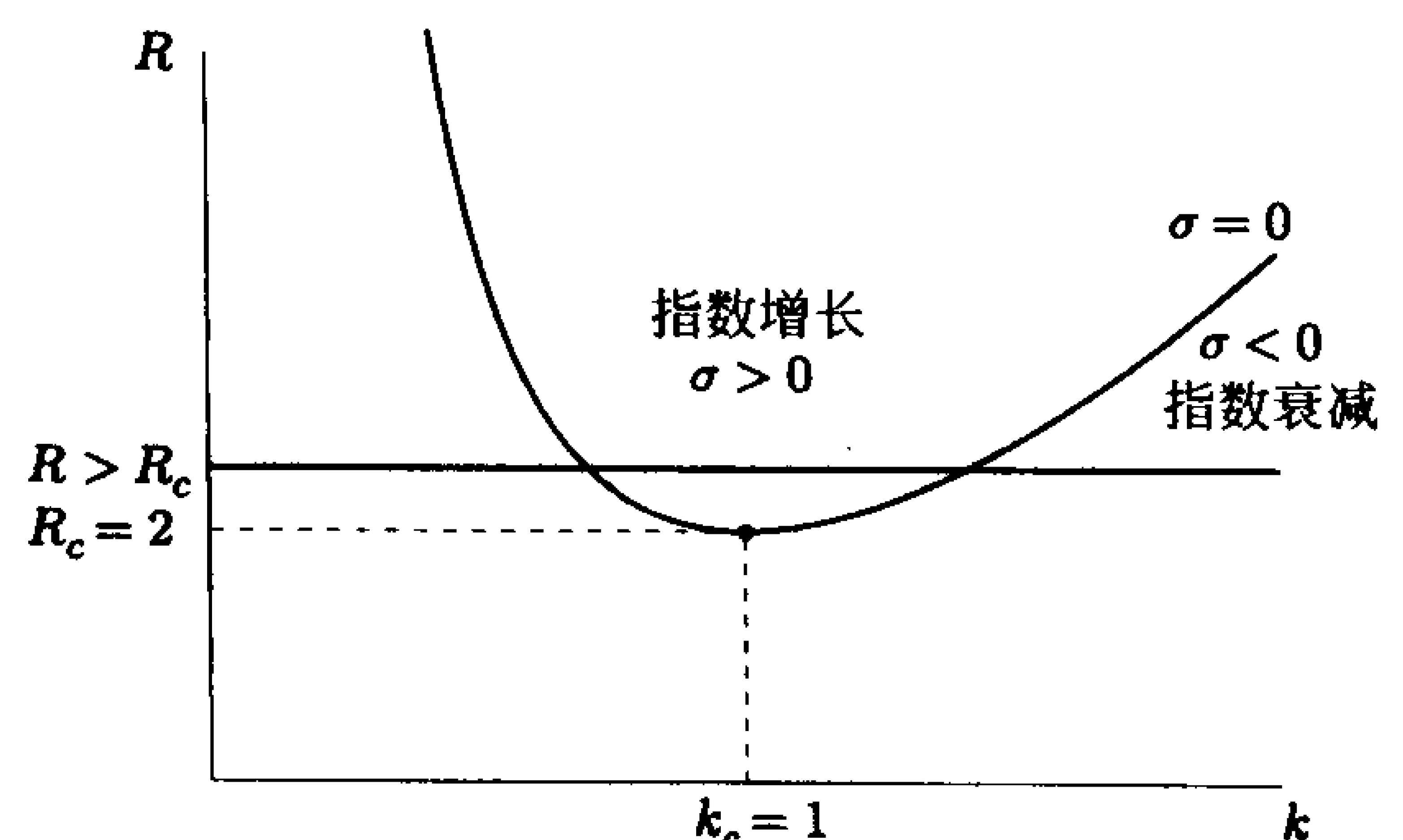


图 14.8.3　中性稳定曲线

如果 $R<R_c$，就说 $u=0$ 是稳定的，因为所有模式(k 的所有值)对时间的依赖都指数衰减. 如果$R>R_c$，则有指数增长的波数波段. 如果出现任何这样的波数，就说 $u=0$ 是不稳定的. 例如，如果偏微分方程(14.8.20)是在无穷区间上求解，(由傅里叶变换)k 的所有值都涉及，那么当 $R>R_c$ 时，$u=0$ 是不稳定的. 实验通常是对参数 R 逐渐地由一个 $u=0$ 是稳定的值增加到另一个 $u=0$ 是不稳定的值来做的. 如果 R 略微大于临界值 R_c，可以预期对围绕 $k_c=1$ 的小波段波数的波是增长的. 这样，解就包含波长 $2\pi/k_c$，这是个优先波长. 这实际上就是自相当任意的初始条件形成的方式.

不过这有些微妙，如果在分离之后的边界条件是 $u(0)=u''(0)=0$ 和 $u(L)=u''(L)=0$，可以证明特征函数是 $\sin n\pi x/L$，这样 k 就取离散值 $k=n\pi/L$. 如果 R 比 R_c 大得不太多，就只有一小波段不稳定波数，$u=0$ 仍可能是稳定的. 不稳定可能第一次出现在比 R_c 大的某个 R 值处，这对应某个特定的值 $n=n_c$. 模式应当是对这个不同波长 $2L/n_c$ 来形成. 本章的其余部分都假定在无穷区间上求解偏微分方程.

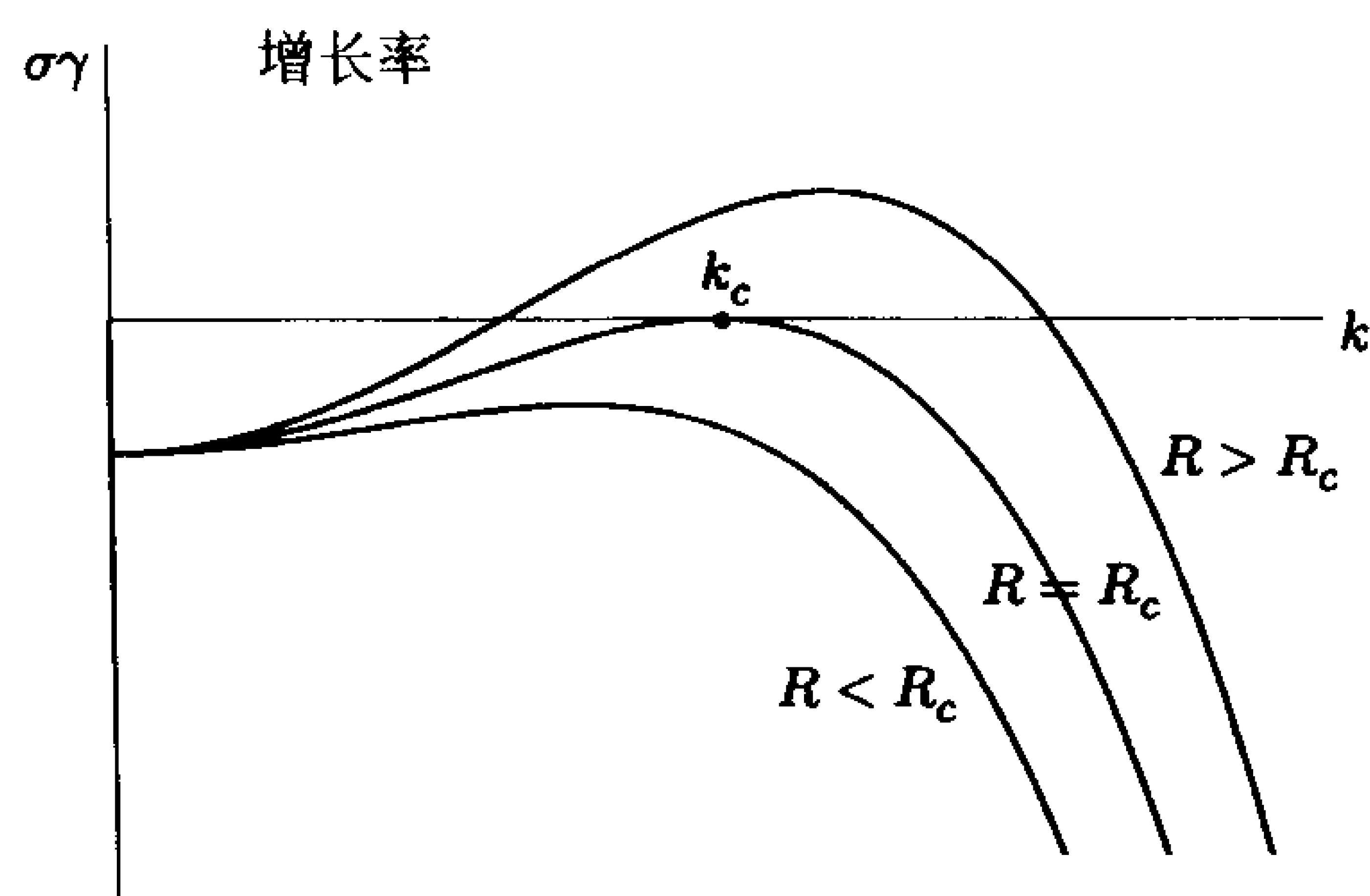


图 14.8.4 增长率作为波数的函数

在图 14.8.4 中，采用另一种方法来说明增长率. 图中对固定 R，画出了(14.8.21)给出的增长率 $\sigma=\sigma(k,R)$. 注意如果 $R<R_c=2$，对于所有的 k，有 $\sigma<0$. 而当 $R=R_c=2$ 时，增长率在 $k=k_c=1$ 处，第一次变为0：

$$\sigma(k_c,R_c)=0 \tag{14.8.22}$$

$$\sigma_k(k_c,R_c)=0 \tag{14.8.23}$$

678

$$\sigma_{kk}(k_c,R_c)<0. \tag{14.8.24}$$

如果 R 只略微大于 R_c，那么有非常接近 k_c 的波数有 $\sigma>0$. 这与图 14.8.3 中所示的不稳定波数在同一波段，(如果 R 只略微大于 R_c)这个不稳定波数波段可以用二元函数 $\sigma(k,R)$ 在 $k=k_c$ 和 $R=R_c$ 的泰勒级数来估计：

$$\sigma(k,R)=\sigma(k_c,R_c)+\sigma_k(k_c,R_c)(k-k_c)+\frac{1}{2}\sigma_{kk}(k_c,R_c)(k-k_c)^2$$
$$+\cdots+\sigma_R(k_c,R_c)(R-R_c)+\cdots.$$

由(14.8.22)和(14.8.23)可以简化为

$$\sigma(k,R)=\frac{1}{2}\sigma_{kk}(k_c,R_c)(k-k_c)^2+\sigma_R(k_c,R_c)(R-R_c)+\cdots. \tag{14.8.25}$$

可以证明能够忽略掉泰勒级数中的其他项. 既然不稳定波数波段在 $\sigma(k,R)=0$ 处截止，就有，对 $R>R_c$，不稳定波数的估计满足

$$|k-k_c|<\sqrt{\frac{-2\sigma_R}{\sigma_{kk}}(R-R_c)}.$$

还需要假定

$$\sigma_R(k_c,R_c) > 0, \tag{14.8.26}$$

因为(对固定的 $k=k_c$)希望 σ 在 $R=R_c$ 是递增的(从 $\sigma<0$ 到 $\sigma>0$).

在其他线性偏微分方程中，对时间的指数依赖是复的，$e^{st}=e^{(\sigma-i\omega)t}$. 这样 σ 是 s 的实部，而 $-\omega$ 是 s 的虚部，其中 $\omega(k)$ 是频率.

14.8.4 不适定问题

一个与时间有关的线性偏微分方程叫做*不适定的*，如果最大的指数增长率是正的，因而对所允许的波数无界. 当一个问题不适定时，就表明其偏微分方程没有提供出该物理现象的正确模型. 而是忽略了一些重要物理特性或者没有正确地对其建模. [679]

下面证明(对时间的)后向热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{14.8.27}$$

是一个不适定的问题，因其指数增长率($u=e^{\sigma t}e^{ikx}$)是

$$\sigma=k^2.$$

$u=0$ 是不稳定的，因为对所关注的 k，$\sigma>0$. 这样增长率是正的，且当 $k\to\infty$ 时无界，因而(14.8.27)不适定. 困难出现在 $k\to\infty$ 的时候，这对应于无限短波(波长趋于0). 后向热传导方程甚至在 $x=0$ 和 $x=L$ 为零边界时也不适定，因为 $k=n\pi/L$，增长率为正和当 $k\to\infty$ 时无界. (如果无限短波波长能够排除掉，后向热传导方程就不是不适定的了).

若没有四阶的导数项，(14.8.20)就像后向热传导方程一样是不适定的. 然而，四阶导数项阻止了短波的增长，尽管对(14.8.20)，$u=0$ 是不稳定，对固定的 $R>R_c=2$，最大增长率是有界的. 由(14.8.21)，$\sigma_{\max}=-1+R^2/4$(它是有限的).

14.8.5 微不稳定色散波和线性化复金茨堡-朗道方程

对线性纯色散波，偏微分方程的解是以 $e^{i(kx-\omega t)}$ 的形式，其中频率 ω 是实的并满足色散关系 $\omega=\omega(k)$. 而对其他偏微分方程，频率不是实的. 这里要用复增长率 $s=\sigma-i\omega$：$e^{ikx}e^{st}=e^{ikx}e^{(\sigma-i\omega)t}$来研究一般性问题. 若对某个允许的 k，$\sigma>0$，就说 $u=0$ 是不稳定的. 偏微分方程往往依赖于参数 R，其中对 $R<R_c$，解 $u=0$ 稳定，而在 $R=R_c$，解变得不稳定. 如在 14.7 节，假设存在优先波数 k_c，使得实指数增长率 $\sigma(k,R)$ 在 $k=k_c$ 和 $R=R_c$ 附近满足(14.8.22)、(14.8.23)、(14.8.24)以及(14.8.26).

这一节假定 R 略微的大于 R_c，使得解 $u=0$ 不稳定，但是 σ 的最大正值小，因而称 $u=0$ 是*微不稳定的*. 此时，在 k_c 附近有一小波段不稳定波数. 能量应当集中在一个波数 k_c 上. 对纯色散波(在 14.6 节)讨论了近单频假设 $u(x,t)=A(x,t)e^{i(k_0x-\omega(k_0)t)}$，并且证明了对纯色散波，波包近似地满足线性薛定谔方程，$\frac{\partial A}{\partial t}+\omega'(k_0)\frac{\partial A}{\partial x}=i\frac{\omega''(k_0)}{2!}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$. 此处希望把这个结果推广到微不稳定波的情形，其中对时间的依赖关系是振荡和指数的 $e^{st}=e^{(\sigma-i\omega)t}$. 在 $R=R_c$ 和 $k=k_c$，指数增长是零，$\sigma(k_c,R_c)=0$，不过时常有非零临界频率 $\omega(k_c,R_c)$. 和前面一样，也希 [680]

望$A(x, t)$是初等振荡行波的波包:

$$\boxed{u(x,t) = A(x,t)e^{ik_c x}e^{s(k_c,R_c)t} = A(x,t)e^{i[k_c x-\omega(k_c,R_c)t]}.} \tag{14.8.28}$$

存在 $u=e^{ikx}e^{[\sigma(k,R)-i\omega(k,R)]t}$形式的初等解. 若应用前面有关时间和空间导数的想法——(14.7.2)和(14.7.3),则有

$$-i\frac{\partial}{\partial x}\Leftrightarrow(k-k_c) \tag{14.8.29}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Leftrightarrow s(k,R)-s(k_c,R_c) = s(k,R)+i\omega(k_c,R_c). \tag{14.8.30}$$

可以导出振幅 $A(x, t)$满足的偏微分方程,这只要考虑 $s(k, R)$在 $R=R_c$ 和 $k=k_c$ 泰勒展开:

$$s(k,R) = s(k_c,R_c)+s_k(k-k_c)+\frac{s_{kk}}{2!}(k-k_c)^2+\cdots+s_R(R-R_c)+\cdots. \tag{14.8.31}$$

所有的偏导数都取在 $R=R_c$ 和 $k=k_c$ 的值. 这里假定$(k-k_c)^2=O(R-R_c)$,因此泰勒级数的其他项都比所保留的项小. 注意 $s(k, R)$是复的,$s(k, R)=\sigma(k, R)-i\omega(k, R)$,$s_R$ 和 s_{kk}都是复的. 由(14.8.23),对 $R=R_c$ 和 $k=k_c$,$\sigma_k=0$,$s_k=\sigma_k-i\omega_k=-i\omega_k$. 利用(14.8.29)和(14.8.30),由(14.8.31)得到

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -is_k\frac{\partial A}{\partial x}-\frac{s_{kk}}{2!}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+s_R(R-R_c)A.$$

由于 $is_k=\omega_k$是通常实的群速度,那么复的波振幅所满足的偏微分方程叫做线性化的复金茨堡-朗道方程(LCGL):

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial t}+\omega_k\frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{s_{kk}}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+s_R(R-R_c)A.} \tag{14.8.32}$$

由于 $s_{kk}=\sigma_{kk}-i\omega_{kk}$,所以扩散系数(二阶导数的系数)是复的. 为使 LCGL(14.8.32)是适定的,扩散系数 $-\sigma_{kk}/2$ 的实部必须是正的. 这是由于实增长率 σ 在 $R=R_c$ 和 $k=k_c$ 处有局部最大值(14.8.24),因而为正. 方程(14.8.32)是波包方程,它将线性薛定谔方程差不多推广到了(任何学科中的)任意物理情形,其中 $u=0$ 是微不稳定的. (14.8.32)的似波解随时间指数增长.

681

二维空间. 可以证明在二维的问题中 $s(k_1, k_2, R)$,这样(14.8.29)能推广成 $k_1-k_{10}=-i\partial/\partial x$,$k_2-k_{20}=-i\partial/\partial y$. 还可以确定坐标系方向,使得基本波在 x 方向,此时 $k_{20}=0$,$k_{10}=k_c$:

$$k_1-k_c = -i\frac{\partial}{\partial x} \tag{14.8.33}$$

$$k_2 = -i\frac{\partial}{\partial y}. \tag{14.8.34}$$

可以证明(14.8.32)所需要做的变化非常小. (14.8.31)的线性项 $s_k(k-k_c)$给出了(14.8.32)的群速度项,因此一维时的 $\omega_k\partial A/\partial x$ 在二维时是 $\omega_{k1}\partial A/\partial x+\omega_{k2}\partial A/\partial y$. 对平方项要更小心些. 假设原始的偏微分方程没有优先方向,这样就是 $s(k)$,其中 $k=|\vec{k}|=\sqrt{k_1^2+k_2^2}$. (14.8.31)中的泰勒级数仍然成立. 只需计算平方项$(k-k_c)^2$,由(14.8.33)和(14.8.34)可知 k_1 靠近 k_c,k_2 靠近零. 用在$(k_c, 0)$点的两个变量(k_1, k_2)的泰勒级数来近似,

$$k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} = k_c + \frac{1}{2}(k_1 - k_c) + \frac{1}{2k_c}k_2^2 + \cdots.$$

先导出 k^2 的表达式也许更容易些. 非常重要的是要注意到 $k_1 - k_c$ 与 k_2^2 同样小. 特别假定 $(k_1 - k_c)^2 = O(k_2^4) = O(R - R_c)$. 这样就导出了已知的线性化 Newell-Whitehead-Segel 方程：

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \omega_{k1}\frac{\partial A}{\partial x} + \omega_{k2}\frac{\partial A}{\partial y} = -\frac{s_{kk}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\mathrm{i}}{2k_c}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 A. \tag{14.8.35}$$

在对含有非线性项的情形使用扰动法时，右端要加上复立方非线性项 $\gamma A|A|^2$.

14.8.6 非线性复金茨堡-朗道方程

LCGL(14.8.32)描述了线性偏微分方程解的振幅，此时解 $u=0$ 是微不稳定的. 线性偏微分方程常常是非线性偏微分方程的小振幅近似. 由于(14.8.32)的解随时间指数增长，解最终会充分大，使得线性近似不再有效. 可以用扰动法证明对于大多数有微不稳定解的物理问题，(14.8.32)必须加入非小线性项修正. 这样，$u(x, t)$ 可以用前面的 $A(x, t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_c x - \omega(k_c, R_c)t]}$ 近似，但 $A(x, t)$ 满足复金茨堡-朗道(CGL)方程

682

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial t} + \omega_k\frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{s_{kk}}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + s_R(R - R_c)A + \gamma A|A|^2,} \tag{14.8.36}$$

其中 $\gamma = \alpha + \mathrm{i}\beta$ 是个重要的复系数，对于具体的物理问题，它可以相当费力地用扰动法而得到. 注意 CGL 方程(14.8.36)推广了 NLS 方程(14.7.35)，其二阶导数系数是复的($s_{kk} = \sigma_{kk} - \mathrm{i}\omega_{kk}$，$\omega_{kk} < 0$)，且不再是虚系数，并含有不稳定项 $s_R(R - R_c)A$ 和复的非线性系数. 与几乎所有非线性偏微分方程一样，对 CGL(14.8.36)初值问题的完整分析几乎是不可能的. 这里只讨论一些较简单的结论.

分歧图和朗道方程. 如果原本的不稳定问题是常微分方程，或者波数固定在 k_c(如在有限区域上解偏微分方程)，那么振幅方程(14.8.36)将不依赖空间变量. 若不依赖空间变量，CGL 振幅方程就变成了常微分方程，即朗道方程

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = s_R(R - R_c)A + \gamma A|A|^2.} \tag{14.8.37}$$

在 $R = R_c$，解 $u=0$ 变为不稳定的[$u(x, t) = A(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_c x - \omega(k_c, R_c)t]}$]，其中频率是 $\omega(k_c, R_c)$. 这是常微分方程的霍普夫分歧现象的特征. 另外系数 $s_R = \sigma_R - \mathrm{i}\omega_R$ 和 $\gamma = a + \mathrm{i}\beta$ 是复的，及 $\sigma_R > 0$ [见(14.8.26)]. 朗道方程能够通过引入极坐标 $A(t) = r(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}$ 解出来. 由 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + \mathrm{i}r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)$，再适当地选取实部和虚部，(14.8.37)就变成了关于模 r 和相位 θ 的两个方程：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sigma_R(R - R_c)r + \alpha r^3} \tag{14.8.38}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\omega_R(R - R_c) + \beta r^2. \tag{14.8.39}$$

假设 $\sigma_R > 0$，对应的解 $u=0$ 在 $R < R_c$ 时稳定，在 $R > R_c$ 时不稳定. 径向方程(14.8.38)是最重

要的并且可以不依赖于相位方程求解. 下面先寻找径向方程(14.8.38)的平衡解 r_e:

683

$$0 = \sigma_R(R - R_c)r_e + \alpha r_e^3.$$

平衡解 $r_e = 0$ 对应着 $A = 0$ 或者 $u = 0$. 下面先简短核实已知的: 解 $u = 0(r_e = 0)$ 在 $R < R_c$ 时稳定和在 $R > R_c$ 时不稳定. 还有一个重要的(在附近的)平衡点满足

$$0 = \sigma_R(R - R_c) + \alpha r_e^2.$$

要存在非零平衡点, $\sigma_R(R - R_c)/\alpha < 0$. 若 $\alpha < 0$, 存在非零平衡点就要 $R > R_c$(反之亦然). 在图 14.8.5 中给出了两种情况($\alpha < 0$ 和 $\alpha > 0$)的图像; 作为参数 R 函数的平衡解为 r_e 就是知名的分歧图. $R = R_c$ 叫做歧点, 因为平衡解的个数在此发生变化(分岔). 由于 $r = |A|$, 这里只考虑 $r \geq 0$. 然而, 这些是一阶非线性微分方程(14.8.38)仅有的平衡解.

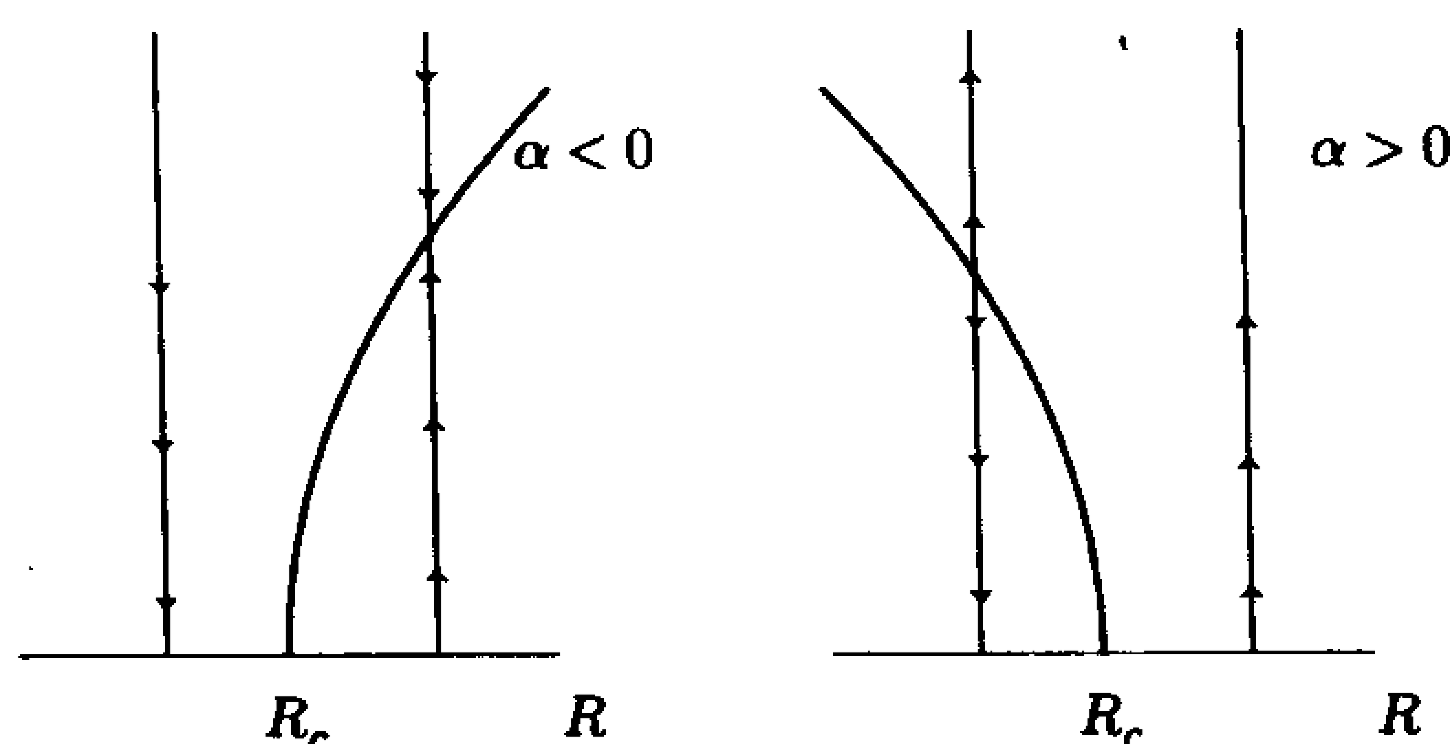


图 14.8.5 霍普夫分歧的分歧图和一维相图

为了确定所有解(不只是平衡解)和这些平衡解是稳定的还是不稳定的, 在图 14.8.5 中给出了一维相图. 最好是作出垂直直线(对应固定 R), 并且在 r 增加时标注向上的箭头($dr/dt > 0$)、在 r 减少时标向下的箭头($dr/dt < 0$). 微分方程(14.8.38)确定了 dr/dt 的符号. 有依赖于 α(γ 的实部)符号的两种情况. 为简单起见, 仅讨论 $\alpha < 0$ 的情形, 但两个图都给出来了. 如果在 $\alpha < 0$ 的情形, r 充分大, 由(14.8.38)可见 $dr/dt < 0$(并标出向下的箭头). 箭头的方向在平衡点改变(若平衡点是单根). 这样 $R < R_c$ 时, 附近的所有解随时间增大都趋于平衡解, $r = 0$(对应 $u = 0$)是稳定的, 而 $R > R_c$ 时, $r = 0$ 是不稳定的. 分歧非零平衡点($R \to R_c$ 时与 $r = 0$ 合并)只在 $R > R_c$ 时才存在, 并且是稳定的(如果 $\alpha < 0$). 当 $\alpha < 0$($\alpha > 0$)时, 称之为超临界(次临界)霍普夫分歧, 因为非零平衡点只对 $R > R_c$($R < R_c$)存在. 在分歧图中通常不稳定的平衡点标为虚线(稳定的平衡点标实线), 如在图 14.8.6 所示. 非线性项有两种可能的作用: 如果非线性项起稳定化作用($\alpha < 0$), 则对 $R > R_c$ 创造出稳定解. 这个稳定解有小振幅, 因为 r_e 是和 $(R - R_c)^{1/2}$ 成比例的, 这与基于泰勒级数的分析一致, 此时假设 $R - R_c$ 小和 r 靠近零. 如果非线性项起不稳定化作用($\alpha > 0$), 则对 $R < R_c$ 创造出不稳定解. 如果非线性项起不稳定化作用($\alpha > 0$), 要问的问题就是当 $R > R_c$ 时会发生什么. 此时, 线性动力系统不稳定, 而非线性项不稳定化解. 可以证明它反而会使解爆炸(有限时间内趋于无穷). 如果 $R > R_c$(且 $\alpha > 0$), 则不存在适于线性或弱非线性分析的小振幅稳定解; 而必须要理解原本的完全非线性化问题.

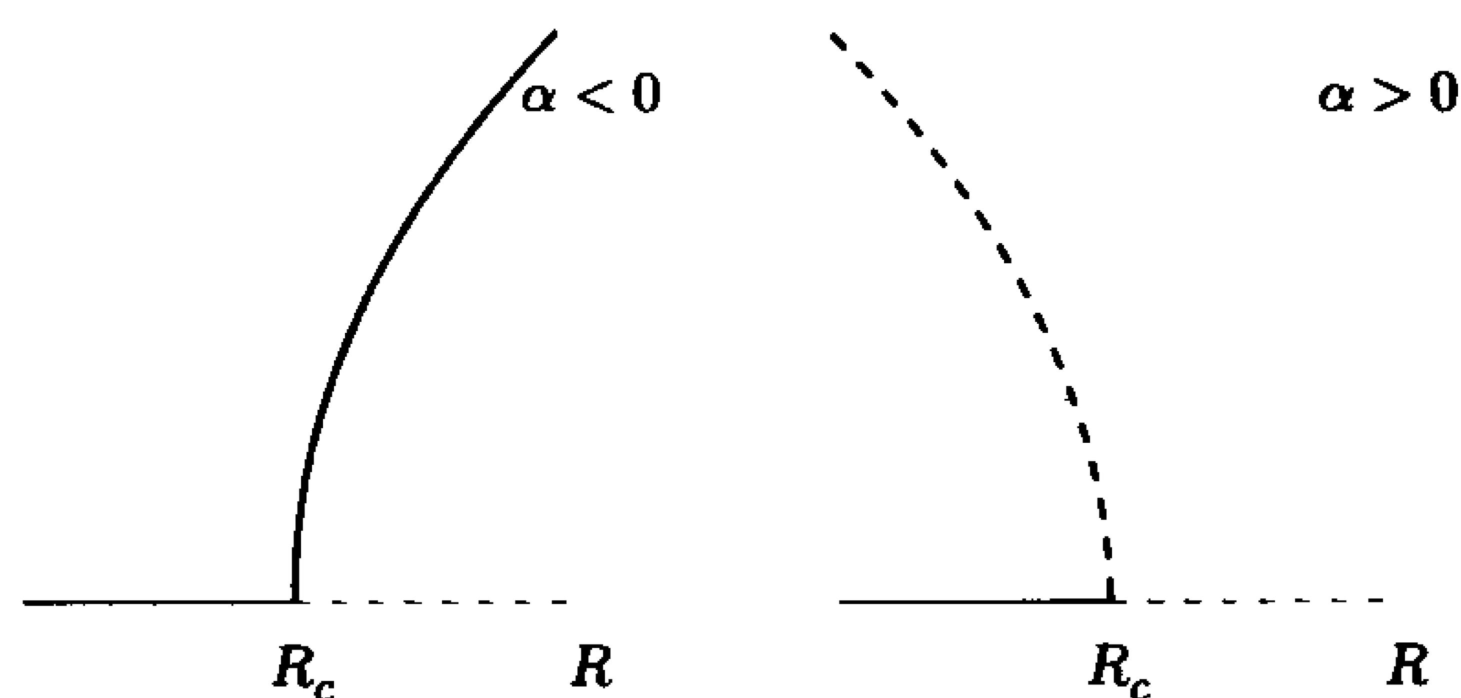


图 14.8.6 霍普夫分歧的分歧图(包括稳定性)

分歧平衡解(稳定或不稳定)有等于一个具体(依赖于 $R - R_c$)常数的 r. 由(14.8.39)可知, 这个分歧平衡解($A = re^{i\theta} = r_e e^{i\theta}$)实际上是频率为 $\omega_R(R - R_c) - \beta r_e^2 = (R - R_c)(\alpha\omega_R - \beta\sigma_R)/\alpha$ 的周期解. 对原来的偏微分方程($u = A(x, t)e^{i[k_c x - \omega(k_c, R_c)t]}$), 频率是 $\omega(k_c, R_c) +$

$(R-R_c)(\alpha\omega_R-\beta\sigma_R)/\alpha$，对应着频率对参数 R 和平衡振幅 $|A|^2=r_e^2$ 的依赖. 分歧解关于时间是周期的(具有一个不变波数). 对于这个相对简单的朗道方程(14.8.37)，在零解不稳定时，分岐解是稳定的(反之亦然).

复金茨堡-朗道方程的分歧解. 下面要证明 CGL 方程(14.8.36)有初等非零平面行波解

$$A(x,t)=A_0e^{i[Kx-\Omega t+\phi_0]}, \tag{14.8.40}$$

其中 A_0 和 ϕ_0 是实常数. 由 $u(x,t)=A(x,t)e^{i[k_cx-\omega(k_c,R_c)t]}$ 知，$u(x,t)$ 的波数是 k_c+K，以前称 k 是 $u(x,t)$ 的波数，因而

$$K=k-k_c,$$

而频率为 $\omega(k_c,R_c)+\Omega$. 要使 CGL 方程(14.8.36)成立，K 必须小(对应波数靠近于 k_c). 要说明(14.8.40)是解，将(14.8.40)代入到(14.8.36)中：

684 ~ 685

$$-i\Omega+i\omega_kK=\frac{s_{kk}}{2}K^2+s_R(R-R_c)+\gamma A_0^2.$$

由 $s_{kk}=\sigma_{kk}-i\omega_{kk}(\sigma_{kk}<0)$，$s_R=\sigma_R-i\omega_R(\sigma_R>0)$ 和 $\gamma=\alpha+i\beta$ 都是复的，必须取实部和虚部：

$$\alpha A_0^2=-\left[\frac{\sigma_{kk}}{2}K^2+\sigma_R(R-R_c)\right] \tag{14.8.41}$$

$$\Omega=\omega_kK+\frac{\omega_{kk}}{2}K^2+\omega_R(R-R_c)-\beta A_0^2. \tag{14.8.42}$$

只有当(14.8.41)的右端与 α 同号时，才有(14.8.40)形式的解. 由(14.8.41)看出 $\sigma_{kk}K^2/2+\sigma_R(R-R_c)$ 是增长率 $\sigma(k,r)$ 的泰勒级数展开式(14.8.25). 与前面一样，有两种完全不同的情形，这取决于非线性项系数 γ 的实部 α 的符号. 若 $\alpha<0$(非线性项对较简单的朗道方程起稳定化作用的情形)，只有 $\sigma_{kk}K^2/2+\sigma_R(R-R_c)>0$ 才有解，这对应正的增长率(靠近 k_c 的小波段指数增长波数仅当 $R>R_c$ 时出现). 若 $\alpha>0$(较简单的朗道方程分歧解不稳定的情形)，$\sigma_{kk}K^2/2+\sigma_R(R-R_c)<0$ 时有解，这对应负增长率(排除了靠近 k_c 的小波段指数增长波数). 然而，要确定这些解是否稳定不太容易. 下一小节将对此作简要讨论.

虽然(14.8.42)没有(14.8.41)重要，但还是应该做些说明. 方程(14.8.42)表明解(14.8.40)的频率是变动的，因为该频率依赖于波数、参数 R 和振幅.

复金茨堡-朗道方程分岐解的稳定性. 确定 CGL 方程(14.8.36)的这些初等行波解的稳定性是困难的. 这里首先对非线性薛定谔方程(系数为纯虚数的 CGL 方程)导出调制不稳定性，然后再概述实系数情形的一些结论. 而一般情形(此处省略了)与实的情形比较接近.

调制(Benjamin-Feir)不稳定性. 当 CGL 方程中系数为纯虚数($s_{kk}=-i\omega_{kk}(\sigma_{kk}=0)$，$s_R=\sigma_R-i\omega_R(\sigma_R=0)$，$\gamma=i\beta(\alpha=0)$)时，CGL 方程可简化为非线性薛定谔方程(NLS)：

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\omega_k\frac{\partial A}{\partial x}=i\frac{\omega_{kk}}{2}\frac{\partial^2A}{\partial x^2}+i\beta A|A|^2. \tag{14.8.43}$$

在(14.8.43)右端实际上还有附加项 $-i\omega_R(R-R_c)A$，由于这一项的作用仅是对应参数 R 变化的频率移位，故把它忽略掉了. 这对应的不是 $u=0$ 的不稳定性，而是描述了能量都集中于一个波数 k_0 的一种情形. 对任意 A_0，总存在初等行波解 $A(x,t)=A_0e^{i(Kx-\Omega t+\phi_0)}$. 方程(14.8.41)变成了 $0=0$，使得 A_0 任意，而方程(14.8.42)确定频率 Ω. (经常在光学中讨论的

686

特例有 $K=0$，此时 $\Omega=-\beta A_0^2$.）下面会证明（并不容易），若 β 和 ω_{kk} 的符号不同，这些解是稳定的，并且在某些情形下这些非线性行波会被观察到．而当 β 和 ω_{kk} 的符号相同时，那些行波是不稳定的，Benjamin 和 Feir 在 1967 年首先证明了这一点．这里采用 Newell[1985]的方法．由于按群速度移动，(14.8.43)中的 ω_k 项可以忽略不计．将 $A=re^{i\phi}$ 代入(14.8.43)，设非常数波数 $k=\phi_x$ 和频率 $\Omega=-\phi_t$．注意到 $A_x=(r_x+ikr)e^{i\phi}$，$A_t=(r_t-i\Omega r)e^{i\phi}$ 及 $A_{xx}=[r_{xx}-k^2r+i(2kr_x+k_xr)]e^{i\phi}$．虚部给出 $-\Omega r=\omega_{kk}(r_{xx}-k^2r)/2+\beta r^3$，这恰好就是非线性薛定谔方程的色散关系，而实部则给出了振幅调制的恰当方程：

$$r_t+\frac{\omega_{kk}}{2}(2kr_x+k_xr)=0. \tag{14.8.44}$$

利用色散关系，波的守恒 $k_t+\Omega_x=0$ 变为

$$k_t+\left[\frac{\omega_{kk}}{2}\left(-\frac{r_{xx}}{r}+k^2\right)-\beta r^2\right]_x=0. \tag{14.8.45}$$

方程(14.8.44)和(14.8.45)给出了非线性薛定谔方程解的精确表示．注意到简单精确解 $k=0$，$r=r_0$．从色散关系得到 $\Omega=-\beta r_0^2$，这对应非线性薛定谔方程的精确解 $A=r_0e^{-i\beta r_0^2t}$．要研究这个解的稳定性，取 $k=\mu r_1$ 和 $r=r_0+\mu r_1$，其中 μ 小，线性化非线性方程组，得到（去掉了下标 1）

$$r_t+\frac{\omega_{kk}}{2}k_xr_0=0 \tag{14.8.46}$$

$$k_t-\frac{\omega_{kk}}{2}\frac{r_{xxx}}{r_0}-2\beta r_0r_x=0. \tag{14.8.47}$$

消去 k_{xt} 得到一个线性常系数色散偏微分方程

$$r_{tt}=\frac{\omega_{kk}}{2}\left(-\frac{\omega_{kk}}{2}r_{xxxx}-2\beta r_0^2r_{xx}\right). \tag{14.8.48}$$

用通常的方式分析(14.8.48)，设 $r=e^{i(\alpha-\Omega_1t)}$ 其中 α 是边带波数．方程(14.8.48)的色散关系是 $\Omega_1^2=\left(\frac{\omega_{kk}}{2}\right)^2\alpha^4-\omega_{kk}\beta r_0^2\alpha^2$．如果 ω_{kk} 和 β 异号，对所有 α，频率 Ω_1 是实的，并且解是（对边带）稳定的．当 ω_{kk} 和 β 同号时（叫做调焦非线性薛定谔），此时满足 $0<\alpha<2\sqrt{\beta/\omega_{kk}}\,|r_0|$ 波数的波是不稳定的，这就出现了 Benjamin-Feir 边带不稳定性．波长充分长的边带扰动是不稳定的．

687 **非线性薛定谔方程的回归**．对(14.8.43)带周期性边界条件初值问题的分析表明不止一个对应基本傅里叶级数的波长可能是不稳定的（参见 Ablowitz and Clarkson[1991]）．首先这些不稳定波将按从属于线性偏微分方程的方式指数增长．然而，其非线性最终阻止了增长的持续．对有不稳定初等解的情形（ω_{kk} 与 β 同号），实验（Yuen and Lake[1975]）、数值解（Yuen and Ferguson[1978]）和高级理论引人注目地表明长时间之后，解几乎回到它的初始状态，而不稳定性几乎相同地一次次重复出现．这种现象称为回归．

稳定和不稳定的有限振幅波．如果 $u=0$ 在 $R=R_c$ 变得不稳定，其优先波数是 $k=k_c$，但增长率是实的（$s_{kk}=\sigma_{kk}$，$\sigma_{kk}<0$ 其中 $\omega_{kk}=0$，$s_R=\sigma_R$ 其中 $\sigma_R>0$，$\omega_R=0$），非线性项系数也是实的（$\gamma=\alpha$），则 CGL(14.8.36)变为

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\sigma_{kk}}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \sigma_R(R - R_c)A + \alpha A|A|^2,$$

这里也假设 $\omega_k = 0$. 对应 $K = k - k_c$ 的初等行波解是 $A(x, t) = A_0 e^{i[Kx - \Omega t + \phi_0]}$. 利用前面的结果，如果

$$\alpha A_0^2 = -\left[\frac{\sigma_{kk}}{2}K^2 + \sigma_R(R - R_c)\right] \quad (14.8.49)$$

$$\Omega = 0, \quad (14.8.50)$$

(14.8.41)和(14.8.42)就有解. 这个解关于空间是周期的，关于时间是不变的. 与一般情况一样，若 $\alpha < 0$，只在小波段指数增长波数$\left(|k - k_c| < \sqrt{\frac{2\sigma_R(R - R_c)}{-\sigma_{kk}}}\right)$才有解，这在 $R > R_c$ 时发生. 然而，1965 年 Eckhaus 证明，这些波只有在更小的波段 $|k - k_c| < \sqrt{\frac{2\sigma_R(R - R_c)}{-3\sigma_{kk}}}$ 中才是稳定的.

14.8.7 长波的不稳定性

仍然考虑有形式为 $u(x, t) = e^{ikx}e^{st} = e^{ikx}e^{(\sigma - i\omega)t}$ 解的线性偏微分方程，这里允许不稳定增长($\sigma > 0$)或衰减($\sigma < 0$). 如果波在波数 $k \neq 0$ 时，第一次变得不稳定，通常复金茨堡-朗道方程(14.8.32)或(14.8.36)是成立的. 然而长波 $k = 0$ 一般会以不同的方式变得不稳定. 对 $k = 0$ 的增长率通常是 $\sigma(0) = 0$. 否则，一个空间均匀解会随指数增长或衰减. 由于正的和负的波数应当按同样的速率增长，增长率就是 k 的偶函数. 用对小 k 的泰勒级数得到 $\sigma(k) \sim \sigma_{kk}k^2/2$(下面马上会说得更精确些). 若长波是稳定的，则 $\sigma_{kk} < 0$. 在改变参数 R 的值时，使长波变得不稳定的最简单方法是 σ_{kk}在 R_c 点改变符号，使得在 R_c 附近的长波，$\sigma(k, R) \sim \sigma_{Rkk}k^2(R - R_c)/2$，其中 $\sigma_{Rkk} > 0$. 既然想研究 R 在 R_c 附近时的长波，最好考虑在泰勒级数中的下一项： 688

$$\sigma(k,R) \sim \frac{\sigma_{Rkk}}{2}k^2(R - R_c) + \frac{\sigma_{kkkk}}{4!}k^4, \quad (14.8.51)$$

其中 $\sigma_{Rkk} > 0$. 如果四阶项是起稳定作用的，$\sigma_{kkkk} < 0$，就看到对 $R > R_c$，有一波段不稳定($\sigma < 0$)长波 $k^2 < -12\sigma_{Rkk}(R - R_c)/\sigma_{kkkk}$. 因为 ω 是 k 的奇函数(由于相速度是偶函数)，

$$\omega(k,R) \sim [\omega_k + \omega_{kR}(R - R_c) + \cdots]k + \frac{\omega_{kkk}}{3!}k^3. \quad (14.8.52)$$

方括号中的项是群速度的改进近似. 为了找到长波在最一般情形下所对应的偏微分方程，这里允许纯色散项. 由于 $s = \sigma - i\omega = \partial/\partial t$ 和 $k = -i\partial/\partial x$，则(在随群速度移动后)得到

$$u_t = -\frac{\sigma_{Rkk}}{2}(R - R_c)u_{xx} + \frac{\sigma_{kkkk}}{4!}u_{xxxx} + \frac{\omega_{kkk}}{3!}u_{xxx}. \quad (14.8.53)$$

利用扰动法，适当的非线性项可以像 KdV 方程的一样简单(14.7.15)，或者更复杂些，如同薄液膜中的长波不稳定性，参见 Benney[1966].

14.8.8 反应扩散方程的模式形成和图灵不稳定性

1952 年，图灵(他还以在第二次世界大战中破译德国密码和计算机科学中的图灵机著名)

推测生物组织(形态发生)中的模式也许是由分布依赖空间的化学浓度不稳定性引起的，而这些浓度是用偏微分方程描述的. 特别广泛和形式优美的描绘是由 Murray[1993]和 Nicolis[1995]给出的. 一般性的理论是有的，不过这里只是在两种化学物的反应模型中添加空间扩散，叫做 Prigogine and Lefever[1968]的布鲁塞尔机(Brusselator)：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 1 - (b+1)u + au^2 v + D_1 \nabla^2 u \tag{14.8.54}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = bu - au^2 v + D_2 \nabla^2 v. \tag{14.8.55}$$

有四个参数 $a>0$，$b>0$，$D_1>0$，$D_2>0$，但只让 b 变化. 先确定所有空间均匀稳态平衡解，平衡解必须满足 $1-u[(b+1)-auv]=0$ 和 $u(b-auv)=0$. 第二个方程给出的 $u=0$ 它不能满足第一个方程. 这样，第二个方程给出了 $auv=b$，由第一个方程就得到 $u=1$. 对这个例子，有唯一的均匀稳态 $u=1$，$v=b/a$，对应一个化学的平衡. 这里不会有到不同均匀稳态的分歧.

689

线性化. 为了分析均匀稳态的稳定性，在稳态附近近似偏微分方程组. 引入自均匀稳态的位移 $u-1=u_1$，$v-b/a=v_1$. 与常微分方程组的稳定性分析(见 14.8.1 小节)一样，线性化每个化学反应，包括二元函数泰勒级数中的线性项. 还必须包括扩散项，由于平衡解是空间不变的，要做到这点很容易. 这样就得到了位移$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$必须满足的线性偏微分方程组：

$$\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} = J\vec{u}_1 + \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \nabla^2 \vec{u}_1, \tag{14.8.56}$$

其中 J 是在均匀稳态的通常雅可比矩阵，

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(b+1)+2auv & au^2 \\ b-2auv & -au^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-1 & a \\ -b & -a \end{bmatrix}. \tag{14.8.57}$$

空间和时间依赖. 线性偏微分方程(14.8.56)是常系数的，所以基于分离变量的傅里叶分析有效：

$$\vec{u}_1 = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \vec{w}(t). \tag{14.8.58}$$

如果没有边界，$\vec{k}$是任意的，对应使用傅里叶变换. 注意$\nabla^2 \vec{u}_1 = -k^2 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \vec{\omega}(t)$，$k=|\vec{k}|$. 这样时间相关部分满足常系数线性常微分方程组：

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = A\vec{w}, \tag{14.8.59}$$

其中矩阵 A 和雅可比矩阵有关：

$$A = J - \begin{bmatrix} D_1 k^2 & 0 \\ 0 & D_2 k^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-1-D_1 k^2 & a \\ -b & -a-D_2 k^2 \end{bmatrix}. \tag{14.8.60}$$

线性方程组. 线性方程组(14.8.59)是由设$\vec{\omega}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$来求解的，其中 $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$，这样 λ 是矩阵 A 的特征值，$\vec{v}$是相应的特征向量. 特征值由

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} b - 1 - D_1 k^2 - \lambda & a \\ -b & -a - D_2 k^2 - \lambda \end{bmatrix} \quad (14.8.61)$$

确定. 两个特征值满足

$$\lambda^2 + \lambda(a - b + 1 + (D_1 + D_2)k^2) + a + aD_1k^2 - (b - 1)D_2k^2 + D_1D_2k^4 = 0. \quad (14.8.62)$$

690

这里的目的是确定作为四个参数和波数 k 函数的均匀态何时稳定或不稳定. 均匀态的稳定性是由特征值确定的，因为解与 $e^{\lambda t}$ 成比例. 若一个特征值是正的或有正的实部 $\text{Re}(\lambda) > 0$，则均匀态是不稳定的. 如果所有的特征值都有负的实部 $\text{Re}(\lambda) < 0$，则均匀态是稳定的. 对 2×2 矩阵 A，最好注意到(见 14.8.1 小节)解是稳定的当且仅当 $\text{tr}\, A < 0$ 和 $\det A > 0$. 不过，先考虑个较简单的方法(也可以用于高阶问题，但有很大的限制性). 解由稳定变到不稳定有两种方式.

一个特征值 $\lambda = 0$（其余特征值满足 $\text{Re}(\lambda) < 0$）. 如果 $\lambda = 0$，由(14.8.62)可得 b 是波数 k 的函数：

$$b = D_1k^2 + 1 + \frac{aD_1}{D_2} + \frac{a}{D_2k^2}. \quad (14.8.63)$$

参数 b 为波数 k 函数的图像见图 14.8.7(注意 $k \to 0$，$k \to \infty$ 时的渐近行为). 在临界波数 k_c 处，函数有最小值 $b_{\min} = D_1k_c^2 + 1 + \frac{aD_1}{D_2} + \frac{a}{D_2k_c^2}$：

$$k_c^4 = \frac{a}{D_1D_2}. \quad (14.8.64)$$

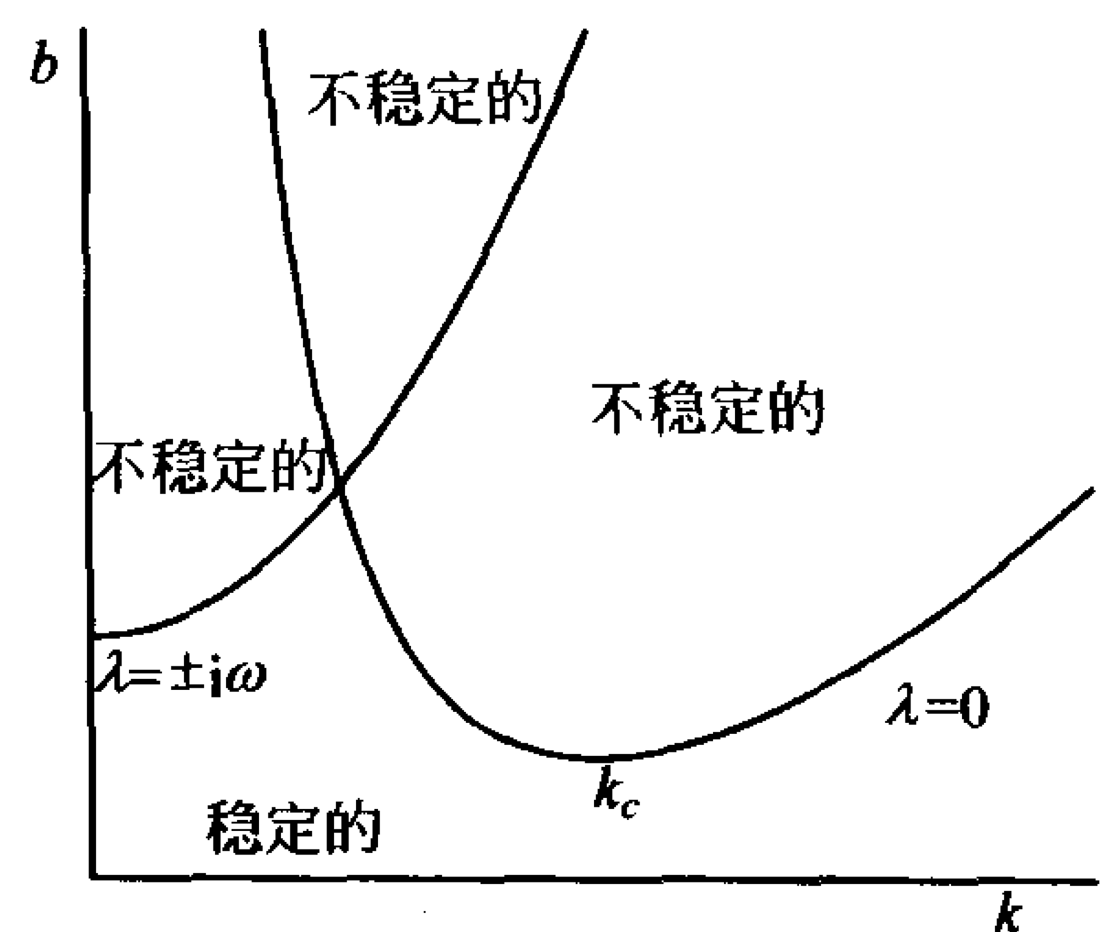


图 14.8.7 图灵稳定性

如果其他特征值是正的，曲线 $\lambda = 0$ 也许不在稳定性区域的边界上. 另一个重要问题是这条曲线的哪一边稳定和哪一边不稳定. 这些问题并不容易回答. 首先要(也许数值地)确定曲线上一点的另一个特征值. 稳定性保持不变直到这条曲线与在其上稳定性改变的另一曲线相交. 对这条曲线上稳定性改变的部分，由计算(也许是数值计算)这条曲线每一边一个点的特征值就确定了各处的稳定性.

由于 $\text{Re}(\lambda) = 0$，则一族复共轭特征值满足 $\lambda = \pm i\omega$（而其他任何特征值满足 $\text{Re}(\lambda) < 0$）. 将 $\lambda = \pm i\omega$ 代入(14.8.62)就能够确定复共轭特征值. (14.8.62)的虚部必须为零，使得 b 是一个不同的 k 的函数：

$$b = a + 1 + (D_1 + D_2)k^2, \quad (14.8.65)$$

而频率满足 $\omega^2 = a + aD_1k^2 - (b - 1)D_2k^2 + D_1D_2k^4$. 这样(14.8.65)并不对所有的 k 都成立，而只对使得 $\omega^2 > 0$ 的 k 成立. 对于曲线(14.8.65)，b 在 $k = 0$ 处有最小值 $b = a + 1$. 这条曲线上有实频率的部分将稳定性和不稳定性分开，但是这样还是无法知道哪边稳定和哪边不稳定.

691

稳定性的(迹与行列式)充要条件. 下面仔细确定均匀态在哪儿稳定. 如图 14.8.2 所示，平衡解稳定当且仅当矩阵同时满足迹 < 0 和行列式 > 0. 要稳定，就必须同时满足两个不等式：

$$\text{tr}A = b - a - 1 - (D_1 + D_2)k^2 < 0 \quad (14.8.66)$$

$$\det A = a + aD_1k^2 - (b - 1)D_2k^2 + D_1D_2k^4 > 0. \quad (14.8.67)$$

这比(14.8.63)和(14.8.65)更精确. (行列式条件与 $\lambda = 0$ 有关，而迹条件与复特征值有关.)

通过在不等式(14.8.66)和(14.8.67)中解出 b，就能看出稳定区域在两条曲线(14.8.63)和(14.8.65)的下面.

模式形成. 两个最小值 $a+1$ 和 $b_{\min}$ 之间有一个竞争. 如果参数 b 比两者都小，这个均匀态就是稳定的. 假设 b 从稳定区域内逐渐增大. 若第一次不稳定出现在 $k=0$(无限波长)，这对应的是与常微分方程完全一样的偏微分方程平衡解的不稳定性，其均匀态还没有发展出任何空间结构就变得不稳定了. 若第一次不稳定发生在由(14.8.64)所给出的 $k=k_c$ 处，则存在一个优先波数(优先波长 $2\pi/k_c$). 这样，从一个均匀态出现了一个波长可由均匀态不稳定性理论预测的模式，这个现象称作图灵不稳定性. 图灵不稳定性在科学上是重要的，因为模式的空间波长是由数学方程从任意没有空间结构的初始条件预测出来的，它解释了在自然中观测到的空间结构. 这个模式是具有可预测波长 $2\pi/k_c$ 的一维近似线性波.

692

复金茨堡-朗道. 如果出现了图灵稳定性并且参数 b 只是略微大于其临界值，则在 k_c 周围就有一小波段不稳定波数. 能量将集中于这些波数，如14.8.5节和14.8.6节讨论过的，其振幅可以用具有典型三次非线性项 $\lambda A|A|^2$ 的复金茨堡-朗道(CGL)方程(14.8.36)近似，其中的三次非线性项可以用扰动法得到，复系数 $\gamma=\alpha+\mathrm{i}\beta$. 为大概了解该非线性项的作用，这里讨论更初等的有霍普夫分歧的常微分方程朗道方程(14.8.37). 这就看到若 $\alpha>0$，非线性项是不稳定化的，而 $\alpha<0$ 时，非线性项是稳定化的. 用扰动法来确定 $\alpha>0$ 还是 $\alpha<0$ 并不特别容易. 音叉性分歧是次临界的还是超临界的？这有时可以由数值计算原本的偏微分方程确定，其中的参数略微大于其不稳定值. 如果存在有简单空间结构的平衡解，它常常可以从数值数据看出来，所形成的模式是由于这种类型的音叉形分歧. 另一方面，如果数值数据没有显示出非线性分析所预测的简单空间结构，非线性项可能是不稳定化的，而简单解也是不稳定的.

二维模式. 在二维不稳定性问题中，有优先波数 $|\vec{k}|=k_c$. 因为 $\vec{k}$ 是一个向量，所以任何方向的波都是可能的，尽管都具有相同的波长特征. 这是个困难的题目，此处只给出几个简短评论. 由线性理论，解可能是许多这种波的复杂叠加. 实际上在许多不同学科中观察到了六边形模式，它们可能是由六个彼此差60°的 $\vec{k}$ 叠加出来的. 六边形模式的波长由线性不稳定性理论给出. 许多反应扩散方程的系统似乎以螺旋波模式为特征的，在试验室中经常观察到这种模式. 三维一般化(参看 Scott[1987])叫做涡旋波和涡旋环. 根据 Winfree[1987]，人类心脏病发作前的心脏心律不齐以涡旋环的心电波为特征. 偏微分方程的螺旋解和涡漩解及其稳定性的研究已经是当代的研究领域了.

习题 14.8

14.8.1 (非线性)摆满足常微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+\sin x=0$，其中 x 是角度. 平衡解满足 $\sin x_0=0$. 自然位置是 $x_0=0$，倒置位置是 $x_0=\pi$. 通过考虑在平衡解附近的初始条件和近似微分方程，确定平衡解是稳定的还是不稳定的？(提示：由 x 靠近 x_0，利用 $\sin x$ 在 $x=x_0$ 的泰勒级数.)

693

14.8.2 (a)画出鞍结点分歧在点 $(x_c, R_c)=(0, 0)$ 对应 f_R，f_{xx} 不同符号的四个分歧图.

(b)用一维相图确定稳定性.

14.8.3 假设在歧点 $(x_c, R_c)=(0, 0)$，除了通常的歧点标准外，$f_R=0$，$f_{xx}\neq 0$. 利用泰勒级数分析，证明近

似式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{f_{xx}}{2}x^2+f_{xR}Rx+\frac{f_{RR}}{2}R^2.$$

(a)若$f_{xR}^2>f_{RR}f_{xx}$，歧点叫做跨临界的．用一维相图分析稳定性(假定$f_{xx}>0$)．并解释为什么跨临界歧点也叫稳定性的更换．

(b)若$f_{xR}^2<f_{RR}f_{xx}$，证明歧点仅对$R=R_c$是孤立的．

14.8.4 假设在歧点$(x_c, R_c)=(0, 0)$，除了通常的歧点标准外，$f_R=0$，$f_{xx}=0$．利用泰勒级数分析，证明近似式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f_{xR}Rx+\frac{f_{RRR}}{6}R^3+\cdots.$$

假设$f_{xR}>0$．证明有两种依赖f_{RRR}符号的情形．用一维相图分析稳定性(假定$f_{xx}>0$)．并解释为什么这种分岐也叫音叉形分歧．

14.8.5 对下面的例子，画出分歧图并利用一维相图确定稳定性

(a)$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2x+5R$

(b)$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-5x+2R$

(c)$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2x^2+5R$

(d)$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-2x^2-5R$

(e)$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=xR+x^2$

(f)$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-(x-3R)(x-5R)$

(g)$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Rx-x^3$

(h)$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Rx+x^3$

(i)$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-(x-4)(x-\mathrm{e}^R)$

(j)$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1+(R-1)x+x^2$ (先画出R作为x函数的图像)

(k)$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=R^2+Rx+x^2$

(l)$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=R^2+4Rx+x^2$

694

14.8.6 在下面的偏微分方程中，求出($\mathrm{e}^{st}=s^{\sigma-\mathrm{i}\omega t}$)指数衰减率$\sigma$和频率$\omega$.

(a)$\frac{\partial u}{\partial t}=-u-R\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-c\frac{\partial u}{\partial x}$

*(b)$\frac{\partial u}{\partial t}=-u-R\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$

(c)$\frac{\partial u}{\partial t}=u+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

14.8.7 求出($\mathrm{e}^{st}=\mathrm{e}^{(\sigma-\mathrm{i}\omega)t}$)指数衰减率$\sigma$和频率$\omega$．并简要解释为什么下列偏微分方程是不适定的或不是的：

(a)$\frac{\partial u}{\partial t}=4\frac{\partial u}{\partial x}$

(b)$\frac{\partial u}{\partial t}=\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial x}$

*(c)$\frac{\partial u}{\partial t}=-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial x}$

(d)$\frac{\partial u}{\partial t}=\mathrm{i}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(e)$\frac{\partial u}{\partial t}+\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{i}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(f)$\frac{\partial u}{\partial t}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$

(g)$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$

(h)$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$

14.8.8 导出(14.8.20)和(14.8.21).

14.8.9 确定线性化复金茨堡－朗道方程的色散关系.

14.8.10 对$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\sigma_R(R-R_c)r+\alpha r^3$，画出分歧图，用一维相图确定解的稳定性：

(a)假设$\sigma_R<0$且$\alpha>0$.

(b)假设$\sigma_R<0$且$\alpha<0$.

14.8.11 在什么情况下(参数)，对较小的b出现的是图灵分歧而不是均匀态？

14.8.12 考虑由于在显现出图灵分歧的模型中忽略了扩散项的动力系统.

(a)证明在$b=a+1$出现霍普夫分歧.

(b)数值地研究这个动力系统.

695

14.9 奇异扰动法：多尺度

有物理意义的问题常常可以表述为靠近易解问题的困难数学问题. 例如，在 9.6 节，区域可以是近乎圆形的，希望确定出小扰动的作用. 那里确定了该区域内的解与相应圆形区域内解的差异. 一般有(或引入)一个小参数 ε，而解(例如)$u(x, y, t, \varepsilon)$依赖于 ε. 如果

$$u(x,y,t,\varepsilon) = u_0(x,y,t) + \varepsilon u_1(x,y,t) + \cdots, \tag{14.9.1}$$

这叫做*正则扰动问题*. 第一项(首阶项)$u_0(x, y, t)$常常对应无扰动问题 $\varepsilon=0$ 的已知解. 通常只需要不多的前几项，而如 $u_1(x, y, t)$的高阶项则可以通过将正则展开式代入原偏微分方程依次确定.

当正则扰动展开不再有效时，就出现了更困难(和有意思)的情况，称之为*奇异扰动问题*. 有专门讨论这一课题的书(例如，Kevorkian and Cole[1996]的书). 有时候就有像(14.9.1)那样的简单展开式，但在不同区域上成立不同形式的展开式. 这时，可以建立*边界层方法*(参看 14.10 节). 有时不同尺度的变量(马上要定义)还同时有效，此时要使用*多尺度法*.

14.9.1 常微分方程：弱非线性阻尼振子

作为在最简单情形(常微分方程)下多尺度法的一个有启发作用的例子，考虑带小非线性阻尼(和速度的立方成比例)的线性振子. 引入无量纲变量，使得模型常微分方程为

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + u = -\varepsilon\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^3,} \tag{14.9.2}$$

其中 ε 是小正参数，$0<\varepsilon\ll 1$. 扰动对应非线性阻尼的形式，因为它是速度 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ 的奇函数.

正则扰动展开(朴素想法). 假设解有正则扰动展开式：

696

$$u(t,\varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \cdots, \tag{14.9.3}$$

将(14.9.3)代入(14.9.2)，然后比较 ε 不同次幂的系数，就得到

$$O(\varepsilon^0):\frac{\mathrm{d}^2u_0}{\mathrm{d}t^2} + u_0 = 0 \tag{14.9.4}$$

$$O(\varepsilon^1):\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2} + u_1 = -\left(\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}\right)^3. \tag{14.9.5}$$

首阶项给出了无扰动方程(14.9.4). 无扰动方程的解是周期的，是 $\sin t$ 和 $\cos t$ 的线性组合. 这里用复指数(以便简化后面的非线性计算)：

$$u_0(t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + A^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}. \tag{14.9.6}$$

其中 A 为复振幅，要使得解是实的，设另一个系数 A^* 是 A 的复共轭.

利用首阶解(14.9.6)，得到了最重要的扰动项 u_1 的微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2} + u_1 = \mathrm{i}(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - A^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})^3 = \mathrm{i}(A^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}t} - 3A^2A^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) + (*), \tag{14.9.7}$$

其中(*)代表(14.9.7)右端其他项的复共轭. 右端的项包含三次谐波项 $\mathrm{e}^{\pm 3\mathrm{i}t}$和基本项 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}t}$. 利用待定系数法，容易得到对应三次谐波项的一个特解. 然而在正则扰动法中，与 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}t}$相关的强制频率等于固有频率，因此产生了共鸣. 而对应的解随时间线性增长，称之为*久期的*. 这样，

(14.9.7)的一个特解是

$$u_1(t) = \mathrm{i}\frac{A^3}{1-9}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}t} + \mathrm{i}\#A^2A^* t\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + (*),$$

其中#是个可以求出来的数(用待定系数法)，但这里不需要知道它的值. 这里还要有齐次解.

如果 εt 小，解的正则展开式 $u_0(t)+\varepsilon u_1(t)+\cdots$ 是个有效的近似. 而当 t 足够大使得 εt 与 1 同阶或更大时，由于久期项，正则展开式就不再有效.

多尺度法. 正则扰动展开对长时间不再有效. 不过，正则扰动展开提示当 $\varepsilon t = O(1)$ 时，会出现有趣的动态特性. 如果在长时间尺度上对解感兴趣，就假设解 $u(t,\ T,\ \varepsilon)$ 依赖于两个变量，即快变量 t 和缓变量

$$\boxed{T = \varepsilon t,} \tag{14.9.8}$$

697

叫做多尺度法(有时也叫缓变法). 可以用链式法则：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T},} \tag{14.9.9}$$

其中导数是偏导数(会对偏导数用下标记号). 此时非线性阻尼振子方程(14.9.2)变成

$$\boxed{u_{tt} + 2\varepsilon u_{tT} + \varepsilon^2 u_{TT} + u = -\varepsilon(u_t + \varepsilon u_T)^3.} \tag{14.9.10}$$

正则扰动展开 $u(t,\ T,\ \varepsilon) = u_0(t,\ T) + \varepsilon u_1(t,\ T) + \cdots$ 给出

$$O(\varepsilon^0): \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + u_0 = 0 \tag{14.9.11}$$

$$O(\varepsilon^1): \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + u_1 = -\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}\right)^3 - 2\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}\right). \tag{14.9.12}$$

只有 ε 项 $-2\partial/\partial T(\partial u_0/\partial t)$ 与朴素扰动展开式(14.9.4)和(14.9.5)不同.

首阶项方程是无扰动线性振子，但要记住 $\partial/\partial t$ 要求 T 固定，这样，(14.9.11)的通解是

$$\boxed{u_0(t,T) = A(T)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + A^*(T)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t},} \tag{14.9.13}$$

其中 $A(T)$ 是缓变时间变量的任意复函数.

由(14.9.13)，第一个扰动项满足

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 u_1}{\mathrm{d}t^2} + u_1 &= \mathrm{i}(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - A^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})^3 - 2\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \frac{\mathrm{d}A^*}{\mathrm{d}T}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)\\ &= \mathrm{i}(A^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}t} - 3A^2A^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) - 2\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + (*).\end{aligned}} \tag{14.9.14}$$

通过在扰动问题中消去长期项确定 $A(T)$. 引入多尺度变量是为了使解对长时间 $t = O(1/\varepsilon)$ 还有效. 久期项(右端与 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ 成比例的共鸣项)是不允许的，此时得到

$$\boxed{2\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}T} = -3A^2A^*.} \tag{14.9.15}$$

698

方程(14.9.15)能够用另一种方法得到. 方程(14.9.14)是有两个齐次边界条件(这里是周期限制)的非齐次线性微分方程. 根据弗雷德霍姆择一定理，只有当右端与满足齐次边界条件的齐次微分方程的解(现在是 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ 和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$)正交时，(14.9.14)的周期解才存在. 方程(14.9.15)由弗

雷德霍姆择一定理可以得到，因为由傅里叶理论，e^{3it}在区间 0 到 2π 上与 $e^{\pm it}$正交.

复振幅的缓变微分方程可以利用复量的振幅和相位形式求解：

$$A(T) = r(T)e^{i\phi(T)}, \tag{14.9.16}$$

此时

$$u_0(t,T) = r(T)e^{i(t+\phi(T))} + r(T)e^{-i(t+\phi(T))} = 2r(T)\cos(t+\phi(T)).$$

这样 $2r(T)$是振荡的缓变实振幅，振荡的相位是 $t+\phi(T)$. 在物理上，相位对时间的导数是频率，这样频率是 $1+\varepsilon d\phi/dT$.

由于 $dA/dT = (dr/dT + ird\phi/dT)e^{i\phi(T)}$ 和 $A^2A^* = r^3e^{i\phi(T)}$，利用实部和虚部，(14.9.15)给出

$$2\frac{dr}{dT} = -3r^3 \tag{14.9.17}$$

$$r\frac{d\phi}{dT} = 0. \tag{14.9.18}$$

一个复方程(14.9.15)等价于两个实方程(14.9.17)和(14.9.18). 在这个具体的例子中，相移 $\phi(T)$是常数，不过振荡的振幅由于满足(14.9.17)的非线性阻尼而衰减. 由分离变量 $dr/r^3 = -3dT/2$. 经过一些代数计算，就有振荡的振幅由于小非线性阻尼而是代数衰减的，

$$\boxed{r(T) = \frac{r(0)}{\sqrt{1+3r^2(0)T}}.}$$

特别地，相位 $t+\phi(T)$快速变化而振幅 $r(T)$缓缓变化. 这对于多尺度问题相当具有典型性. 其解的图像是富有启发性的，因为它展现了两个尺度变量的同步情况. 如果振幅缓慢衰减，就称振子为缓变振子.

14.9.2 常微分方程：缓变振子

699 如果常数是缓变的，振荡常微分方程的解也可能需要多尺度法. 考虑有缓变弹簧常数的弹簧振子系统：

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2(\varepsilon t)u = 0.} \tag{14.9.19}$$

这个方程也可以表示有缓变折射率 $\omega(\varepsilon t)$的光的传播. 在变化空间介质中，有固定时间频率 ω_f ($E = u(x)e^{-i\omega_f t}$)的一维的波动方程$\partial^2E/\partial t^2 = c^2(x)\partial^2E/\partial x^2$ 变为 $-\omega_f^2u = c^2(x)\partial^2E/\partial x^2$. 这是一个关于 x 的常微分方程，可以证明它等价于与时间有关的方程(14.9.19). 如果 $c(x)$变化的典型长度比解的典型波长 $2\pi c/\omega_f$ 要长得多，那么这种介质就是缓变的.

(14.9.19)的解依赖两个变量，快变相位 θ 和缓变时间 $T=\varepsilon t$. 如果系数 $\omega(\varepsilon t)$是常数，振动频率就是 ω. 直观地说，若 ω 是缓变的，振荡的频率应当变化缓慢，确切地说是 $\omega(\varepsilon t)$. 有关频率观念是这样的：如果有了相位 θ，$d\theta/dt$ 就是频率. 这样，就提出快变相位恰好满足

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = \omega(\varepsilon t).} \tag{14.9.20}$$

[可以证明基于不满足(14.9.20)相位的扰动法行不通.] 下面是快变相位的等价表达式：

$$\boxed{\theta = \int \omega(\varepsilon t)\,\mathrm{d}t = \frac{\int \omega(T)\,\mathrm{d}T}{\varepsilon}.} \tag{14.9.21}$$

假定解 $u(\theta, T, \varepsilon)$ 依赖两个变量：快变相位 θ[满足(14.9.20)]和缓变时间 $T=\varepsilon t$. 根据链式法则(多尺度变量法)有

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \omega(T)\frac{\partial}{\partial \theta} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T}.} \tag{14.9.22}$$

因为(14.9.22)中的算子没有常系数，所以必须小心计算二阶导数：

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} = \left(\omega(T)\frac{\partial}{\partial\theta} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T}\right)\left(\omega(T)\frac{\partial}{\partial\theta} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T}\right)$$

$$= \omega^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \varepsilon\left(2\omega(T)\frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial}{\partial\theta} + \omega'(T)\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial T^2}.$$

700

微分方程(14.9.19)变为

$$\boxed{\omega^2\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \varepsilon\left(2\omega(T)\frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \omega'(T)\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial T^2} + \omega^2 u = 0.} \tag{14.9.23}$$

假设多尺度变量的扰动展开式为

$$u(\theta,T,\varepsilon) = u_0(\theta,T) + \varepsilon u_1(\theta,T) + \cdots. \tag{14.9.24}$$

将(14.9.24)代入(14.9.23)，就得到一列方程，这里只用到前两个：

$$O(\varepsilon^0):\qquad \omega^2\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial\theta^2} + u_0\right) = 0 \tag{14.9.25}$$

$$O(\varepsilon^1):\qquad \omega^2\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta^2} + u_1\right) = -2\omega(T)\frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial u_0}{\partial\theta} - \omega'(T)\frac{\partial u_0}{\partial\theta}. \tag{14.9.26}$$

对于首阶项来说，解是关于相位变量 θ 的一个基本缓变振子：

$$\boxed{u_0(\theta,T) = A(T)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + A^*(T)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta},} \tag{14.9.27}$$

其中 $A(T)$ 是后面就要确定的缓变时间变量 $T=\varepsilon t$ 的任意函数. 方程(14.9.27)与(14.9.20)表明缓变频率是 ω，与前面所要求的一样.

将(14.9.27)形式的解代入(14.9.26)，就得到

$$\omega^2\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta^2} + u_1\right) = -[2\omega(T)A'(T) + \omega'(T)A(T)]\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + (*).$$

右端 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta}$ 的系数是久期的(共鸣，因为强制频率等于固有频率)，必须被消去：

$$\boxed{2\omega(T)A'(T) + \omega'(T)A(T) = 0.} \tag{14.9.28}$$

方程(14.9.28)是缓变复振幅的微分方程. 由于 $A(T)$ 可能是复的，

$$A(T) = r(T)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}. \tag{14.9.29}$$

不过，可以证明(在这个问题中)ψ 是常数，因而振幅满足

$$2\omega(T)r'(T) + \omega'(T)r(T) = 0. \tag{14.9.30}$$

701

这个方程可以用分离变量，或者常见的线性技巧，或者只要注意到

$$\frac{d}{dT}(\omega^{\frac{1}{2}}r) = 0 \tag{14.9.31}$$

与(14.9.30)等价来求解. 从而通过积分可得

$$\boxed{r(T) = c\omega^{-\frac{1}{2}},} \tag{14.9.32}$$

其中 c 是任意的常数.

这个例子说明了首先由爱因斯坦研究过的作用量守恒. 下面要说明对于缓变系数, 能量是不守恒的. 然而作用量是守恒的:

$$\frac{d(\text{作用量})}{dT} = 0, \text{其中:作用量} = \frac{\text{能量}}{\text{频率}}.$$

这里的能量定义为系数为常数时的能量. 如果在微分方程中 ω 是常数, $\frac{d^2u}{dt^2}+\omega^2u=0$, 则能量定义为 $E=\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\frac{\omega^2}{2}u^2$(动能加势能). 这个微分方程的解(用复数记号)是 $u=Ae^{i\omega t}+A^*e^{-i\omega t}=2r\cos(\omega t+\phi_0)$. 此时能量为 $E=\omega^2(2r)^2(\cos^2+\sin^2)/2=2\omega^2r^2$. 因而, 由作用量守恒,

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{2\omega^2r^2}{\omega}\right) = 0,$$

这等价于用多尺度法得到的(14.9.32). 在更复杂的问题中, 物理学家利用作用量守恒确定振幅的缓变. 注意, 根据(14.9.32), 能量是不守恒的,

$$\frac{dE}{dT} = \frac{d}{dT}(\omega^2r^2) \neq 0.$$

要想弄清楚缓变恢复力如何向系统注入能量或从系统取出能量是不太容易的. 这也就是作用量守恒是十分有用的原因所在.

总之, 这里分析了带缓变系数的线性微分方程

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2(\varepsilon t)u = 0.} \tag{14.9.33}$$

得到了下面的近似解:

702

$$\boxed{u(t) \approx u_0(\theta,T) = c\omega^{-\frac{1}{2}}e^{i\theta+\psi} + (*) = 2c\omega^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\int\omega(\varepsilon t)dt + \psi\right),} \tag{14.9.34}$$

其中 c 和 ψ 是任意的常数, 因为 θ 满足

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = \omega(\varepsilon t).} \tag{14.9.35}$$

这不难记忆成相位的导数可以从频率的物理直观理解得到. 只需要记住 $\omega^{-1/2}$ 的魔幻振幅因子(或使用作用量守恒). 这是变化介质中波传播问题的众所周知公式. 也可以用来近似任意施图姆-刘维尔问题大特征值所对应的特征函数(见 6.9 节). 这种方法有时不准确地叫做 WKB 方法, 也许叫刘维尔-格林(1837 年独立地做出)方法更合适. WKB(Wentzel、Kramers 和 Brillouin)1920 年(对量子力学中贯穿隧道的问题)解决了系数 ω^2 从正变到负的问题, 并得到了如(14.9.34)的振荡解和相应的指数解之间的联络公式.

14.9.3 固定空间域上的微不稳定偏微分方程

考虑下面的弱非线性偏微分方程模型：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Ru - \varepsilon u^3, \tag{14.9.36}$$

相应边界条件是 $u(0,\ t)=0$，$u(L,\ t)=0$. 线性化问题($\varepsilon=0$)有解 $\sin(n\pi x/L)e^{\sigma t}$，其中 $\sigma = R-k(n\pi/L)^2$. 有些模式(固定 n)指数增长与参数 R 有关. 对足够大的 n，模式就依指数衰减(与热传导方程类似). 第一次($u=0$ 的)不稳定出现在 R 略微比 $k(\pi/L)^2$ 大的时候，此时只有模式 $n=1$ 指数增长，其余模式都指数衰减. 从而，假设 $R=(\pi/L)^2+\varepsilon R_1$，其中 $R_1>0$，使得

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left[k\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \varepsilon R_1\right]u - \varepsilon u^3.} \tag{14.9.37}$$

可以证明朴素扰动展开式对长时间的尺度失效：

$$\boxed{T = \varepsilon t.} \tag{14.9.38}$$

因而使用多尺度法：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T}.} \tag{14.9.39}$$

703

由(14.9.39)，偏微分方程(14.9.37)变为

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 u + \varepsilon\left[-\frac{\partial u}{\partial T} + R_1 u - u^3\right].} \tag{14.9.40}$$

将扰动展开式 $u=u_0+\varepsilon u_1\cdots$代入(14.9.40)给出

$$O(\varepsilon^0):\qquad \frac{\partial u_0}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 u_0 \tag{14.9.41}$$

$$O(\varepsilon):\qquad \frac{\partial u_1}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + k\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 u_1 - \frac{\partial u_0}{\partial T} + R_1 u_0 - u_0^3. \tag{14.9.42}$$

利用首阶项方程(14.9.41)的一个初等解：

$$\boxed{u_0 = A(T)\sin\frac{\pi x}{L}.} \tag{14.9.43}$$

也可以包括其他模式，但是其他模式随时间指数衰减得很快. 微不稳定模式 $\sin(\pi x/L)$的振幅 $A(T)$是缓变时间的任意函数. 下面通过从 $O(\varepsilon)$方程中消去久期项来确定 $A(T)$.

由(14.9.43)，扰动方程(14.9.42)变为

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + k\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 u_1 - \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}T}\sin\frac{\pi x}{L} + R_1 A\sin\frac{\pi x}{L} - A^3\sin^3\frac{\pi x}{L}, \tag{14.9.44}$$

相应的齐次边界条件是 $u_1(0,\ t)=0$，$u_1(L,\ t)=0$. 由于 $\sin^3(\pi x/L) = 3/4\sin(\pi x/L) - (1/4)\sin(3\pi x/L)$，非线性项生成 x 的第三谐波. (14.9.44)的右端只是含有第一和第三谐波，这样(特征函数展开法)

$$u_1 = B_1\sin\frac{\pi x}{L} + B_3\sin\frac{3\pi x}{L}. \tag{14.9.45}$$

将(14.9.45)代入(14.9.44)，得到关于系数的常微分方程

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} = -\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}T} + R_1 A - \frac{3}{4}A^3 \tag{14.9.46}$$

$$\frac{\partial B_3}{\partial t} + 8k\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 B_3 = \frac{1}{4}A^3. \tag{14.9.47}$$

对第三谐波的特解$\left[B_3 = \frac{1}{32k}\left(\frac{L}{\pi}\right)^2 A^3\right]$是不需要的，因为它不是长久的. 对 x 第三谐波的齐次解

704 是指数衰减的.

下面考虑对第一谐波的高阶项(14.9.46). (14.9.46)的右端是缓变时间 $T=\varepsilon t$ 的函数，因而左端关于快变时间变量 t 是常数. 如果右端是常数 c，对应的解是 $B_1 = ct$，随时间代数增长. 代数增长在渐近展开式 $u = u_0 + \varepsilon u_1 + \cdots$中是不能接受的. (14.9.46)右端所有对空间的第一谐波都是久期的，产生随时间的代数增长(与 t 成比例). 久期项必须为零(消去它们)，这意味着振幅 $A(T)$缓慢变化并且满足(14.8.6 小节中的朗道方程)

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}T} = R_1 A - \frac{3}{4}A^3.} \tag{14.9.48}$$

根据线性理论(A 小)，振幅指数增长(若 $R_1 > 0$). 然而如用一维相图在图 14.9.1 中所示，非线性性阻止了这种增长. 振幅 $A(T)$ 平衡于($t\to\infty$ 时的极限)$A = \pm\sqrt{\frac{4R_1}{3}}$(与初始条件有关). 这就是音叉形分歧，可由图 14.9.1 中的分歧图看出(其中的平衡振幅画成参数 R_1 函数的图像). 若 $R_1 > 0$，$A=0$ 是不稳定的，但 $A = \pm\sqrt{\frac{4R_1}{3}}$是稳定的. 参数 R_1 测量的是到参数 R 的临界值 $\varepsilon R_1 = R - k(\pi/L)^2$ 的距离.

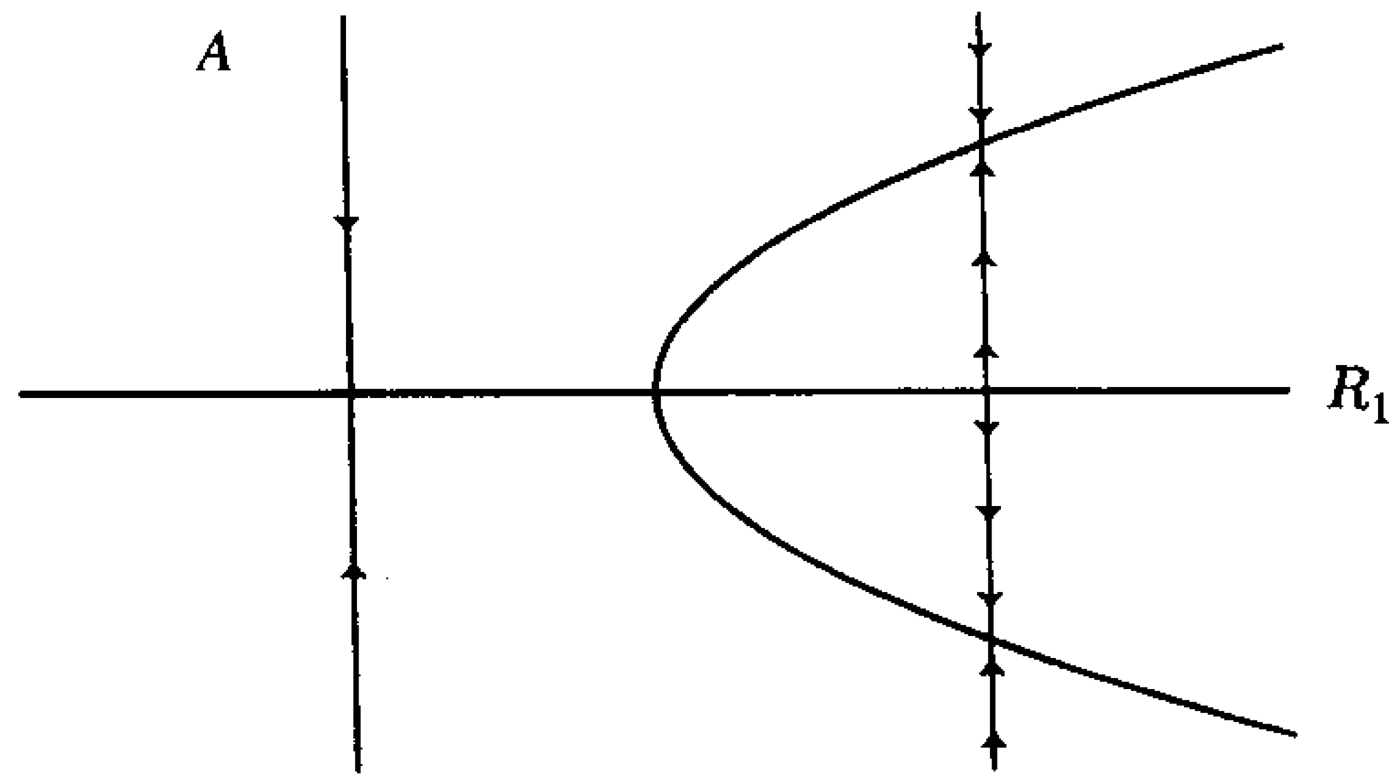


图 14.9.1 音叉形分歧的一维相图和分歧图(朗道方程)

14.9.4 关于波动方程的缓变介质

在二维或三维的空间介质中的波动方程是

705

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2(x,y,z)\,\nabla^2 E.$$

在均匀介质中的平面波(c 为常数)满足 $E = E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1 x + k_2 y + k_3 z - \mathrm{i}\omega t)}$，其中 $k = |\vec{k}| = \omega/c$. 对于均匀介

质，相位的空间部分可以如下定义：$\theta = k_1x + k_2y + k_3z$. 从而波数向量满足 $k_1 \equiv \partial\theta/\partial x$，$k_2 \equiv \partial\theta/\partial y$，$k_3 \equiv \partial\theta/\partial z$，可以概括为$\vec{k} = \nabla\theta$.

对于非均匀介质(c 随空间变化)，时间频率 ω 常常是固定的(也许是由于无穷远处的入射波)，$E = ue^{-i\omega t}$，使得 u 满足约化波动方程(也称为亥姆霍兹方程)

$$\boxed{\nabla^2 u + n^2 u = 0,} \tag{14.9.49}$$

其中 $n = \omega/c$ 是折射率. 这里假设是缓变介质，也就是，介质在比典型波长要长得多的距离上变化，使得 $n^2 = n^2(\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon z)$. 例如，当 x 在很长的距离 $O(1/\varepsilon)$(许多波长)上变化时，折射率可能改变. 类似的一维问题在 14.9.2 节中已经讨论过了.

对于缓变波列，引入快变未知相位 θ，并与均匀介质一样地定义波数，$k_1 \equiv \partial\theta/\partial x$，$k_2 \equiv \partial\theta/\partial y$，$k_3 \equiv \partial\theta/\partial z$. 因而，波数向量定义为

$$\boxed{\vec{k} = \nabla\theta.} \tag{14.9.50}$$

假设解依赖这个快相位 θ 和缓变空间尺度 $X = \varepsilon x$，$Y = \varepsilon y$，$Z = \varepsilon z$. 在多尺度变量方法中(由链式法则)

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} = k_1\frac{\partial}{\partial\theta} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial X}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(k_1\frac{\partial}{\partial\theta} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial X}\right)\left(k_1\frac{\partial}{\partial\theta} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial X}\right)$$

$$= k_1^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \varepsilon\left(2k_1\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial\theta} + k_{1_X}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial X^2}.$$

一般地，利用向量记号(梯度算子的下标表示对缓变空间变量的导数)，

$$\nabla^2 = k^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \varepsilon\left(2\vec{k}\cdot\nabla_X\frac{\partial}{\partial\theta} + \nabla\cdot\vec{k}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \varepsilon^2\nabla_X^2. \tag{14.9.51}$$

706

这样，约化波动方程(14.9.49)变为

$$\boxed{k^2\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \varepsilon\left(2\vec{k}\cdot\nabla_X\frac{\partial u}{\partial\theta} + \nabla\cdot\vec{k}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \varepsilon^2\nabla_X^2 u + n^2 u = 0.} \tag{14.9.52}$$

可以证明(并不容易)要使扰动法有效，就要求满足短时距方程：

$$\boxed{k^2 = \nabla\theta\cdot\nabla\theta = n^2,} \tag{14.9.53}$$

其中 $k = |\vec{k}|$. 如 12.7 节所讨论的，短时距方程说的是缓变波的波数总是与无限平面波的波数($k = \omega/c = n$)一致. 短时距方程描述了缓变介质的折射(它也是几何光学的基础). 短时距方程可以由特征线法求解相位 θ(参见 12.6 节).

假设短时距方程(14.9.53)成立，那么(14.9.52)变为

$$n^2\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \varepsilon\left(2\vec{k}\cdot\nabla_X\frac{\partial u}{\partial\theta} + \nabla\cdot\vec{k}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \varepsilon^2\nabla_X^2 u + n^2 u = 0. \tag{14.9.54}$$

引入扰动展开式 $u = u_0 + \varepsilon u_1 + \cdots$，就得到

$$O(\varepsilon^0):\quad n^2\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial\theta^2} + u_0\right) = 0 \tag{14.9.55}$$

$$O(\varepsilon):\quad n^2\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta^2}+u_1\right)=-2\vec{k}\cdot\nabla_X\frac{\partial u_0}{\partial\theta}-\nabla\cdot\vec{k}\frac{\partial u_0}{\partial\theta}\ .\tag{14.9.56}$$

(14.9.55)的首阶解是一个缓变平面波

$$\boxed{u_0=A(X,Y,Z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.}\tag{14.9.57}$$

下面通过在扰动展开式的下一项中消去久期项来确定振幅 A 的缓变依赖.

将(14.9.57)代入(14.9.56)，第一个扰动满足

$$n^2\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta^2}+u_1\right)=-(2\vec{k}\cdot\nabla_X A+\nabla\cdot\vec{k}A)\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.\tag{14.9.58}$$

(14.9.58)右端的所有项都是久期项(共鸣：由于强制频率等于固有频率). 这样，为了得到关于与缓变系数有关的长距离的有效渐近展开，振幅就必须满足*运输方程*

707

$$\boxed{2\vec{k}\cdot\nabla_X A+\nabla\cdot\vec{k}A=0.}\tag{14.9.59}$$

因为$\vec{k}=\nabla\theta$，运输方程的一个等价形式是

$$\boxed{2\nabla\theta\cdot\nabla_X A+\nabla^2\theta A=0.}\tag{14.9.60}$$

可以用特征线法得到振幅 A 和相位 θ 的优雅表达式(例如见 Bleistein[1984]). 这些方程是 Keller 关于平面波钝物(如圆柱或飞机或潜水艇)衍射几何理论的基础.

总之，对缓变介质的约化波动方程($\nabla^2 u+n^2 u=0$)的首次解是

$$u_0=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\tag{14.9.61}$$

其中 θ 满足短时距方程(14.9.53)，A 满足运输方程(14.9.59)或(14.9.60). 还可以得到高阶项.

14.9.5 缓变线性色散波(包括弱非线性作用)

作为一个对偏微分方程多尺度变量方法的简单例子，考虑下列带弱非线性扰动的典型线性色散波(具有无量纲变量)：

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u=\varepsilon\beta u^3.}\tag{14.9.62}$$

无扰动偏微分方程($\varepsilon=0$)是一个带有附加恢复力 $-u$ 的线性波动方程. 这个无扰动问题的平面波解 $u=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$ 满足色散关系 $\omega^2=k^2+1$，所以这个无扰动问题是个线性色散波. 对于平面波，引入相位 $\theta=kx-\omega t$ 使得波数 $k=\partial\theta/\partial x$ 和频率 $\omega=-\partial\theta/\partial t$.

下面寻找由于缓变初始条件或扰动项的缓变平面波解. 对于平面波引入未知相位，并定义其波数和频率为

708

$$\boxed{k=\frac{\partial\theta}{\partial x}}\tag{14.9.63}$$

$$\boxed{\omega=-\frac{\partial\theta}{\partial t}\ .}\tag{14.9.64}$$

先假设波数 k 可以不是常数而可以是缓变的，经过许多波长后才会有大变化．假定存在由对偏微分方程扰动导出的量同阶的缓变空间和时间尺度

$$\boxed{X = \varepsilon x} \tag{14.9.65}$$

$$\boxed{T = \varepsilon t,} \tag{14.9.66}$$

这里利用了对快变相位和缓变空间以及时间尺度 X，T 的多尺度变量方法．根据链式法则

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} = k\frac{\partial}{\partial \theta} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X}} \tag{14.9.67}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} = -\omega\frac{\partial}{\partial \theta} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T}\ .} \tag{14.9.68}$$

对于偏微分方程，还需要二阶导数

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(k\frac{\partial}{\partial \theta} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial X}\right)\left(k\frac{\partial}{\partial \theta} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial X}\right) = k^2\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \varepsilon\left(2k\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial}{\partial \theta} + k_X\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial X^2} \tag{14.9.69}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left(-\omega\frac{\partial}{\partial \theta} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T}\right)\left(-\omega\frac{\partial}{\partial \theta} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T}\right) = \omega^2\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \varepsilon\left(-2\omega\frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial}{\partial \theta} - \omega_T\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial T^2}\ . \tag{14.9.70}$$

将(14.9.69)和(14.9.70)这些表达式代入偏微分方程(14.9.62)，得到

$$(\omega^2 - k^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u + \varepsilon\left(-2\omega\frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \omega_T\frac{\partial u}{\partial \theta} - 2k\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial u}{\partial \theta} - k_X\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}\right) = \varepsilon\beta u^3. \tag{14.9.71}$$

709

要使得扰动法有效，就要求缓变波的频率满足初等平面波的色散关系

$$\boxed{\omega^2 = k^2 + 1.} \tag{14.9.72}$$

缓变的波数 k 和频率 ω(及相位 θ)可以由给定的初始条件，利用特征线法求出，后面要给出纲要(已在 14.6 节中见过)．特别地，可以由 k 和 ω 的定义推出波的守恒[(14.9.63)和(14.9.64)]：

$$k_T + \omega_X = 0. \tag{14.9.73}$$

利用色散关系(14.9.72)，由(14.9.73)推出波数 k 的拟线性偏微分方程

$$k_T + \omega_k k_X = 0. \tag{14.9.74}$$

这样，波数以群速度移动时保持不变(这里 $\omega\omega_k = k$)．

由色散关系(14.9.72)，方程(14.9.71)简化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u + \varepsilon\left(-2\omega\frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \omega_T\frac{\partial u}{\partial \theta} - 2k\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial u}{\partial \theta} - k_X\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}\right) = \varepsilon\beta u^3. \tag{14.9.75}$$

利用扰动展开 $u = u_0 + \varepsilon u_1 + \cdots$，从(14.9.75)得到

$$O(\varepsilon^0):\qquad \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} + u_0 = 0 \tag{14.9.76}$$

$$O(\varepsilon):\qquad \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + u_1 = \left(\omega_T + 2\omega\frac{\partial}{\partial T}\right)\frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \left(k_X + 2k\frac{\partial}{\partial X}\right)\frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \beta u_0^3. \tag{14.9.77}$$

首阶方程(14.9.76)的解是缓变(调制)平面波

$$\boxed{u_0 = A(X,T)e^{i\theta} + (*),} \tag{14.9.78}$$

其中(*)表示复共轭. $A(X, T)$一般是复的波振幅，它可通过从下一阶方程中消去久期项确定.

现在考虑$O(\varepsilon)$方程(14.9.77)，其右端包含非线性扰动和缓变假设的作用. 如果存在非

710 线性($\beta \neq 0$)，则这个非线性产生第一和第三谐波，因为$u_0^3 = A^3 e^{3i\theta} + 3A^2A^* e^{i\theta} + (*)$. 把(14.9.78)代入到(14.9.77)的右端，得到

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + u_1 = i\left(\omega_T A + 2\omega \frac{\partial A}{\partial T}\right)e^{i\theta} + i\left(k_X A + 2k \frac{\partial A}{\partial X}\right)e^{i\theta} + \beta(A^3 e^{3i\theta} + 3A^2A^* e^{i\theta}) + (*). \tag{14.9.79}$$

在(14.9.79)右端第一谐波$e^{i\theta}$是久期的(强制频率等于固有频率产生共鸣). 消去久期项给出波振幅$A(X, T)$必须满足的偏微分方程：

$$\boxed{2\omega \frac{\partial A}{\partial T} + 2k \frac{\partial A}{\partial X} + (\omega_T + k_X)A - i\beta 3A^2A^* = 0.} \tag{14.9.80}$$

由此方程可见振幅以群速度移动(因为对色散关系$\omega^2 = k^2 + 1$，群速度是$\omega_k = k/\omega$)，但是在以群速度运动时，振幅不再不变.

用A^*乘以(14.9.80)并加上其复共轭给出一个表示重要而非平凡物理概念的方程：

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial T}(\omega |A|^2) + \frac{\partial}{\partial X}(k |A|^2) = 0,} \tag{14.9.81}$$

其中用到了$|A|^2 = AA^*$. 方程(14.9.81)叫做波作用量守恒，并且是一般性原理. 守恒律可以写为$\partial p/\mathrm{d}t + \partial q/\mathrm{d}x = 0$的形式，其中$p$是守衡量，$q$是其流量. 微分守恒律由积分守恒律得到(如1.2节简短讨论过的). 有时候在无限区间内可以证明$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty} \rho \mathrm{d}x = 0$，因而对所有时刻$\int_{-\infty}^{\infty} \rho \mathrm{d}x$等于其初值(因此对时间是不变的或守恒的). 甚至当线性色散偏微分方程的系数缓变时，方程的波作用量守恒律的一般陈述是

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{E}{\omega}\right) + \frac{\partial}{\partial X}\left(c_g \frac{E}{\omega}\right) = 0.} \tag{14.9.82}$$

波作用量E/ω是守恒的，其中E定义为平均能量密度，c_g是通常的群速度. 可以证明在例子中$E = \omega^2 |A|^2$. 由于在例子中$\omega_k = k/\omega$，波作用流量满足$c_g E/\omega = k|A|^2$. (若$\beta = 0$，从而A是实的，这个结果即由(14.9.80)乘以A推得.)波作用量提供了将线性常微分方程作用量的概念到线性偏微分方程的推广. 而且波作用量已经由Whitham[1999]进一步推广到了非线性色散偏

711 微分方程.

在这个例子中，由于此处的非线性力只是恢复力，非线性只影响了相位. 如果非线性是阻尼力，那么非线性就会影响振幅(参见习题). 为了看清非线性如何影响相位，设

$$A = re^{i\phi}, \tag{14.9.83}$$

其中 $r=|A|$ 已经分析过了. 把(14.9.83)代入(14.9.80)，只保留虚部得出(复振幅 A 的)相位方程

$$2\omega\frac{\partial\phi}{\partial T}+2k\frac{\partial\phi}{\partial X}=3\beta r^2, \tag{14.9.84}$$

这表明相位以群速度移动，但演变与 $r^2=|A|^2$ 有关. 由于 $\partial\phi/\partial T$ 是频率，$\partial\phi/\partial X$ 是空间波数，方程(14.9.84)表明了由于非线性扰动，空间和时间频率对振幅 $r=|A|$ 的依赖. (若 $\beta=0$，而相位 ϕ 初始时是常数，那么相位就是常数.)

典型地，振荡现象的小扰动引起振幅(参见 14.9.1 节)和相位(参见本小节)的小调制.

习题 14.9

在下面所有的习题中，假设 $0<\varepsilon\ll 1$. 在习题 14.9.1 ~ 14.9.7 中，利用多尺度法以获得振幅和相位的方程：

14.9.1 $\dfrac{d^2u}{dt^2}+u=-\varepsilon\dfrac{du}{dt}$(比作精确解的近似)

14.9.2 $\dfrac{d^2u}{dt^2}+\omega^2(\varepsilon t)u=-\varepsilon\dfrac{du}{dt}$

*14.9.3 $\dfrac{d^2u}{dt^2}+\omega^2(\varepsilon t)u=-\varepsilon\left(\dfrac{du}{dt}\right)^3$

14.9.4 $\dfrac{d^2u}{dt^2}+u=\varepsilon\left(u^3-\dfrac{du}{dt}\right)$

*14.9.5 可以证明具有变化长度 L 的线性化摆满足下列方程：

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{g}{L}u=-2\frac{1}{L}\frac{dL}{dt}\frac{du}{dt}.$$

注意上式的右端不是零. 假设 L 是缓变长度 $L=L(\varepsilon t)$. 利用多尺度法得到一个在 $\varepsilon t=O(1)$ 时的合理解(提示：$(1/L)\,dL/dt=(\varepsilon/L)\,dL/dT$，其中 $T=\varepsilon t$).

14.9.6 考虑方程组

$$\frac{d^2x}{dt^2}+9x=\varepsilon y^3$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=4\varepsilon xy^2.$$

712

(a)通过讨论频率，证明为什么缓变时间是 $T=\varepsilon t$.

(b)得到对 $T=O(1)$ 有效的首阶方程(但不求解)，以此说明这个方程组的长时间性态.

14.9.7 利用刘维尔–格林逼近，在振动区域(假设大 x 可以解释为缓变系数)内，近似艾里微分方程 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+xy=0$ 的解.

在习题 14.9.8 ~ 14.9.10 中，利用多尺度变量方法获得缓变振幅和相位的方程.

*14.9.8 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^3u}{\partial x^3}$

14.9.9 $\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+u=\varepsilon\beta\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)^3$

14.9.10 $\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}-c^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\beta u=0$，假设 c 和 β 缓变地依赖 X 和 T 的. 还可以假设色散关系对缓变介质仍然成立.

14.9.11 由于约化波动方程(14.9.49)是线性的，可以简单地设 $u=A(X,Y,Z)e^{i\theta}$，其中 θ 满足短时距方程(14.9.53). 推导 A 的精确方程和首阶方程.

14.10 奇异扰动法：匹配渐近展开的边界层法

很多种重要的物理问题[参见 Kevorkian and Cole(1996)]都是用常微分方程或偏微分方程来描述的，其中不同的逼近在不同的(空间和/或时间)区域上有效. 常常是一个区域比另一个要小得多并且位于边界，从而这种薄区域叫做*边界层*. 在每个区域上都可以确定扰动展开式，但它们必须用叫做*匹配渐近展开法*的步骤联系起来. 这里先从常微分方程的初等例子在简单的背景下来解释匹配渐近展开法. 第二个(也是最后一个)例子是描述污染物对流的偏微分方程，其中扩散只在靠近边界是最重要的.

14.10.1 常微分方程中的边界层

713 作为说明为什么引入匹配渐近展开法的例子，考虑下列二阶常微分方程的边值问题：

$$\boxed{\varepsilon\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+2xu=0,} \tag{14.10.1}$$

满足两个边界条件 $u(0)=3$ 和 $u(1)=2$. 假设 ε 是个正的小参数，$0<\varepsilon\ll1$. 由于是变系数，即便这个初等问题也不可能有解析公式. 对小 ε 数值法也很难应用(当 ε 足够小时是不可能的). 另外，数值法往往并不能增加对下面要导出的边界层性态的了解.

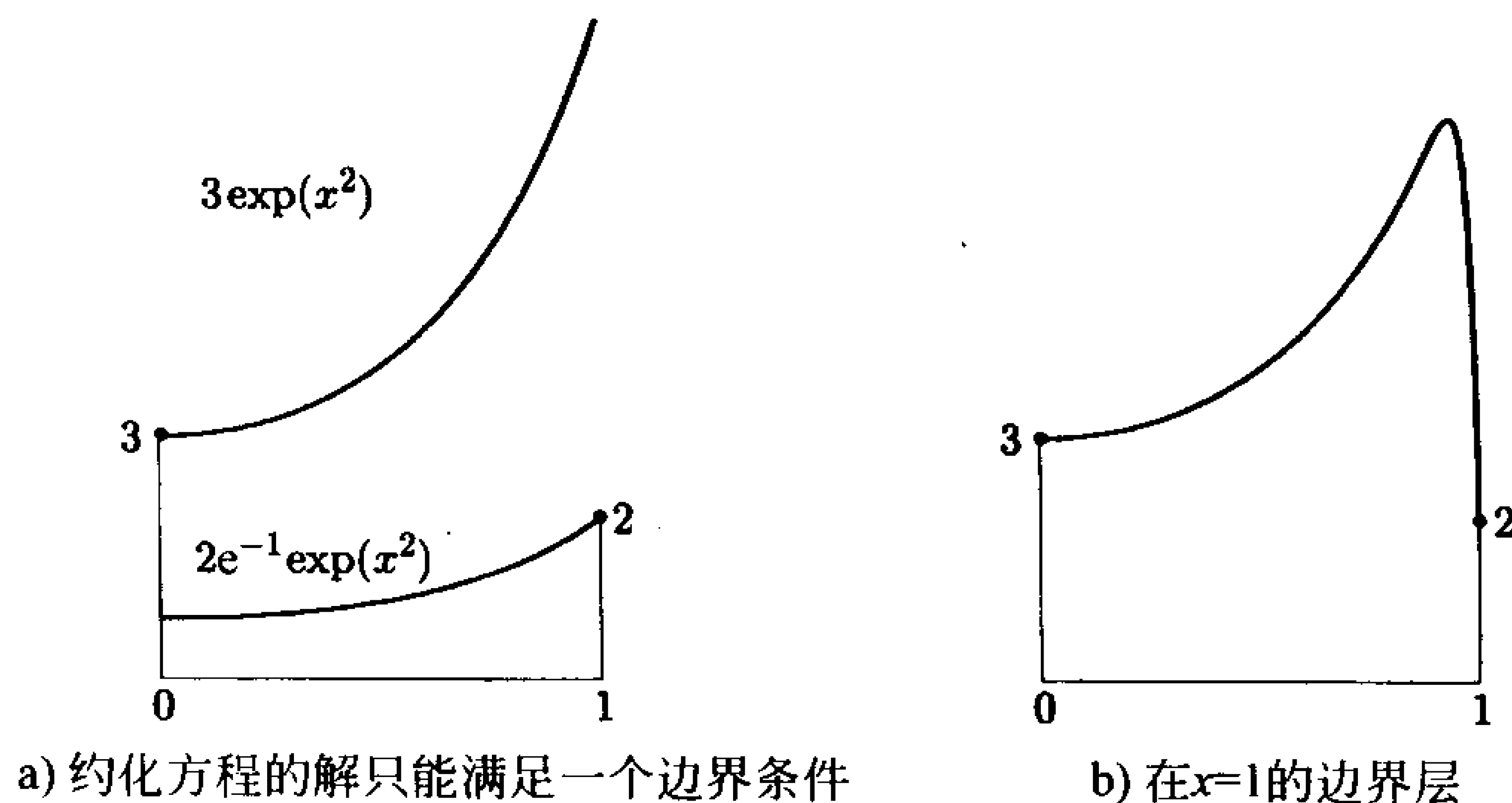
简化问题. 直观上，期望如果 ε 非常小(比如 10^{-8})，那么从实用目的看，简化的一阶微分方程应当是个很好的逼近：

$$\boxed{-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+2xu=0.} \tag{14.10.2}$$

简化方程(14.10.2)(由分离变量或积分因子得到)的通解含有一个任意常数

$$\boxed{u=ce^{x^2}.} \tag{14.10.3}$$

不幸的是，这个解只含一个任意常数，不能满足那两个边界条件(见图 14.10.1). 下面要证明这个解差不多处处都近似有效. 常数 c 可以由边界条件中的一个确定，并且要决定两个边界条件中的哪一个应当用来确定常数 c. 在一个边界附近存在一个薄区域(叫做*边界层*)，在那里(14.10.3)不再是个好的近似.



a) 约化方程的解只能满足一个边界条件　　b) 在x=1的边界层

图 14.10.1

边界层定位和厚度. 若 ε 小时，就遇到了麻烦，因为忽略了 $\varepsilon d^2u/dx^2$ 项把微分方程简化为一阶的. 即使 ε 小，$\varepsilon d^2u/dx^2$ 项在某些地方也不能忽略. 这样，若 d^2u/dx^2 在某些地方大，简化逼近(14.10.2)或(14.10.3)可能不成立. 存在着很多种可能性，其中的一些是：d^2u/dx^2 只在靠近左边界 $x=0$ 时大，只在靠近右边界 $x=1$ 时大，只在靠近某个内点时大，只在靠近两个边界时大，或处处都大. 边界层的主要意思是导数大的区域. 如果解 u 在某个(未知)点 x_0 的小距离 $x-x_0$ 内有一阶量变化，导数就会大. 靠近 x_0 的小距离称为*边界层厚度*，假定是 $O(\varepsilon^p)$，$p>0$，以保证距离小， 714

$$\boxed{x - x_0 = \varepsilon^p X,} \tag{14.10.4}$$

或等价地

$$\boxed{X = \frac{x - x_0}{\varepsilon^p}.} \tag{14.10.5}$$

其中改变了自变量 x 的尺度. 新变量 X 被叫做*边界层变量*. 由链式法则 $du/dx = \varepsilon^{-p} du/dX$，导数会大，这里假定在边界层中 du/dX 是 $O(1)$ 的. 利用边界层变量(14.10.5)，微分方程(14.10.1)变为

$$\varepsilon^{1-2p}\frac{d^2u}{dX^2} - \varepsilon^{-p}\frac{du}{dX} + 2(x_0 + \varepsilon^p X)u = 0. \tag{14.10.6}$$

由于 ε 小，中间项 $O(\varepsilon^{-p})$ 大，比 $2(x_0+\varepsilon^p X)u$ 项大的多. 为了使微分方程给出某个非平凡平衡，在这个例子中，第一项和第二项必须是同阶量：

$$1 - 2p = -p. \tag{14.10.7}$$

因此，在这个例子中给出

$$p = 1, \tag{14.10.8}$$

使得此例中的边界层厚度是 $O(\varepsilon^1)$，$x-x_0=\varepsilon X$. 715

这里还要确定边界层的位置. 在边界层中第一项和第二项都是 $O(\varepsilon^{-1})$，比剩下的项要大. 粗略地说(后面会改进)，首阶边界层方程是

$$\boxed{\frac{d^2u}{dX^2} - \frac{du}{dX} = 0.} \tag{14.10.9}$$

方程(14.10.9)的通解是

$$\boxed{u = A + Be^X = A + Be^{\frac{x-x_0}{\varepsilon}},} \tag{14.10.10}$$

它在边界层里是有效的. 在 x 尺度上，有一项在 x 增大时以非常大的速率 $O(1/\varepsilon)$ 指数增长. 如果 x 比 x_0 大得比 $O(\varepsilon)$ 还要大，则指数项会大得不能接上约化方程的解. 必须防止这种解在边界层中几乎无限的指数增长. 避免这种快速指数增长的一个方法是让 $B=0$. 如果 $B=0$，解在边界层内是常数，但这是不能接受的，因为解在边界层内的导数通常大. 这样就必须在边界层解中包含 $Be^{(x-x_0)/\varepsilon}$. 在现在的问题中，x_0 不能是内点(或左端点 $x_0=0$)，因为若 $x>x_0$，解在边界层中会指数增长的太大. 只有当边界层在右端点 $x_0=1$，不想要的大指数增长才不会出现. 如果 $x_0=1$，那么 x 就不能大于 x_0：

$$x - 1 = \varepsilon X. \tag{14.10.11}$$

此时首阶边界层解(14.10.10)(靠近 $x=1$)是

$$u = A + Be^{\frac{x-1}{\varepsilon}}, \tag{14.10.12}$$

并且解在离开边界层时指数衰减(不增长). 如果 $x-1$ 是负的, $e^{(x-1)/\varepsilon}$ 是超越地小. 解(在小区域内)变化快, 而这正是对边界层所需要的. 现在这个问题的边界层在右端, 这样即可继续讨论数学上的解.

外展开式. 下面要确定偏微分方程的解离开边界层的渐近展开式. 引入扰动展开式(假设为下面的基本形式)

$$u(x,\varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \cdots. \tag{14.10.13}$$

716 称它为外展开式, 因为它离开边界层是成立的. 由于 ε 非常小, 只需要展开式中的几项(有时只要首项 $u_0(x)$). 把扰动展开式(14.10.13)带入微分方程(14.10.1)给出

$$O(\varepsilon^0): \quad \frac{du_0}{dx} - 2xu_0 = 0 \tag{14.10.14}$$

$$O(\varepsilon^1): \quad \frac{du_1}{dx} - 2xu_1 = \frac{d^2u_0}{dx^2}. \tag{14.10.15}$$

这里只限于分析首阶内方程(14.10.14), 它的解是(与前面相同)

$$u_0(x) = ce^{x^2}. \tag{14.10.16}$$

由于现在知道在 $x=1$ 存在边界层, 所以外部解必须满足在 $x=0$ 的边界条件:

$$u_0(0) = c = 3. \tag{14.10.17}$$

首阶外部解

$$u_0(x) = 3e^{x^2} \tag{14.10.18}$$

满足在 $x=0$ 的边界条件, 但不满足在 $x=1$ 的边界条件.

内(边界层)展开式. 在靠近 $x=1$ 的边界层, 引入内部变量 $x=1+\varepsilon X$(14.10.11). 用 ε 乘以(14.10.6)推出精确的内(边界层)方程

$$\frac{d^2u}{dX^2} - \frac{du}{dX} + 2\varepsilon(1+\varepsilon X)u = 0. \tag{14.10.19}$$

可以引入解在边界层成立的扰动展开式, 称之为*内展开式*或*边界层展开式*:

$$u = U_0(X) + \varepsilon U_1(X) + \cdots. \tag{14.10.20}$$

把(14.10.20)代入(14.10.19), 得到

$$\frac{d^2U_0}{dX^2} - \frac{dU_0}{dX} = 0 \tag{14.10.21}$$

$$\frac{d^2U_1}{dX^2} - \frac{dU_1}{dX} = -2U_0. \tag{14.10.22}$$

如前面所求出的, 当用通常的内变量 x 表示时, 首阶方程(14.10.21)的解是

$$U_0(X) = A + Be^X = A + Be^{\frac{x-1}{\varepsilon}}, \tag{14.10.23}$$

边界层方程应该满足在 $x=1$ 的边界条件. $u(x=1)=2$ 变为 $U_0(X=0)=2$. 由此推断出

717

$$2 = A + B. \tag{14.10.24}$$

在本例中, 边界层方程是含有两个任意常数的二阶方程. 这里, 一个条件是边界条件, 而第二个条件就是外部解必须与内部(边界层)解匹配.

匹配. 已经得到了离开边界层的外展开式

$$u = 3e^{x^2} + \varepsilon u_1(x) + \cdots \tag{14.10.25}$$

和在边界层成立的内展开式

$$u = A + Be^{X} + \varepsilon U_1(X) + \cdots, \tag{14.10.26}$$

其中由边界条件 $2 = A + B$. 这两个渐近展开式必定是微分方程同一个解的展开式. 假设存在一个两个展开式同时成立的重叠区域. 于是，这里用一种叫做匹配渐近展开法的方式将两个展开式等起来. 这个重叠区域(从外部解看)靠近边界层和(从边界层尺度看)远离边界层. 在简单的例子中(比如本例)，匹配原则是

$$\boxed{\text{外部解的内极限 = 内部解的外极限.}} \tag{14.10.27}$$

按外部解看，内极限是 $x \to 1$ 时的极限. 在这个例子中，外极限即 $X \to -\infty$ 时的极限. 因此

$$\lim_{x\to 1} u_0(x) + \varepsilon u_1(x) = \lim_{X\to -\infty} U_0(X) + \varepsilon U_1(X). \tag{14.10.28}$$

只利用首阶项，有

$$\lim_{x\to 1} 3e^{x^2} = \lim_{X\to -\infty} A + Be^{X}. \tag{14.10.29}$$

这样 $3e = A$. 由 $A + B = 2$，就有 $B = 2 - 3e$. 因此，可以总结为

$$\text{首阶外部解(离开 } x = 1\text{)}: u = 3e^{x^2},$$

$$\text{首阶内部解(靠近 } x = 1\text{)}: u = 3e + (2 - 3e)e^{X},$$

图 14.10.1 中给出了图像.

这些内极限和外极限常常不存在，而必须代之为相应的渐近展开式：

$$\boxed{\text{外部解的内渐近展开式 = 内部解的外渐近展开式.}} \tag{14.10.30}$$

这是必须相同的两种十分不一样的计算. 在 $x - 1 = \varepsilon X$ 的情形，两个展开式如下： 718

1. 固定 x 且令 $\varepsilon \to 0$. (这意味着 $X \to -\infty$，内部解的外展开式.)
2. 固定 X 且令 $\varepsilon \to 0$. (这意味着 $x \to 1$，外部解的内展开式.)

这些是比较实用的方法，考虑到常常只有前几项值得花力气计算. 记住 ε 非常小，而且高阶项通常忽略不计.

在其他问题中，内展开式和外展开式的形式可能必须做调整. 可以考虑高阶项及其匹配，但这是一个此处没有时间讨论的重要(常常必要的)处理方法. 内部解和外部解的渐近展开式常常是能够得到的，但要比这里初等例子做得更多. 而非线性问题可能更困难和更有趣些.

14.10.2 由对流支配的污染物扩散

下面要用边界层法(匹配渐近展开法)分析偏微分方程奇异扰动问题的一个初等例子. 考虑化学浓度 $u(x, y, t)$ 未知的污染物. 如果没有对流(流体的运动)，浓度满足扩散方程 $\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$. 如果流体以已知速度 $\vec{v}$ 流动(在流体动力学中通常有 $\nabla \vec{v} = 0$)，那么扩散方程中的时间导数就应该用对流导数(随流体移动的时间导数) $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla u$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla u = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \tag{14.10.31}$$

考虑一个理想化的情形，污染是由一连串的（工业区）烟囱引起的，假设每个烟囱产生已知不随时间变化（但也许不同）水平的污染．这里知道在某个区域边界上的污染水平，目的是确定在这个大区域中的稳态污染水平：

$$\vec{v} \cdot \nabla u = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \tag{14.10.32}$$

先假设对流大气速度是常数而方向比较一般$\vec{v} = a\hat{i} + b\hat{j}$．此时稳态的扩散方程变为

$$a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{14.10.33}$$

其中（为了方便使用奇异扰动法）引入了作为小（在某种意义下）扩散系数的ε．这不是一个容易

719

的数学问题，特别是对非矩形区域．

外展开．如果ε是很小的参数，（作为好的近似）下面的简化一阶偏微分方程应当是重要的：

$$a\frac{\partial u_0}{\partial x} + b\frac{\partial u_0}{\partial y} = 0. \tag{14.10.34}$$

为验证其合理性，在方程（14.10.33）中代入正规扰动展开式：

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \cdots, \tag{14.10.35}$$

其首阶项满足（14.10.34）．方程（14.10.34）可以用特征线法求解．如果 $dy/dx = b/a$，则 $du_0/dx = 0$或 $u_0 =$ 常数．约化方程（14.10.34）的特征线是 $ay - bx =$ 常数．从而有

$$u_0 = f(ay - bx), \tag{14.10.36}$$

其中任意函数f应该由一个边界条件确定．然而，扩散方程有两个边界条件（这可用特征线划分二维闭区域的边界来确定，看了下面的具体例子，这点就更清楚了）．下面证明方程（14.10.36）离开边界层（导数大区域）是成立的．另外还要证明边界层只占边界的特定部分．（14.10.35）叫做*外展开式*，而（14.10.36）为*首阶外部解*，因为它离开边界层是有效的．

简单例子．在本小节的其余部分假设流体速度在正y方向$\vec{v} = (0, 1)$，使得稳态扩散的偏微分方程（14.10.33）变为

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).} \tag{14.10.37}$$

首阶外方程$\partial u_0/\partial y = 0$ 的解

$$u_0 = f(x) \tag{14.10.38}$$

是一个x的任意函数．假设（约化方程的）特征线$x =$常数将区域的边界条件分成两片，分别叫做顶部$y = y_T(x)$和底部$y = y_B(x)$（参见图 14.10.2）．扩散的偏微分方程的边界条件是在整个边界上给定污染水平．这里引入两个函数，顶部污染水平函数

$$u = u_T(x) \quad 在\ y = y_T(x)\ 上 \tag{14.10.39}$$

和底部污染水平函数

720

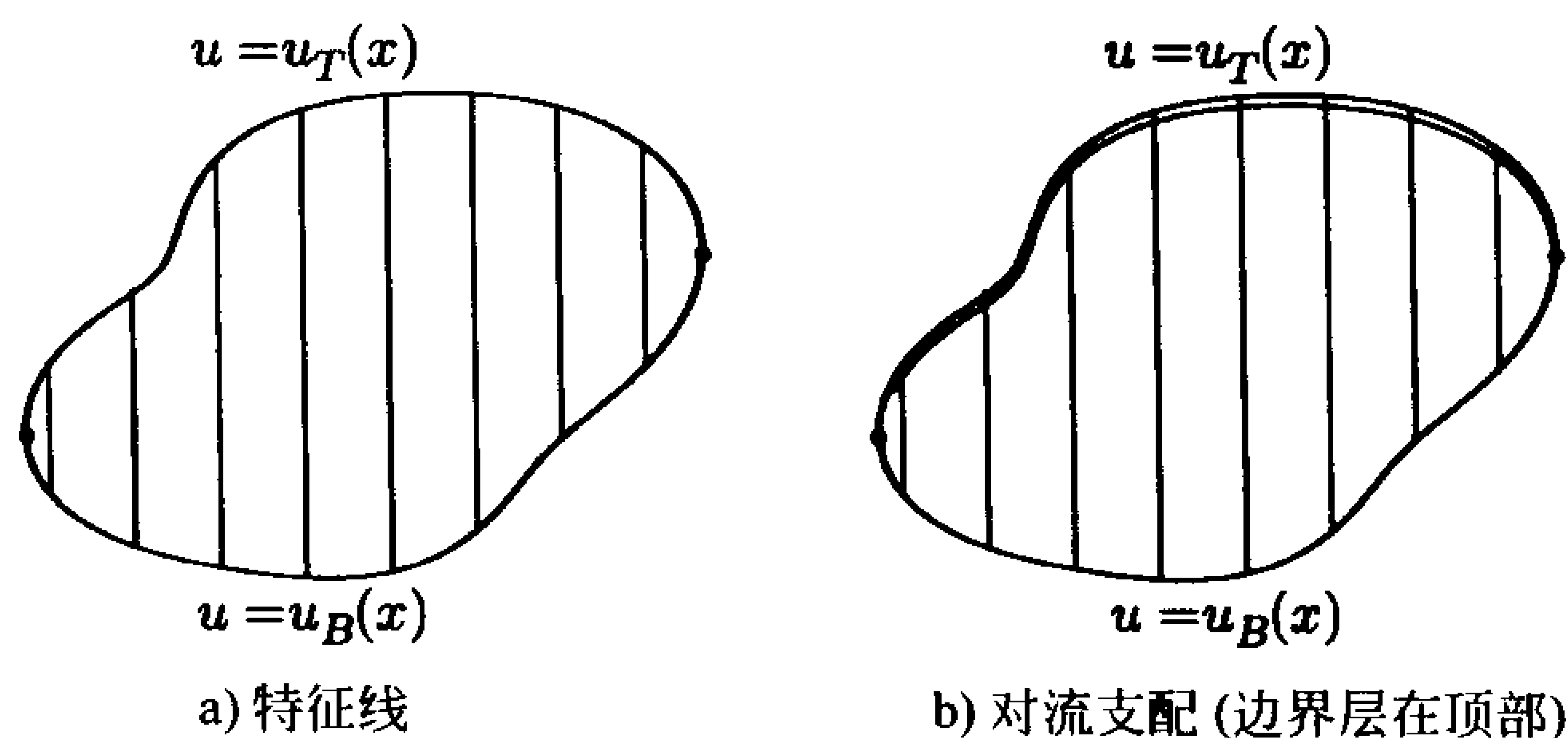
$$u = u_B(x) \quad 在\ y = y_B(x)\ 上. \tag{14.10.40}$$

一个任意函数能够满足这两个边界条件中的一个而不是两个．根据物理上的直觉，会想到，

既然大气在正垂直方向上流动，风会将污染物向上送．这样简化问题的解满足底部的边界条件：

$$u_0 = f(x) = u_B(x). \qquad (14.10.41)$$

由于不满足顶部的边界条件，就自然预计到靠近顶部有其中导数大而不能忽略的薄区域．在下一小节，将从数学上证明边界层位于顶部并确定其厚度．



a) 特征线　　b) 对流支配 (边界层在顶部)

图　14.10.2

边界层(内)展开．下面要建立一个确定边界层位置(和确定其厚度)的方法步骤．首先分析边界层位于顶部的可能性．不过，数学上的分析足以证明现在例子中的边界层不可能在底部．引入空间变量的尺度组$(\xi,\ \eta)$，其中未知厚度是$O(\varepsilon^p)$，$p>0$，

$$\boxed{\begin{aligned}\xi &= x\\ \eta &= \frac{y - y_T(x)}{\varepsilon^p}\end{aligned}}\ . \qquad (14.10.42)$$

由于边界条件不一定是直的，x 和 y 的导数都大，

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{y'_T(x)}{\varepsilon^p}\frac{\partial u}{\partial \eta}\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{\varepsilon^p}\frac{\partial u}{\partial \eta}\end{aligned}}\ .$$

721

还需要二阶导数：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{y'_T(x)}{\varepsilon^p}\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{y'_T(x)}{\varepsilon^p}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \frac{[y'_T(x)]^2}{\varepsilon^{2p}}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \cdots \qquad (14.10.43)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\varepsilon^{2p}}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\ . \qquad (14.10.44)$$

如果(在边界层内)只需要首阶项，就能够避免二阶导数更复杂的表达式．把这些表达式(14.10.43)和(14.10.44)代入例子(14.10.37)，就得到边界层内的首阶项方程 $u = U_0(\xi,\ \eta) + \cdots$：

$$\frac{1}{\varepsilon^p}\frac{\partial U_0}{\partial \eta} = \varepsilon^{1-2p}k_T(\xi)\frac{\partial^2 U_0}{\partial \eta^2}, \qquad (14.10.45)$$

其中重要的系数是正的：

$$k_T(\xi) = 1 + [y'_T(x)]^2. \quad (14.10.46)$$

通过平衡方程(14.10.45)中最大项的阶数，得到

$$p = 1, \quad (14.10.47)$$

这样边界层厚度就是 $O(\varepsilon^1)$. 由于导数在一个方向上最大，首阶的偏微分方程就简化为常微分方程：

$$\boxed{\frac{\partial U_0}{\partial \eta} = k_T(\xi)\frac{\partial^2 U_0}{\partial \eta^2}.} \quad (14.10.48)$$

方程(14.10.48)的通解是

$$U_0(\xi,\eta) = A(\xi) + B(\xi)\mathrm{e}^{\frac{\eta}{k_T(\xi)}}, \quad (14.10.49)$$

其中由于$\partial/\partial\eta$ 要求 ξ 固定，$A(\xi)$和 $B(\xi)$是 ξ 的任意函数.

现在就有可能判定边界层是在顶部(或底部). 由匹配渐近展开法可知边界层解必须与内部(外)解相匹配. 由于

$$\eta = \frac{y - y_T(x)}{\varepsilon}, \quad (14.10.50)$$

内部通过极限过程趋近：

722

如果边界层在顶部,$\eta \to -\infty$

如果边界层在底部,$\eta \to +\infty$

边界层内不允许快指数增长(14.10.49)，否则解会变得超越地大. 而指数衰减是典型的. 因为 $k_T(\xi) > 0$ 和相应的 $k_B(\xi) > 0$，在此例中，必须防止离开边界层时 $\eta \to +\infty$. 而只有边界层位于顶部，这才能被阻止. 而这与基于物理直觉所得到的结论一致，也就是污染按给定的向上大气速度被对流到区域的内部.

因此就得到了在顶部边界层内的首阶解：

$$U_0(\xi,\eta) = A(\xi) + B(\xi)\mathrm{e}^{\frac{\eta}{k_T(\xi)}}. \quad (14.10.51)$$

如果边界层在顶部，则边界层内的解应当满足顶部边界条件，即在 $y = y_T(x)$处 $u = u_T(x)$. 由于 $y = y_T(x)$对应 $\eta = 0$，那么满足的顶部边界条件就是

$$A(\xi) + B(\xi) = u_T(\xi). \quad (14.10.52)$$

顶部的边界条件指定了两个任意函数 $A(\xi)$和 $B(\xi)$的一个条件. 第二个条件(用于确定边界层解)是内部解和外部解必须相匹配.

内展开和外展开的匹配. 总之，首阶(外)解在离开靠近顶部边界的薄边界层时有效：

$$u_0 = u_B(x). \quad (14.10.53)$$

在靠近顶部的边界层内的首阶(内)解是

$$U_0 = A(x) + B(x)\mathrm{e}^{\frac{\eta}{k_T(x)}}, \quad (14.10.54)$$

其中边界层变量是 $\eta = (y - y_T(x))/\varepsilon$ 和 $A(x) + B(x) = u_T(x)$以便满足顶部的边界条件.

这两个渐近展开表示了对原本偏微分方程解在不同区域内的良好近似. 既然有两个展开式都成立的重叠区域，匹配原理表述为

$$\boxed{\text{外部解的内极限} = \text{内部解的外极限}.}$$

在这个例子中，内极限是 $y \to y_T(x)$，而外极限是 $\eta \to -\infty$. 所以，匹配首阶内解和外解得出

$$\lim_{y \to y_T(x)} u_B(x) = \lim_{\eta \to -\infty} A(x) + B(x) e^{\frac{\eta}{k_T(x)}}, \tag{14.10.55}$$

或者等价地

$$u_B(x) = A(x). \tag{14.10.56}$$

723

由 $A(x) + B(x) = u_T(x)$，就有 $B(x) = u_T(x) - u_B(x)$. 在边界层内的首阶解是

$$U_0 = u_B(x) + [u_T(x) - u_B(x)] e^{\frac{y - y_T(x)}{\varepsilon k_T(x)}}. \tag{14.10.57}$$

污染物的浓度，如首阶外部解(14.10.53)所述，从底部对流进内部. 首阶内解(14.10.57)表明在顶部存在扩散控制的薄边界层(如图 14.10.2 所示)，其中污染水平突然从(底部对流而来的)内部水平变到在顶部边界指定的水平.

习题 14.10

在习题 14.10.1 ~ 14.10.7 中，求出内展开式和外展开式中的一项并将其匹配：

14.10.1　$\varepsilon \dfrac{d^2 u}{dx^2} - 2\dfrac{du}{dx} + 3u = 0$ 其中 $u(0) = 1$ 及 $u(1) = 2$.

14.10.2　$\varepsilon \dfrac{d^2 u}{dx^2} + 2\dfrac{du}{dx} - 3u = 0$ 其中 $u(0) = 1$ 及 $u(1) = 2$.

*14.10.3　$\varepsilon \dfrac{d^2 u}{dx^2} - 4u = x$ 其中 $u(0) = 1$ 及 $u(1) = 2$.

14.10.4　$\varepsilon \dfrac{d^2 u}{dx^2} + \varepsilon\dfrac{du}{dx} - 9u = 0$ 其中 $u(0) = 1$ 及 $u(1) = 2$.

14.10.5　$\varepsilon \dfrac{d^2 u}{dx^2} + 2e^{-x} u = 8$ 其中 $u(0) = 1$ 及 $u(1) = 2$.

*14.10.6　$\varepsilon \dfrac{d^2 u}{dx^2} + (2x+1)\dfrac{du}{dx} + 2u = 0$ 其中 $u(0) = 1$ 及 $u(1) = 2$.

14.10.7　$\varepsilon \dfrac{d^2 u}{dx^2} + 2e^{-x} u = 8$ 其中 $u(0) = 1$ 及 $u(1) = 2$.

14.10.8　求出习题 14.10.1 的精确解(并用软件画出图像).

14.10.9　有时在边界层内也存在边界层. 对 $0 < x < 1$ 和 $0 < \varepsilon \ll 1$，考虑方程：

$$\varepsilon^4 \frac{d^2 y}{dx^2} + x^2 \frac{dy}{dx} - \varepsilon y = 0 \quad 满足\ y(0) = 1\ 和\ y(1) = 2.$$

可以假设(不用验证)在 $x = 1$ 没有边界层. 请求解这个问题，包括外展开中的两项. 证明靠近 $x = 0$ 两个不同的尺度有效：一个薄的和一个厚的. 并且只确定这两个展开中的各一项. 将外部解与较厚的内部解匹配，以及匹配较厚的内部解与较薄的内部解.

14.10.10　考虑 $\varepsilon\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 4\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}$，其中 u 在正方形 $0 < x < 1$，$0 < y < 1$ 的边界上给定. 利用物理推理，请问边界层在哪里?

724

14.10.11　$\varepsilon\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = u - f(x, y)$，其在单位正方形上的边界条件是：$u(x, 0) = g(x)$，$u(x, 1) = h(x)$，$u(0, y) = r(y)$ 及 $u(1, y) = s(y)$. 试确定首阶外部解；为节省时间，只在一个边界层上确定首阶内部解(因为其余的相当类似). 并对它们进行匹配.

725

参考文献

[1] Ablowitz, M. J. and Clarkson, P. A. *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

[2] Ablowitz, M. J. and Segur, H. *Solitons and the Inverse Scattering Transform*. Philadelphia: SIAM, 1981.

[3] Abramowitz, M. and Stegun, I. A., eds. *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover, 1974.

[4] Acheson, D. J. *Elementary Fluid Dynamics*, Oxford: Oxford University Press, 1990.

[5] Aki, K. and Richards, P. G. *Quantitative Seismology*. San Francisco: Freeman, 1980.

[6] Ames, W. F. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 3rd ed. New York: Academic Press, 1992.

[7] Antman, S. S. The equations for large vibrations of strings. *Amer. Math. Monthly* **87**, 1980, pp. 359–370.

[8] Bender, C. M. and Orszag, S. A. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. New York: Springer-Verlag, 1999.

[9] Benney, D. J. Long waves on liquid films, *J. Math. Phys. (Stud. Appl. Math.)* **45**, 1966, pp. 150–155.

[10] Benney, D. J. and Newell, A. C. The propagation of nonlinear wave envelopes, *J. Math. Phys. (Stud. Appl. Math.)* **46**, 1967, pp. 133–139.

[11] Berg, P. W., and McGregor, J. L. *Elementary Partial Differential Equations*. San Francisco: Holden-Day, 1966.

[12] Bleistein, N. *Mathematical Methods for Wave Phenomena*. Orlando: Academic Press, 1984.

[13] Bleistein, N. and Handelsman, R. A. *Asymptotic Expansions of Integrals*. New York: Dover, 1986.

[14] Boyce, W. E. and Di Prima, R. C. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 7th ed. New York: Wiley, 2000.

[15] Campbell, S. L. and Haberman, R. *Introduction to Differential Equations with Boundary Value Problems*. Boston: Houghton-Mifflin, 1996.

[16] Carrier, G. and Pearson, C. *Partial Differential Equations*, 2nd ed. New York: Academic Press, 1988.

[17] Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C. *Conduction of Heat in Solids*, 2nd ed. New York: Oxford University Press, 1959.

[18] Churchill, R. V. *Operational Mathematics*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1972.

[19] Churchill, R. V., and Brown, J. W. *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 6th ed. New York: McGraw-Hill, 2000.

[20] Courant, R. and Hilbert, D. *Methods of Mathematical Physics*, Vols. 1 and 2. New York: Wiley, 1953.

[21] *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae*, 31th ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 2002.

[22] Dennemeyer, R. *Introduction to Partial Differential Equations and Boundary Value Problems*. New York: McGraw-Hill, 1968.

[23] Drazin, P. G. and Reid, W. H. *Hydrodynamic Stability*. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

[24] Duff, G. F. D. and Naylor, D. *Differential Equations of Applied Mathematics*. New York: Wiley, 1966.

[25] Garabedian, P. *Partial Differential Equations*, 2nd ed. New York: Chelsea, 1998.

[26] Gardner, C. S., Greene, J. M., Kruskal, M. D., and Miura, R. M. Method for solving the Korteweg-de Vries equation, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1967, pp. 1095–1097.

[27] Gel'fand, I. M. and Levitan, B. M. On the determination of a differential equation from its spectral function, *Amer. Math. Soc. Transl.* **1**, Ser. 2, 1955, pp. 253–304.

[28] Glendenning, P. *Stability, Instability, and Chaos*, Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

[29] Greenberg, M. D. *Foundations of Applied Mathematics*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1978.

[30] Guckenheimer, J. and Holmes, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields*. New York: Springer-Verlag, 1983.

[31] Haberman, R. *Mathematical Models: Mechanical Vibrations, Population Dynamics, and Traffic Flow*. Philadelphia: Society of Industrial and Applied Mathematics, 1998.

[32] Hildebrand, F. B. *Advanced Calculus for Applications*, 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1976.

[33] Isaacson, E. and Keller, H. B. *Analysis of Numerical Methods.* New York: Dover, 1994.

[34] Jackson, J. D. *Classical Electrodynamics*, 3rd ed., New York: Wiley, 1998.

[35] Kaplan, W. *Advanced Mathematics for Engineers.* Reading, MA: Addison-Wesley, 1981.

[36] Keener, J. P. *Principles of Applied Mathematics*, Reading, MA: Addison-Wesley, 1988.

[37] Kevorkian, J. *Partial Differential Equations*, 2nd ed. New York: Springer, 2000.

[38] Kevorkian, J. and Cole, J. D. *Multiple Scale and Singular Perturbation Methods.* New York: Springer-Verlag, 1996.

[39] Kinsman, B. *Wind Waves.* New York: Dover, 1984.

[40] Lax, P. D. Integrals on nonlinear equations and solitary waves, *Comm. Pure Appl. Math.* **21**, 1968, pp. 467–490.

[41] Lighthill, J. *Waves in Fluids.* Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

[42] Mathews, J., and Walker, R. L. *Mathematical Methods of Physics.* New York: W. A. Benjamin, 1970.

[43] Mikhlin, S. G., ed. *Linear Equations of Mathematical Physics.* New York: Holt, Rinehart and Winston, 1967.

[44] Morse, P. M. and Feshbach, H. *Methods of Theoretical Physics,* Parts 1 and 2. New York: McGraw-Hill, 1953.

[45] Morton, K. W. and Mayers, D. F. *Numerical Solution of Partial Differential Equations.* Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

[46] Murray, J. D. *Mathematical Biology*, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1993.

[47] Nayfeh, A. H. *Perturbation Methods.* New York: Wiley, 2002.

[48] Newell, A. C. *Solitons in Mathematics and Physics.* Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1985.

[49] Newell, A. C. and Moloney, J. V. *Nonlinear Optics.* Redwood City, CA: Addison Wesley, 1992.

[50] Nicolis, G.*Introduction to Nonlinear Science.* Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[51] Powers, D. L. *Boundary Value Problems*, 3rd ed. San Diego: Harcourt Brace Jovanovich, 1987.

[52] Prigogine, I. and Lefever, R. Symmetry-breaking instabilities in dissipative systems, *J. Chem. Phys.* **48**, 1968, pp. 1695–1700.

[53] Protter, M. H. and Weinberger, H. F. *Maximum Principles in Differential Equations*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1967.

[54] Roberts, G. E. and Kaufman, H. *Tables of Laplace Transforms*. New York: W. B. Saunders Co., 1966.

[55] Sagan, H. *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics*. New York: Dover, 1989.

[56] Scott, A. *Nonlinear Science: Emergence and Dynamics of Coherent Structures*. Oxford: Oxford University Press, 1999.

[57] Smith, G. D. *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, 3rd ed. New York: Oxford University Press, 1986.

[58] Stakgold, I. *Green's Functions and Boundary Value Problems*. 2nd ed. New York: Wiley, 1997.

[59] Strauss, W. A. *Partial Differential Equations*. New York: Wiley, 1992.

[60] Strang, G. *Introduction to Applied Mathematics*. Wellesley, MA: Wellesley-Cambridge Press, 1986.

[61] Strang, G. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley, MA: Wellesley-Cambridge Press, 1993.

[62] Street, R. L. *The Analysis and Solution of Partial Differential Equations*. Monterey, CA: Brooks/Cole, 1973.

[63] Strogatz, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Reading, MA: Addison-Wesley, 1994.

[64] Turing, A. The chemical basis for morphogenesis, *Phil. Trans. Roy. Soc. London* **B237**, 1952, pp. 37–72.

[65] Verhulst, F. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1997.

[66] Watson, G. N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[67] Weinberger, H. F. *A First Course in Partial Differential Equations*. New York: Dover, 1995.

[68] Whitham, G. B. *Linear and Nonlinear Waves*. New York: Wiley, reprint 1999.

[69] Winfree, A. T. *When Time Breaks Down: The Three-Dimensional Dynamics of Electrochemical Waves and Cardiac Tissue*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1987.

[70] Young, E. C. *Partial Differential Equations*. Boston: Allyn and Bacon, 1972.

[71] Yuen, H. C. and Ferguson, W. E. Relationship between Benjamin-Feir instability and recurrence in the nonlinear Schrodinger equation, *Phys. Fluids* **21**, 1978, pp. 1275–1278.

[72] Yuen, H. C. and Lake, B. M. Instabilities of waves on deep water, *Phys. Fluids* **18**, 1975, pp. 956–960.

[73] Zabusky, N. J. and Kruskal, M. D. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Phys. Rev. Lett.* **15**, 1965, pp. 240–243.

[74] Zachmanoglou, E. C. and Thoe, D. W. *Introduction to Partial Differential Equations with Applications*. New York: Dover, 1989.

[75] Zauderer, E. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*, 2nd ed. New York: Wiley, 1989.

[76] Zwillinger, D., *Handbook of Differential Equations*, 3rd ed. San Diego: Academic Press, 1998.

带 * 号习题的答案

1.2.8 $\int_0^L c\rho u A\,dx$

1.2.9 (e) $u(t)=u_0\exp\left[-\left(\frac{2h}{c\rho r}\right)t\right]$

1.3.2 $K_0(x_{0-})\frac{\partial u}{\partial x}(x_{0-},t)=K_0(x_{0+})\frac{\partial u}{\partial x}(x_{0+},t)$

1.3.3 $Vc_f\rho_f\frac{\partial u}{\partial t}(L,t)=-K_0(L)\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)A$，其中 V 是槽的体积

1.4.1 (a) $u(x)=\frac{Tx}{L}$

(d) $u=T+\alpha x$

(f) $u(x)=-\frac{x^4}{12}+\frac{L^3x}{3}+T$

(h) $u=T+\alpha(x+1)$

1.4.2 (a) $\frac{K_0L^2}{2}$

1.4.7 (a) $\beta=1-L$

1.5.2 $\frac{\partial u}{\partial t}+v\cdot\nabla u=k\nabla^2u-u\nabla\cdot v$（物理上常常有 $\nabla\cdot v=0$）

1.5.9 (a) $u=\frac{T_1\ln r_2/r+T_2\ln r/r_1}{\ln r_2/r_1}$

1.5.11 $\beta=\frac{b}{a}$

1.5.13 $u(r)=\frac{320}{3}\left(1-\frac{1}{r}\right)$

2.3.1 (a) $\frac{dh}{dt}=-\lambda kh$ 和 $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi}{dr}\right)=-\lambda\phi$

2.3.1 (c) $\frac{d^2\phi}{dx^2}=-\lambda\phi$ 和 $\frac{d^2h}{dy^2}=\lambda h$

2.3.1 (e) $\frac{1}{kh}\frac{dh}{dt}=\frac{1}{\phi}\frac{d^4\phi}{dx^4}=\lambda$

2.3.1 (f) $\frac{1}{c^2h}\frac{d^2h}{dt^2}=\frac{1}{\phi}\frac{d^2\phi}{dx^2}=-\lambda$

2.3.2 (b) $\lambda=(n\pi/L)^2$，其中 $L=1$，使得 $\lambda=n^2\pi^2$，$n=1, 2, \cdots$

2.3.2 (d) $\lambda=\left[\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{L}\right]^2$，$n=1, 2, 3, \cdots$

2.3.2 (f) $\lambda=\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$，$n=1, 2, 3, \cdots$

2.3.3 (c) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-k(n\pi/L)^2t}$，其中 $A_n=\frac{2}{L}\int_0^L 2\cos\frac{3\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx$

2.3.4 (a) $c\rho A\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\left(\frac{1-\cos n\pi}{\frac{n\pi}{L}}\right)$

2.3.4 (c)热能等于初始热能加上由边界的流入热能的时间积分

2.3.6 $0(n\neq m)$, $\frac{L}{2}(n=m\neq 0)$, $L(n=m=0)$

2.3.8 (a) $u=0$

2.3.8 (b) $u=e^{-\alpha t}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-k(n\pi/L)^2 t}$

2.3.9 (a)若 $\sqrt{\frac{-\alpha}{k}}L=n\pi$, 则 $u(x)=A\sin\frac{n\pi x}{L}$.

2.3.9 (b)若 $-\frac{\alpha}{k}=\left(\frac{\pi}{L}\right)^2$, 则当 $t\to\infty$ 时, $u(x,t)\to B\sin\frac{\pi x}{L}$. 若 $-\frac{\alpha}{k}<\left(\frac{\pi}{L}\right)^2$, 则当 $t\to\infty$ 时, $u\to 0$. 然而, 若 $-\frac{\alpha}{k}>\left(\frac{\pi}{L}\right)^2$, 则当 $t\to\infty$ 时, $u\to\infty$.

2.3.10 (c) $\left[\int_0^L A(x)B(x)\,dx\right]^2\leqslant\left(\int_0^L A^2\,dx\right)\left(\int_0^L B^2\,dx\right)$

2.4.1 $u=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi}{L}e^{-k(n\pi x/L)^2 t}$

(a) $A_0=\frac{1}{2}$, $A_n=-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\quad(n\neq 0)$

(b) $A_0=6$, $A_3=4$, others $=0$

(c) $A_0=-\frac{4}{\pi}$, $A_n=-\frac{4}{L}\int_0^L\sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx$ 可以用三角恒等式或者积分表计算

2.4.2 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{L}e^{-[(n-1/2)\pi/L]^2 kt}$, 其中 $c_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{L}dx$

2.4.3 $\lambda=n^2$, $\phi=\sin nx$ 和 $\cos nx$, $n=0,1,2,3,\cdots$

2.5.1 (a) $u(x,y)=A_0 y+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi x}{L}\sinh\frac{n\pi y}{L}$

2.5.1 (c) $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cosh\frac{n\pi x}{H}\sin\frac{n\pi y}{H}$, 其中 $A_n\cosh\frac{n\pi L}{H}=\frac{2}{H}\int_0^H g(y)\sin\frac{n\pi y}{H}dy$

2.5.1 (e) $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n h_n(y)\sin\frac{n\pi x}{L}$, $A_n h_n(H)=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$, 其中 $h_n(y)=\cosh\frac{n\pi y}{L}+\frac{L}{n\pi}\sinh\frac{n\pi y}{L}$

2.5.2 (a) $\int_0^L f(x)\,dx=0$

2.5.3 $u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^{-n}\cos n\theta+\sum_{n=1}^{\infty}B_n r^{-n}\sin n\theta$

(a) $A_0=\ln 2$, $A_3 a^{-3}=4$, 其余的 $A_n=0$, $B_n=0$

(b)参看(2.5.47), 用 a^{-n} 替换 a^n

2.5.4 $u(r,\theta)=\frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\bar{\theta})\,d\bar{\theta}}{a^2+r^2-2ar\cos(\theta-\bar{\theta})}$

2.5.5 (a) $u(r,\ \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{2n-1} \cos(2n-1)\theta$

2.5.5 (c) $u(r,\ \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{2n} \sin 2n\theta$，$A_n = \dfrac{2}{\pi n} \int_0^{\pi/2} f(\theta) \sin 2n\theta \mathrm{d}\theta$

2.5.6 (a) $u(r,\ \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^n \sin n\theta$

2.5.7 (b) $u(r,\ \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{3n} \cos 3n\theta$

2.5.8 (a) $\phi_1(r) = \begin{cases} \ln(r/a) & n=0 \\ \left(\dfrac{r}{a}\right)^n - \left(\dfrac{a}{r}\right)^n & n \neq 0 \end{cases}$ $\quad \phi_2(r) = \begin{cases} \ln(r/b) & n=0 \\ \left(\dfrac{r}{b}\right)^n - \left(\dfrac{b}{r}\right)^n & n \neq 0 \end{cases}$

$$u(r,\ \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta [A_n \phi_1(r) + B_n \phi_2(r)] + \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta [C_n \phi_1(r) + D_n \phi_2(r)]$$

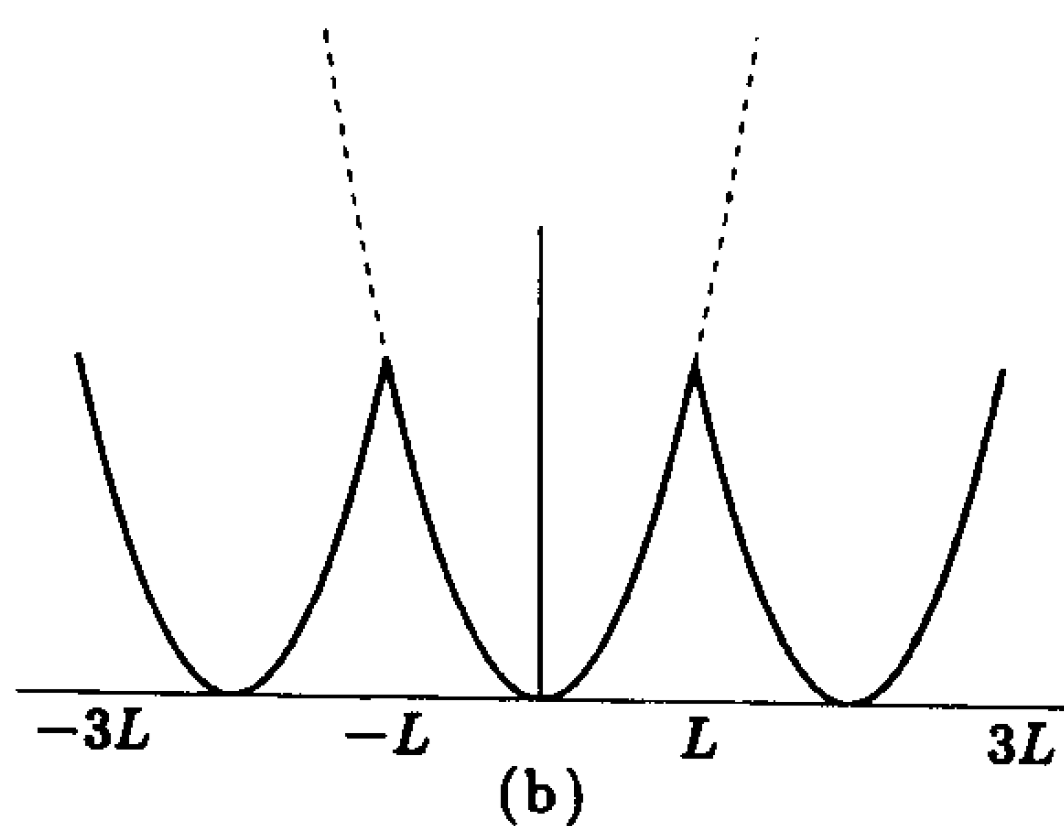
$D_n \phi_2(a) = \dfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta \mathrm{d}\theta$，等等.

2.5.9 (a) $u(r,\ \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\left(\dfrac{r}{a}\right)^{2n} - \left(\dfrac{a}{r}\right)^{2n} \right] \sin 2n\theta$，其中 $A_n \left[\left(\dfrac{b}{a}\right)^{2n} - \left(\dfrac{a}{b}\right)^{2n} \right] = \dfrac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\theta) \sin 2n\theta \mathrm{d}\theta$

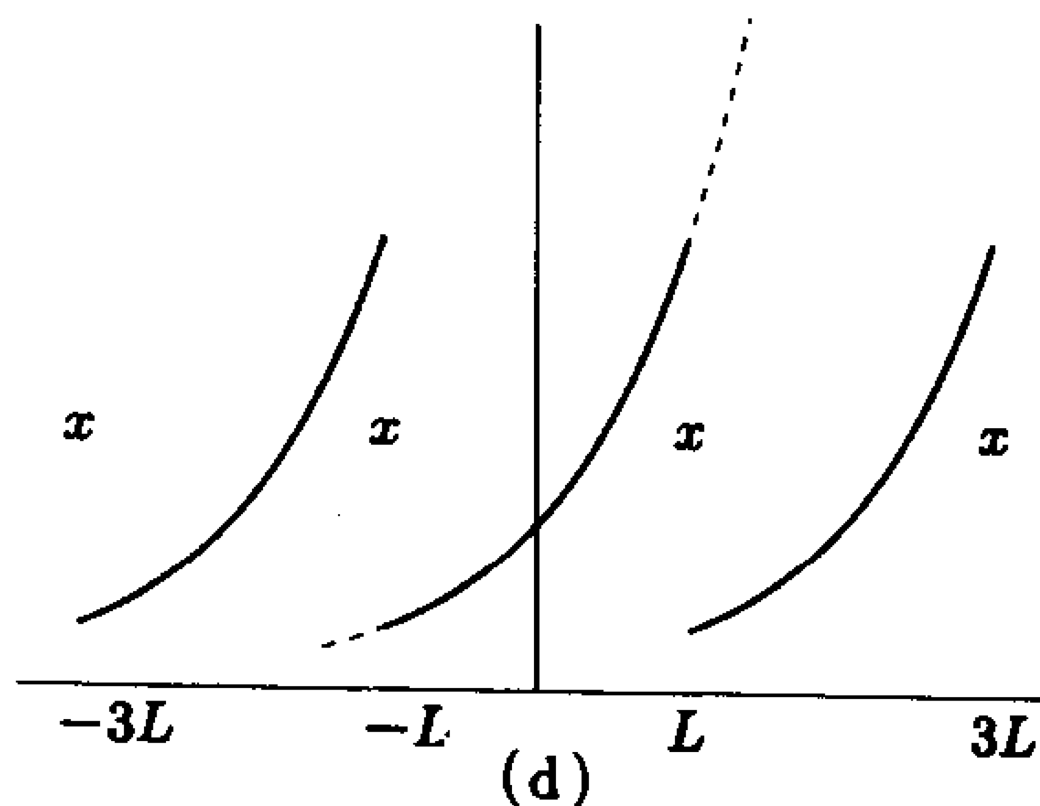
2.5.9 (b) $u(r,\ \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \dfrac{n\pi\theta}{\ln(b/a)} \sin\left[n\pi \dfrac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)} \right]$，其中

$$A_n \sinh \frac{n\pi^2}{2\ln(b/a)} = \frac{2}{\ln(b/a)} \int_a^b f(r) \sin\left[n\pi \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)} \right] \mathrm{d}r/r$$

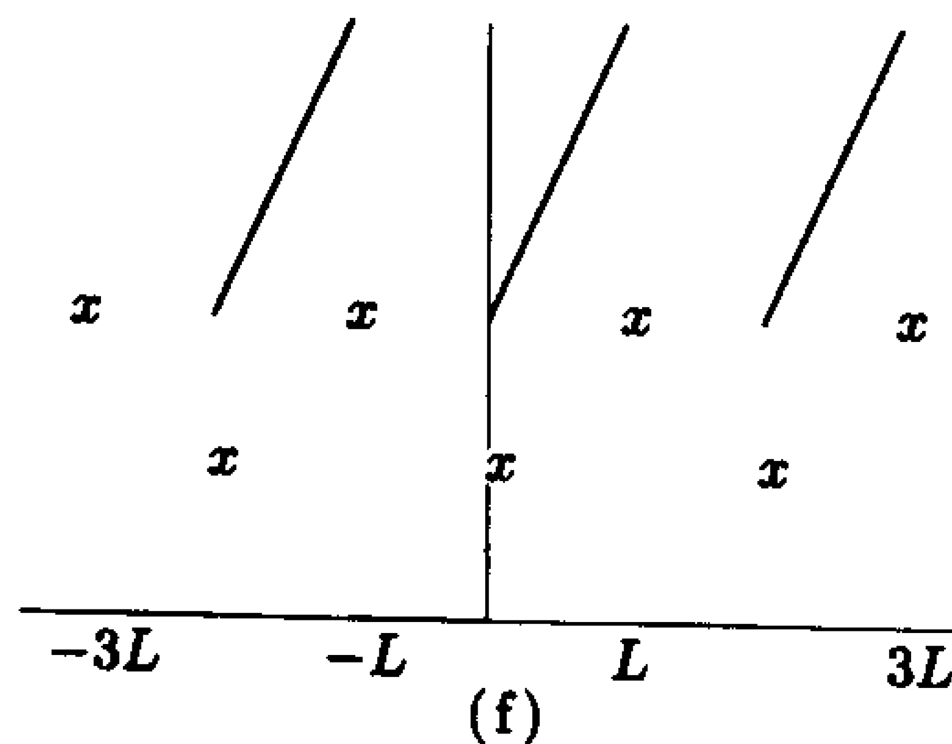
3.2.1



(b)

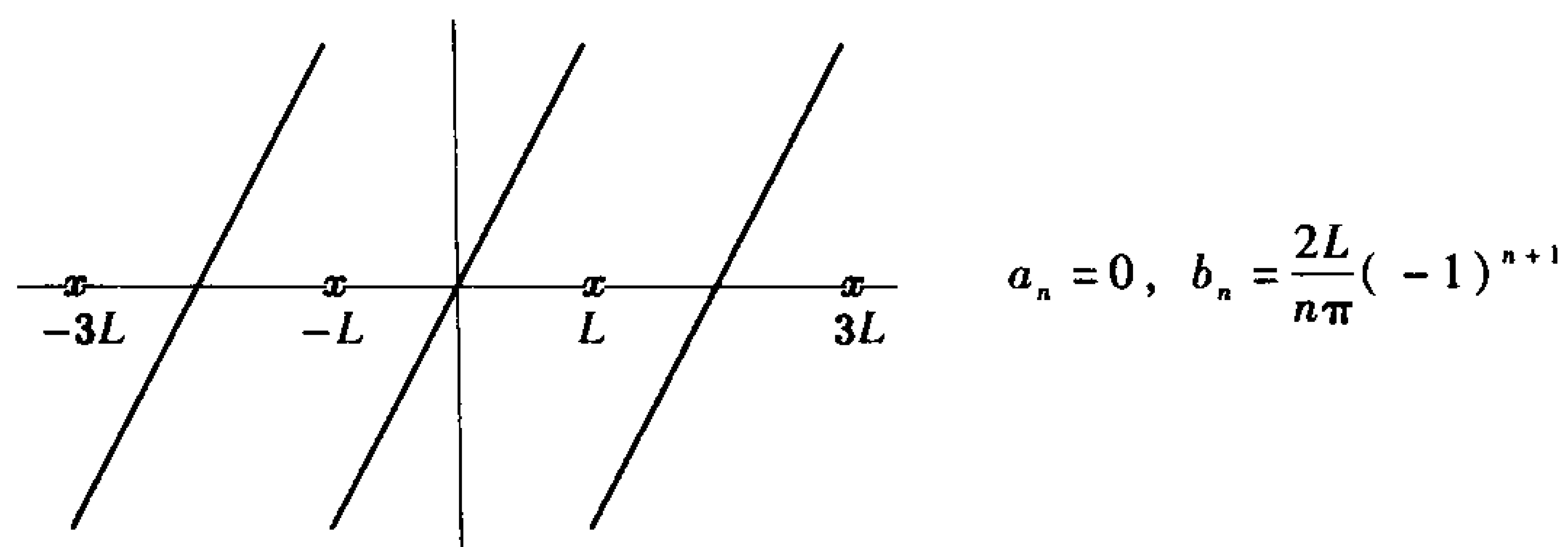


(d)



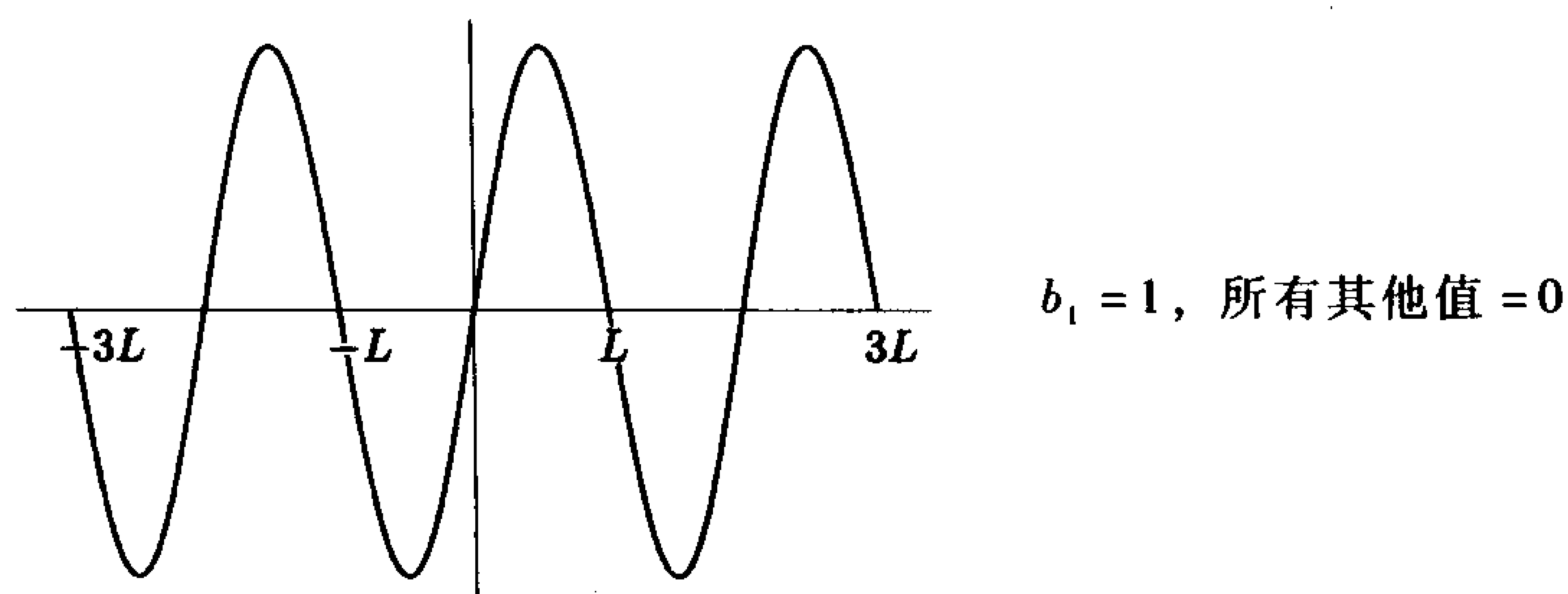
(f)

3.2.2 (a)



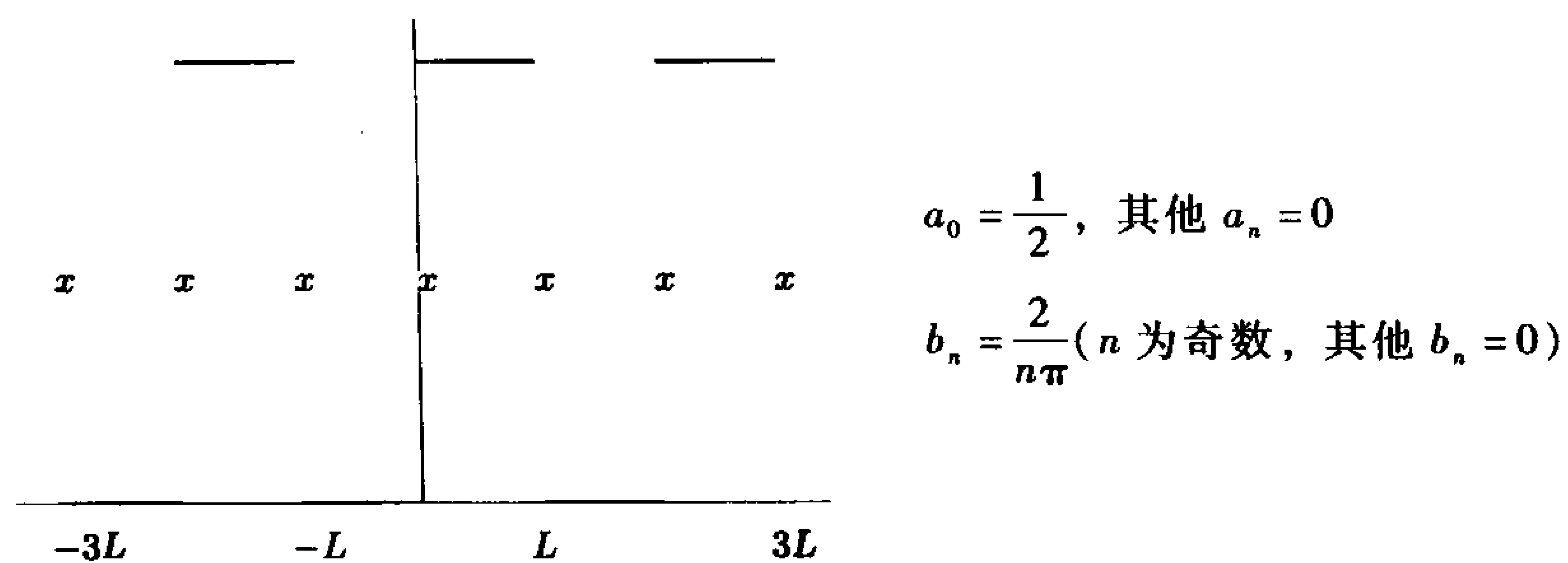
$a_n=0$，$b_n=\frac{2L}{n\pi}(-1)^{n+1}$

3.2.2 (c)



$b_1=1$，所有其他值 $=0$

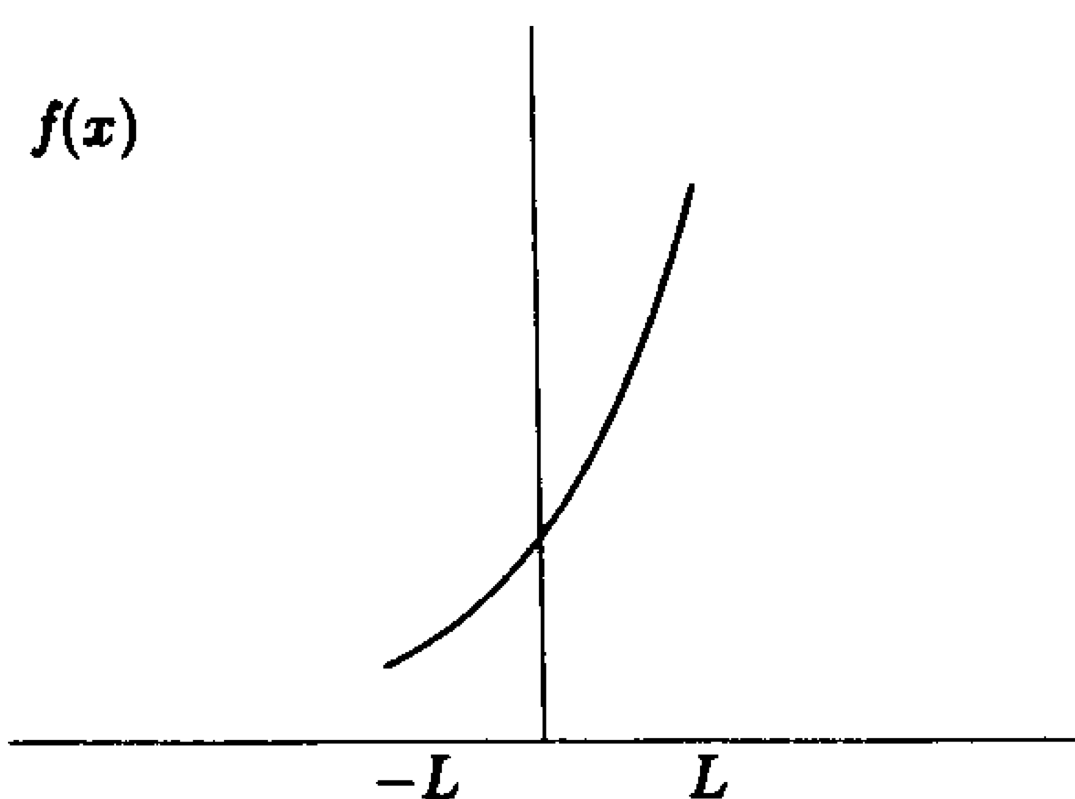
3.2.2 (f)

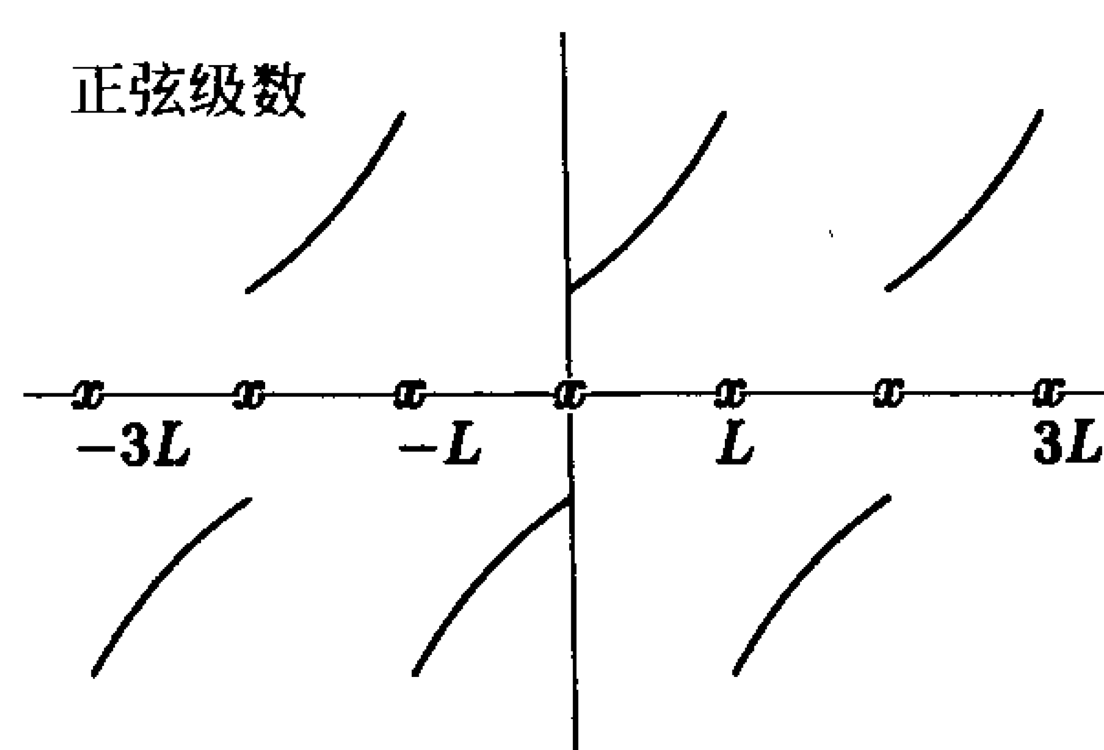


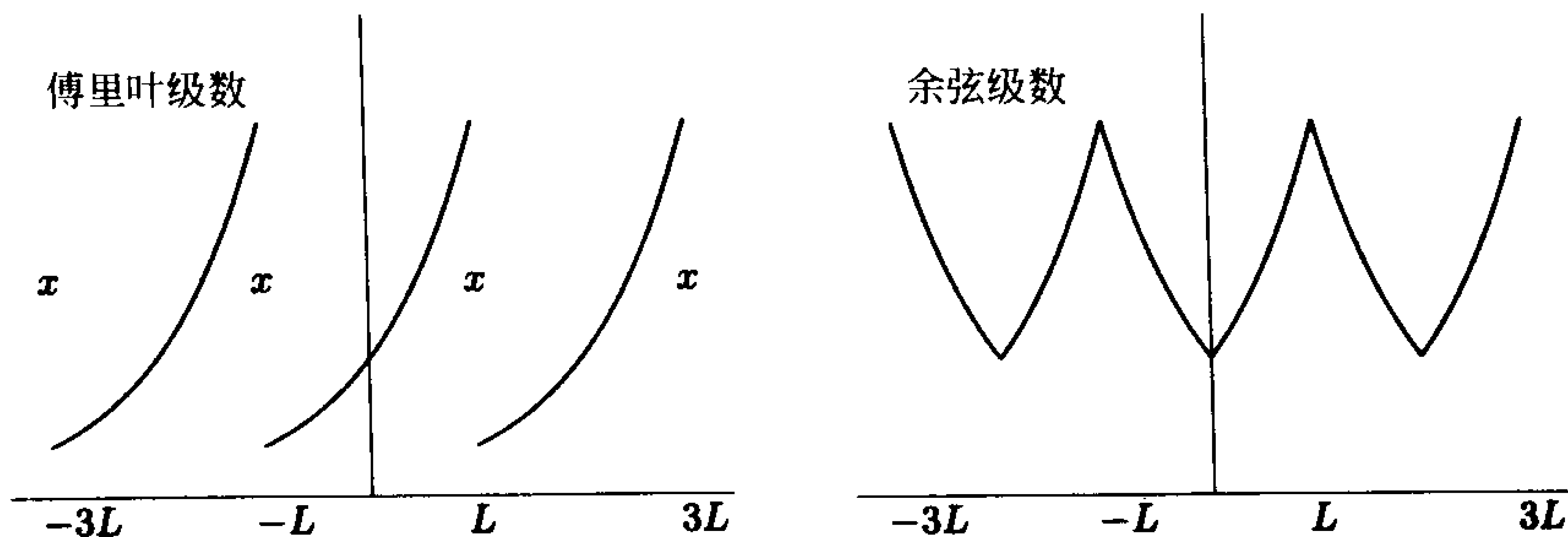
$a_0=\frac{1}{2}$，其他 $a_n=0$

$b_n=\frac{2}{n\pi}$(n 为奇数，其他 $b_n=0$)

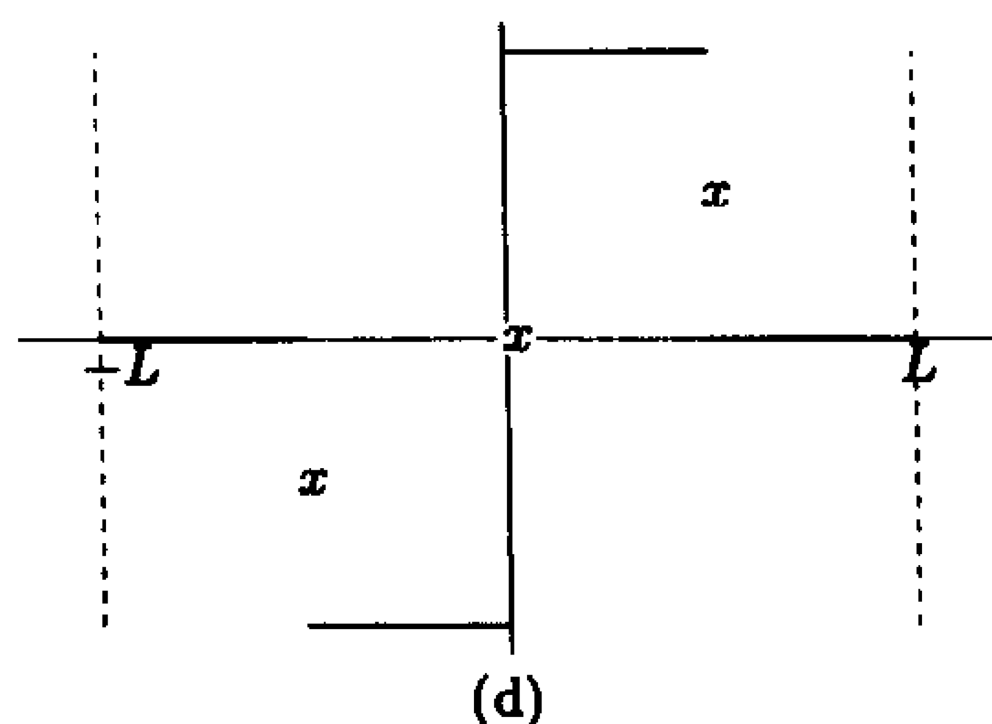
3.3.1 (d)







3.3.2



周期重复，

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right)$$

3.3.10 $f_e(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] = \frac{1}{2}\begin{cases} x^2 + e^x & x < 0 \\ x^2 + e^{-x} & x > 0 \end{cases}$

$f_0(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = \frac{1}{2}\begin{cases} x^2 - e^x & x < 0 \\ e^{-x} - x^2 & x > 0 \end{cases}$

3.3.13 $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin n\pi x/L \, dx$，$n$ 为偶数时 $b_n = 0$，因为 n 为偶数时 $\sin n\pi x/L$ 关于 $L/2$ 是奇的

3.4.1 (a) $\int_a^b u\frac{dv}{dx}dx = uv\Big|_a^b + uv\Big|_{c+}^{c-} - \int_a^b v\frac{du}{dx}dx$

3.4.3 (a) $b_n = \frac{2}{L}\sin\frac{n\pi x_0}{L}(\alpha - \beta) - \frac{n\pi}{L}a_n$

3.4.9 $\frac{db_n}{dt} + k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 b_n = \frac{2}{L}\int_0^L q(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$

3.4.12 $u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)\cos n\pi x/L$,

$$n \neq 0,3 \quad A_n(t) = A_n(0)e^{-k(n\pi/L)^2 t}$$

$$A_0(t) = A_0(0) + 1 - e^{-t}$$

$$A_3(t) = A_3(0)e^{-k(3\pi/L)^2 t} + \frac{e^{2t} - e^{-k(3\pi/L)^2 t}}{k\left(\frac{3\pi}{L}\right)^2 - 2},$$

其中 $A_0(0) = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$ 和 $(n\neq 0)A_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$

3.5.1 (c) $\left(\frac{x}{L}\right)^3 = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{6\frac{(-1)^n}{(n\pi)^2} + 12\frac{[1-(-1)^n]}{(n\pi)^4}\right\}\cos\frac{n\pi x}{L}$, $0 \leqslant x \leqslant L$

3.5.4 $b_n = \frac{2n\pi}{L^2 + n^2\pi^2}[1 - (-1)^n\cosh L]$

3.5.7 $\pi^3/32$

3.6.1 $C_m=\dfrac{1}{m\pi\Delta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\pi/L(x_0+\Delta/2)}\sin\dfrac{m\pi\Delta}{2L}$

4.4.1 (a)$\dfrac{n\pi c}{L}$，$n=1, 2, 3, \cdots$

4.4.1 (b)$\left(m-\dfrac{1}{2}\right)\pi c/H$，$m=1, 2, 3, \cdots$

4.4.2 (c)振动频率是$\sqrt{\lambda_n}=\sqrt{\dfrac{(n\pi/L)^2T_0-\alpha}{\rho_0}}$

4.4.3 (b)$u=\mathrm{e}^{-\beta t/2\rho_0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos w_nt+b_n\sin w_nt)\sin\dfrac{n\pi x}{L}$，其中 $w_n=\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho_0}\left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2-\dfrac{\beta^2}{4\rho_0^2}}$

5.3.1 $T_0\dfrac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}+\alpha\phi+\lambda\rho_0\phi=0$

5.3.3 $H=c_1\exp[\int^x\alpha(t)\mathrm{d}t]$，设 $c_1=1$. 则 $p(x)=H$，$q(x)=\gamma H$，$\sigma(x)=\beta H$.

5.3.4 (b)$u=\mathrm{e}^{\frac{v_0}{2k}x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\sin\dfrac{n\pi x}{L}\mathrm{e}^{-\lambda_nt}$，其中 $A_n=\dfrac{2}{L}\int_0^Lf(x)\mathrm{e}^{-\frac{v_0}{2k}x}\sin\dfrac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x$. 注意 $\lambda=\dfrac{v_0^2}{4k}+k\left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2$

5.3.9 (c)$n=1, 2, \cdots$，$\lambda=(n\pi/\ln b)^2$

5.4.2 $u=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\phi_n(x)\mathrm{e}^{-\lambda_nt}$(其中 $\lambda_1=0$，$\phi_1=1$)

5.4.3 $u=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\phi_n(r)\mathrm{e}^{-\lambda kt}$,其中 $a_n=\dfrac{\int_0^af(r)\phi_n(r)r\mathrm{d}r}{\int_0^a\phi_n^2(r)r\mathrm{d}r}$

5.4.6 $u=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\phi_n(x)\cos\sqrt{\lambda_n t}$

5.5.1 (g)$\alpha\delta-\beta\gamma=1$

5.5.9 $\lambda=\dfrac{-\int_0^1\left(\dfrac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}\right)^2\mathrm{d}x}{\int_0^1\mathrm{e}^x\phi^2\mathrm{d}x}$

5.5.11 (a)$H(x)=p\left(u\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}-v\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+uv\left(\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}-r\right)$

5.5A.4 (a)$v(t)=\dfrac{4}{5}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\mathrm{e}^{7t}-\dfrac{3}{5}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\mathrm{e}^{2t}$

5.5A.5 (b)$\lambda=2\pm\sqrt{3}$

5.6.1 (c)$u_T=ax+bx^2$，其中 $a=3$，$b=-2$，$\lambda_1\leqslant4\dfrac{1}{6}$

5.7.1 圆环频率(每 2π 个单位时间内的循环数)是$\sqrt{\lambda}$，而实际上的频率是$\sqrt{\lambda}/2\pi$(每个单位时间内的循环数)：

$$\frac{1}{2}\leqslant\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{1+\alpha^2}$$

5.8.2 (c)由延伸图 5.8.2a，$(n-l)\pi<\sqrt{\lambda_n}L<\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\pi$.

5.8.3 (b) $(n-1)\pi < \sqrt{\lambda_n}L < \left(n-\frac{1}{2}\right)\pi$, $n=1, 2, 3, \cdots$

5.8.7 (b) $\lambda = 1/4$ (c)没有 (d)否 (e)是

5.8.8 (c) $\sqrt{\lambda_n} \sim (n-1)\pi$

5.8.10 (a) $\lambda_1 \approx 4.12$ (b) $\lambda_1 = 4.115\,86\cdots$

5.8.13 $\cos\sqrt{\lambda}L = \frac{1}{\sqrt{1+(\lambda/h^2)}}$. 于是 $\int_0^L \sin^2\sqrt{\lambda}x\,dx = \frac{L}{2} + \frac{1}{2h[1+(\lambda/h^2)]}$

5.9.1 (b) $\lambda^{1/2}\int_0^L (\sigma/p)^{1/2}dx_0 \approx \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$

5.9.3 (a) $A'' + i\lambda^{1/2}\left(2A'\sigma^{1/2} + \frac{1}{2}\sigma^{-1/2}\sigma' A\right) + qA = 0$

5.9.3 (e) $A_{n+1} = \frac{i}{2}\sigma^{-1/4}\int_0^x \sigma^{-1/4}(A_n'' + qA_n)\,dx_0$

5.10.2 (b) $\frac{\pi^4}{96} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots$

6.2.6 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \approx \frac{1}{4(\Delta x)^2}[u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x-\Delta x, y+\Delta y) - u(x+\Delta x, y-\Delta y) + u(x-\Delta x, y-\Delta y)]$，假设 $\Delta x = \Delta y$

6.3.4 (a) $\beta_n = \frac{\sum_{j=1}^{N-1} f_j \sin n\pi j/N}{\sum_{j=1}^{N-1}\sin^2 n\pi j/N}$

6.3.4 (b) $\frac{N-1}{2}$

6.3.6 (d)稳定的，如果 $s < 0.512\,5$

6.3.9 (b) $A = \frac{1}{(\Delta x)^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

6.3.10 (b) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{ka}{s}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

6.3.14 (c) $\lambda = 0, 3, 4$; $|\lambda - 1| \leqslant 5$, $|\lambda - 4| \leqslant 8$, $|\lambda - 2| \leqslant \frac{1}{3}$

6.4.1 $k\Delta t\left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}\right] \leqslant \frac{1}{2}$

6.5.5 (b)不稳定的

6.5.6 (b)稳定的，如果 $\frac{c}{\Delta x/\Delta t} \leqslant 1$

7.3.1 (a) $u = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{H}e^{-\lambda_{nm}kt}$，其中 $\lambda_{nm} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2$

7.3.1 (c)

$$u = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}\cos\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{H}e^{-\lambda_{nm}kt}, \text{其中 } \lambda_{nm} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2$$

7.3.2 (b) $u = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{nm\ell}\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi y}{H}\cos\frac{\ell\pi z}{W}e^{-\lambda_{nm\ell}kt}$，其中 $\lambda_{nm\ell} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 + \left(\frac{\ell\pi}{W}\right)^2$

当 $t\to\infty$ 时，$u(x,\ y,\ z,\ t)\to a_{000}=\dfrac{1}{LHW}\int_0^W\int_0^H\int_0^L f(x,y,z)\,dxdydz$

7.3.4 (b)

$$u(x,y,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_{nm}\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi y}{H}h_{nm}(t)$$

$$h_{nm}(t)=\begin{cases}t & n=0,m=0\\ \sin\omega_{nm}t & \text{其他,}\end{cases}\quad \text{其中 } \omega_{nm}^2=c^2\pi^2[(n/L)^2+(m/H)^2]$$

$$A_{nm}h'_{nm}(0)=\frac{\int_0^H\int_0^L f\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi y}{H}dxdy}{\int_0^H\int_0^L\cos^2\frac{n\pi x}{L}\cos^2\frac{m\pi y}{H}dxdy}$$

7.3.6 (b)$u=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{W}\cosh\sqrt{\lambda_{nm}}z$，其中 $\lambda_{nm}=(n\pi/L)^2+(m\pi/W)^2$

7.3.7 (c)(d)$u(x,\ y,\ z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}A_{nm}\cos\frac{n\pi y}{W}\cos\frac{m\pi z}{H}\cosh\beta_{nm}x$，其中 $\beta_{nm}^2=(n\pi/W)^2+(m\pi/H)^2$

对(c)，解存在只有 $\int_0^H\int_0^W f(y,z)\,dydz=0$，此时 A_{00} 是任意的，其他的系数是

$$A_{nm}\beta_{nm}\sinh\beta_{nm}L=\frac{\int_0^H\int_0^W f\cos\frac{n\pi y}{W}\cos\frac{m\pi z}{H}dydz}{\int_0^H\int_0^W\cos^2\frac{n\pi y}{W}\cos^2\frac{m\pi z}{H}dydz}.$$

对(d)，$A_{nm}\cosh\beta_{nm}L=\dfrac{\int_0^H\int_0^W g\cos\frac{n\pi y}{W}\cos\frac{m\pi z}{H}dydz}{\int_0^H\int_0^W\cos^2\frac{n\pi y}{W}\cos^2\frac{m\pi z}{H}dydz}.$

7.4.1 (a)$\lambda_{nm}=(n\pi/H)^2+(m\pi/L)^2$，其中 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$

7.7.1 $u(r,\ \theta,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_3(\sqrt{\lambda_{3n}}r)\sin3\theta\sin c\sqrt{\lambda_{3n}}t$

7.7.2 (d)$u(r,\ \theta,\ t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(A_{mn}\cos m\theta+B_{mn}\sin m\theta)H_{mn}(r,\ t)$，其中

$$H_{mn}(r,t)=\begin{cases}t & m=0,n=1\\ J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r)\sin c\sqrt{\lambda_{mn}}t & \text{否则有 } J'_m(\sqrt{\lambda_{mn}}a)=0\end{cases}$$

$$A_{mn}=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^a\beta(r,\theta)\phi_{mn}(r)\cos m\theta\, rdrd\theta}{\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^a\phi_{mn}^2(r)\cos^2m\theta\, rdrd\theta}$$

其中

$$\phi_{mn}(r)=\begin{cases}1 & n=0,m=1\\ c\sqrt{\lambda_{mn}}J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) & \text{否则}\end{cases}$$

并且，B_{mn} 与 A_{mn} 是相同的，只是在上式中用 $\sin m\theta$ 代替 $\cos m\theta$

7.7.3 (a)$c\sqrt{\lambda_{mn}}$，其中 $J_{2m}(\sqrt{\lambda_{mn}}a)=0$

7.7.5 频率是 $c\sqrt{\lambda}$，其中 $J_{2m}(\sqrt{\lambda}a)Y_{2m}(\sqrt{\lambda}b)-J_{2m}(\sqrt{\lambda}b)Y_{2m}(\sqrt{\lambda}a)=0$

7.7.8 对热传导方程，用 $dh/dt=-\lambda kh$ 代替(7.7.5)，7.7 节还是有效的. 边界条件引起更具体的变化. 瑞利商表明 $\lambda\geqslant0$，其中只有当 $\phi(r,\ \theta)$ 为常数时，$\lambda=0$，这意味着 $m=0$. 其他特征函数仍然满足(7.7.38)，其中边界条件 $f'(a)=0$ 给出 $J'_m(\sqrt{\lambda}a)=0$. 这样

$$\phi_{mn}(r,\theta)=\begin{cases}1 & m=0,n=1\\ J_m(\sqrt{\lambda}r)\cos m\theta & \text{其他}\end{cases}$$

除 $m=0,n=1$ 外，当 $t\to\infty$ 时，$e^{-\lambda_{mn}kt}\to 0$，因为 $\lambda_{mn}=0$. 这样 $u(r,\theta,t)\to A_{01}$，其中 $A_{01}=\left(\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^a f(r,\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\right)/(\pi a^2)$.

7.7.9 (b)

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}A_{mn}\phi_{mn}(r)\cos m\theta e^{-\lambda_{mn}kt}，\text{其中}$$

$$\phi_{mn}(r)=\begin{cases}1 & m=0,n=1\\ J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) & \text{其他，其中 } J'_m(\sqrt{\lambda}a)=0\end{cases}$$

7.7.10 $u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nJ_0(\sqrt{\lambda_n}r)e^{-\lambda_nkt}$，其中 $J_0(\sqrt{\lambda_n}a)=0$

7.7.12 (c) $y=c_1[\cos(2\ln x)+\cdots]+c_2[\sin(2\ln x)+\cdots]$

7.7.12 (e) $y=c_1(x^2+\cdots)+c_2(x^3+\cdots)$

7.8.1 (b) $J_m(\sqrt{\lambda})Y_m(2\sqrt{\lambda})-J_m(2\sqrt{\lambda})Y_m(\sqrt{\lambda})=0$

7.8.1 (d) $\frac{1}{2}\pi^2\leqslant\lambda_1\leqslant2\pi^2$

7.8.2 (d) $u(r,\theta,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}c_{mn}J_{2m}(\sqrt{\lambda_{mn}}r)\sin 2m\theta e^{-\lambda_{mn}kt}$，其中 $J_{2m}(\sqrt{\lambda_{mn}}a)=0$

7.8.8 $J_{1/2}(z)=\sqrt{2/\pi z}\sin z$

7.9.1 (b) $u(r,\theta,z)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sinh\sqrt{\lambda_{7n}}(H-z)\sin7\theta J_7(\sqrt{\lambda_{7n}}r)$，其中 $J_7(\sqrt{\lambda_{7n}}a)=0$

7.9.2 (b) $u(r,\theta,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}I_m\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{H}r\right]\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{H}\sin m\theta$

7.9.3 (b) $u(r,\theta,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}A_{\ell mn}\phi_{\ell mn}(r,\theta,z)e^{-\lambda_{mn}kt}$，其中 $\lambda_{mn}=(\ell\pi/H)^2+\lambda'_{mn}$，$J'_{2m}(\sqrt{\lambda'_{mn}}a)=0$

$$\phi_{\ell mn}(r,\theta,z)=\begin{cases}1 & m=0,\ell=0,n=1\\ \cos\frac{\ell\pi z}{H}\cos2m\theta J_{2m}(\sqrt{\lambda'_{mn}}r) & \text{其他}\end{cases}$$

7.9.4 (a) $u(r,z,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{nm}J_0(\sqrt{\lambda'_n}r)\sin\frac{m\pi z}{H}e^{-\lambda kt}$，其中 $\lambda=\lambda'+(m\pi/H)^2$，$J_0(\sqrt{\lambda'_n}a)=0$. 这里，

$$A_{nm}=\frac{\iint f(r,z)J_0(\sqrt{\lambda'_n}r)\sin\frac{m\pi z}{H}r\mathrm{d}r\mathrm{d}z}{\iint J_0^2(\sqrt{\lambda'_n}r)\sin^2\frac{m\pi z}{H}r\mathrm{d}r\mathrm{d}z}.$$

8.2.1 (a) $u(x,t)=A+Bx+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}e^{-[(n-1/2)\pi/L]^2kt}$，其中 $a_n=\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}\mathrm{d}x$

8.2.1 (d) $u_E(x)=-\frac{x^2}{2}+\left(\frac{B-A}{L}+\frac{L}{2}\right)x+A.$

8.2.2 (a) $r(x,t)=A(t)x+\frac{[B(t)-A(t)]x^2}{2L}$

8.2.2 (c) $r(x,t)=A(t)x+B(t)-LA(t)$

8.2.6 (a) $u(x,t)=A+(B-A)\frac{x}{L}+\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{L}\left(A_n\cos\frac{n\pi ct}{L}+B_n\sin\frac{n\pi ct}{L}\right)$，其中 $A_n=\frac{2}{L}\int_0^L\Big\{f(x)-$

$$\left[A+(B-A)\frac{x}{L}\right]\right\}\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x,\ B_n=\frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x$$

(d) $u_E(x)=\frac{L^2}{c^2\pi^2}\sin\frac{\pi x}{L}$

8.3.1 (c) $u(x,t)=A(t)+\sum_{n=1}^{\infty}B_n(t)\sin\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{L}$

8.3.1 (f) $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(t)\cos\frac{n\pi x}{L}$，其中

$$\frac{\mathrm{d}A_n}{\mathrm{d}t}+k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2A_n=\frac{\int_0^L Q(x,t)\cos n\pi x/L\mathrm{d}x}{\int_0^L\cos^2 n\pi x/L\mathrm{d}x}$$

8.3.3 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\phi_n(x)$，其中$\frac{\mathrm{d}a_n}{\mathrm{d}t}=-\lambda_n a_n+\frac{\int_0^L\phi_n f\mathrm{d}x}{\int_0^L\phi_n^2 c\rho\mathrm{d}x}$

8.3.4 (a) $u_E(x)=A+(B-A)\frac{\int_0^x\mathrm{d}\bar{x}/K_0(\bar{x})}{\int_0^L\mathrm{d}\bar{x}/K_0(\bar{x})}$

8.3.5 $u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)J_0(\lambda_n^{1/2}r)$，其中 $J_0(\lambda_n^{1/2}a)=0$，

$$\frac{\mathrm{d}A_n}{\mathrm{d}t}+k\lambda_nA_n=\frac{\int_0^a f(r,t)J_0(\lambda_n^{1/2}r)r\mathrm{d}r}{\int_0^a J_0^2(\lambda_n^{1/2}r)r\mathrm{d}r}$$

8.3.7 $r(x,t)=\frac{x^3}{6L}+\left(\frac{t}{L}-\frac{L}{6}\right)x$

8.4.1 (b) $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(t)\cos\frac{n\pi x}{L}$，其中

$$A_n(t)=\mathrm{e}^{-k(n\pi/L)^2t}\left(A_n(0)+\int_0^t\mathrm{e}^{k(n\pi/L)^2\bar{t}}\left\{q_n(\bar{t})+\frac{I_nk}{L}[(-1)^nB(\bar{t})-A(\bar{t})]\right\}\mathrm{d}\bar{t}\right)$$

满足 $A_n(0)=\frac{\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x}{\int_0^L\cos^2\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x}, q_n(t)\ \frac{\int_0^L Q(x,t)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x}{\int_0^L\cos^2\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x}, I_n=\begin{cases}1 & n=0\\ 2 & n\neq 0\end{cases}$

8.5.2 (b) $\omega^2=\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2$

8.5.5 (c) $u(r,\theta,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{nm}(t)J_m(\sqrt{\lambda}r)\sin m\theta$，满足 $J_m(\sqrt{\lambda}a)=0$，其中

$$A_{nm}=\frac{1}{c\sqrt{\lambda}}\int_0^t Q_{nm}(\bar{t})\sin c\sqrt{\lambda}(t-\bar{t})\mathrm{d}\bar{t}+c_{nm}\cos c\sqrt{\lambda}t,$$

$$Q_{nm}=\frac{\iint Q(x,y,t)J_m(\sqrt{\lambda}r)\sin m\theta r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{\iint J_m^2(\sqrt{\lambda}r)\sin^2 m\theta r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}, c_{nm}=\frac{\iint f(x,y)J_m(\sqrt{\lambda}r)\sin m\theta r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{\iint J_m^2(\sqrt{\lambda}r)\sin^2 m\theta r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}$$

8.5.6 (a) $\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2a}{\mathrm{d}t^2}+\lambda a=\frac{\int_0^\pi\int_0^\alpha g\phi r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{\int_0^\pi\int_0^\alpha\phi^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}$，其中$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}J_m(\lambda^{1/2}\alpha)=0$

8.6.1 (b)$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{H}$，其中

$$A_{nm}=\frac{-Q_{nm}-(2/L)(-1)^{n}(n\pi/L)^{2}}{(n\pi/L)^{2}+(m\pi/H)^{2}}$$

(d) 若$\iint Q\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$,则 $u=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}A_{nm}\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi y}{H}$,其中 A_{00} 是任意的，而其他系数由下式给定：

$$-A_{nm}\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^{2}+\left(\frac{m\pi}{H}\right)^{2}\right]=\frac{\iint Q\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi y}{H}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\cos^{2}\frac{n\pi x}{L}\cos^{2}\frac{m\pi y}{H}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

8.6.3 (a)$u(r,\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\cos m\theta J_{m}(\sqrt{\lambda}r)+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sin m\theta J_{m}(\sqrt{\lambda}r)$，其中 $J_{m}(\sqrt{\lambda}a)=0$ 和

$$\begin{pmatrix}A_{mn}\\B_{mn}\end{pmatrix}=\frac{-\frac{1}{\lambda}\iint Q\begin{pmatrix}\cos m\theta\\\sin m\theta\end{pmatrix}J_{m}(\sqrt{\lambda}r)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{\iint\begin{pmatrix}\cos^{2}m\theta\\\sin^{2}m\theta\end{pmatrix}J_{m}^{2}(\sqrt{\lambda}r)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}$$

8.6.6 $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n}(y)\sin nx$，其中 $a_{n}(y)=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{2y}\delta_{n1}+\alpha_{n}\sinh ny+\beta_{n}\cosh ny$,

$$\delta_{n1}=\begin{cases}1 & n=1\\0 & n\neq1\end{cases}$$

9.2.1 (d)$G(x,t;x_{0},0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{I_{n}}\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x_{0}}{L}\mathrm{e}^{-k}(n\pi/L)^{2}(t-t_{0})$，其中 $I_{n}=\begin{cases}L & n=0\\L/2 & n\neq0\end{cases}$

$$u(x,t)=\int_{0}^{L}g(x_{0})G(x,t;x_{0},t_{0})\mathrm{d}x_{0}+\int_{0}^{L}\int_{0}^{t}Q(x_{0},t_{0})G(x,t;x_{0},t_{0})\mathrm{d}t_{0}\mathrm{d}x_{0}$$
$$+\int_{0}^{t}kB(t_{0})G(x,t;L,t_{0})\mathrm{d}t_{0}-\int_{0}^{t}kA(t)G(x,t;0,t_{0})\mathrm{d}t_{0}$$

9.2.3 $G(x,t;x_{0},t_{0})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{L}\sin\frac{n\pi x_{0}}{L}\sin\frac{n\pi x\sin n\pi c(t-t_{0})/L}{L\qquad n\pi c/L}$

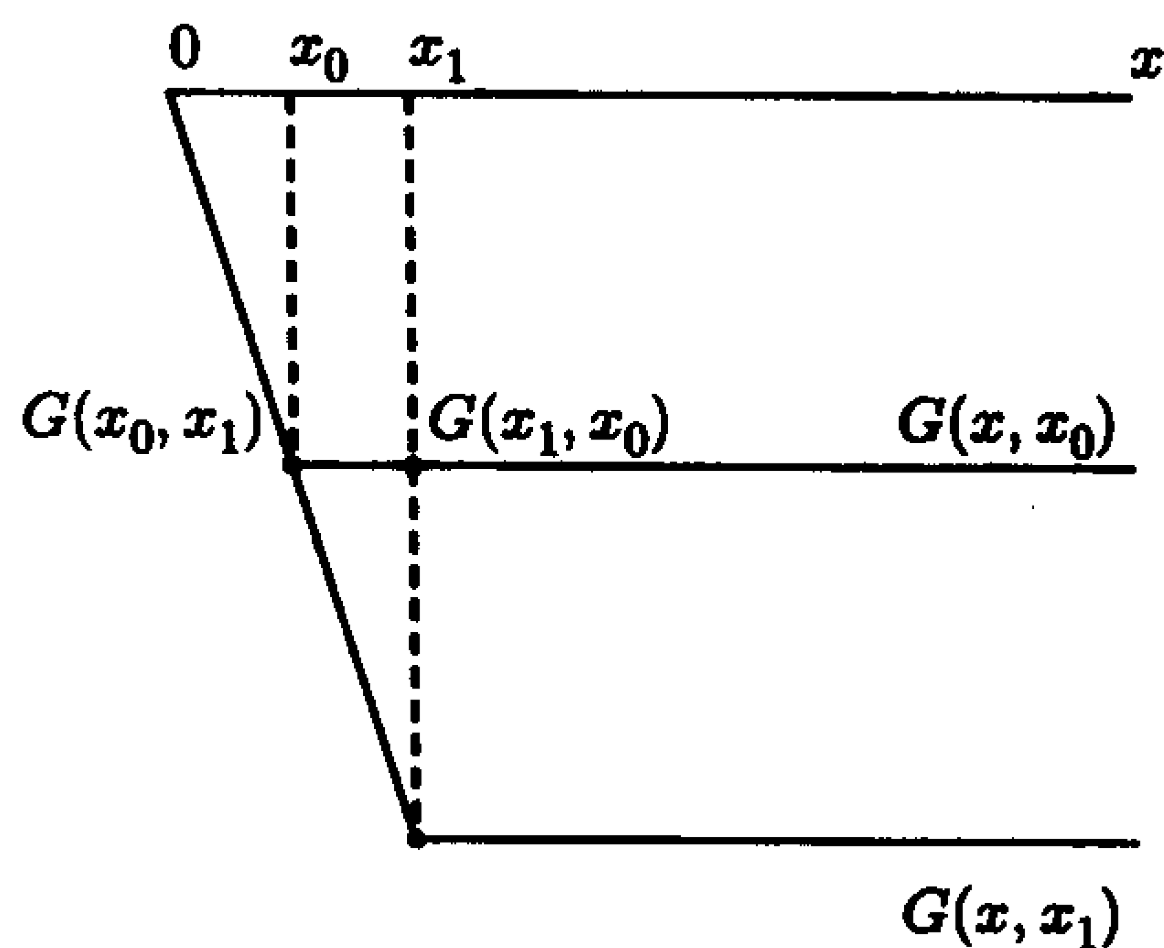
$$u(x,t)=\int_{0}^{L}\int_{0}^{t}Q(x_{0},t_{0})G(x,t;x_{0},t_{0})\mathrm{d}t_{0}\mathrm{d}x_{0}+\int_{0}^{L}g(x_{0})G(x,t;x_{0},0)\mathrm{d}x_{0}+\int_{0}^{L}f(x_{0})\frac{\partial G}{\partial t}(x,t;x_{0},0)\mathrm{d}x_{0}$$

9.3.5 (a), (b)$u(x)=\int_{0}^{x}(x-x_{0})f(x_{0})\mathrm{d}x_{0}-x\int_{0}^{L}f(x_{0})\mathrm{d}x_{0}$

9.3.5 (c)$G(x,x_{0})=\begin{cases}-x & x<x_{0}\\-x_{0} & x>x_{0}\end{cases}$

9.3.6 (a)参看 9.3.5(c)的答案

9.3.6 (b)



9.3.9 (b)参看 9.3.11 的答案

9.3.11 (a) $G(x, x_0) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x_0 - L)\sin x}{\sin L} & x < x_0 \\ \dfrac{\sin(x - L)\sin x_0}{\sin L} & x > x_0 \end{cases}$

9.3.13 (b) $G(x, x_0) = \dfrac{1}{2ik} e^{ik|x - x_0|}$

9.3.14 (d) $u(x) = \int_0^L G(x, x_0) f(x_0) dx_0 - \alpha p(0) \dfrac{dG}{dx_0}(x, x_0)\Big|_{x_0=0} - \beta p(L) G(x, L)$

9.3.15 (a) $G(x, x_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{k} y_1(x) y_2(x_0) & x < x_0 \\ \dfrac{1}{k} y_1(x_0) y_2(x) & x > x_0, \end{cases}$ 其中 k 是常数

9.3.21 $G(x, x_0) = \begin{cases} 0 & x < x_0 \\ 1 & x > x_0 \end{cases}$

9.3.25 (b) $u(x) = \dfrac{1}{6} \int_0^x f(t_0)(x - t_0)^3 dt_0$

9.4.2 (a) $0 = \int_0^L \phi_h(x) f(x) dx - \alpha p(0) \dfrac{d\phi_h}{dx}\Big|_{x=0} + \beta p(L) \dfrac{d\phi_h}{dx}\Big|_{x=L}$

9.4.3 (b)无穷多个解

9.4.6 (a) $u = 1 + c_1 \cos x + c_2 \sin x$；无解

9.4.6 (b) $c_2 = 0$，c_1 任意

9.4.6 (c) c_1 和 c_2 任意

9.4.8 (a) $u = \dfrac{1}{2} x \sin x + c_2 \sin x$

9.4.10 $G_m(x, x_0) = a \sin x \sin x_0 + \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}(x \cos x \sin x_0 + x_0 \cos x_0 \sin x) - \cos x_0 \sin x, & x < x_0 \\ \dfrac{1}{\pi}(x_0 \cos x_0 \sin x + x \cos x \sin x_0) - \cos x \sin x_0, & x > x_0 \end{cases}$

$u(x) = \int_0^\pi f(x_0) G_m(x, x_0) dx_0 - \dfrac{\beta}{\pi}(x \cos x + \sin x) - \alpha\left[\dfrac{1}{\pi}(\sin x + x \cos x) - \cos x\right] + k \sin x$,其中 k 是任意常数

9.4.11 (a), (b) $c = 1$

9.4.11 (d) $G_a(x, x_0) = \alpha + \begin{cases} x_0 & x < x_0 \\ x & x > x_0, \end{cases}$ 其中 α 是任意常数

9.4.11 (e) $u(x) = \int_0^L f(x_0) G_a(x, x_0) dx_0 + k_1$,其中 k_1 是常数

9.5.3 (c) $G(r, \theta; r_0, \theta_0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin m\theta \sin m\theta_0 J_m(\sqrt{\lambda} r) J_m(\sqrt{\lambda} r_0)}{-\lambda \iint J_m^2(\sqrt{\lambda} r) \sin^2 m\theta \, r dr d\theta}$，其中 $J_m(\sqrt{\lambda} a) = 0$

9.5.4 参看有附加积分符号的(9.5.23)

9.5.9 (b) $G(x, x_0) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\theta \sin m\theta_0}{m\pi} \begin{cases} \left(\frac{r}{a}\right)^m \left[\left(\frac{r_0}{a}\right)^m - \left(\frac{a}{r_0}\right)^m\right] & r < r_0 \\ \left(\frac{r_0}{a}\right)^m \left[\left(\frac{r}{a}\right)^m - \left(\frac{a}{r}\right)^m\right] & r > r_0 \end{cases}$

9.5.10 (a) $L = \nabla^2 + k^2$, $\iiint [uL(v) - vL(u)]\mathrm{d}V = \oiint (u\nabla v - v\nabla u)\cdot \hat{n}\mathrm{d}S$

9.5.10 (b) $c_2 = 0$, $c_1 = \frac{-1}{(4\pi)}$ (c) $G = \frac{1}{4}[Y_0(kr) - \mathrm{i}J_0(kr)]$

9.5.13 (a) $G(x, x_0) = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2 + (z-z_0)^2}}\right]$

9.5.14 $G(x, x_0) = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2][(x+x_0)^2(y+y_0)^2]}{[(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2][(x+x_0)^2 + (y-y_0)^2]}$

9.5.19 $G(x, x_0) = \frac{1}{4\pi}\ln\left[a^2\frac{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta-\theta_0)}{r^2r_0^2 + a^4 - 2rr_0a^2\cos(\theta-\theta_0)}\right] - \frac{1}{4\pi}\ln\left[a^2\frac{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta+\theta_0)}{r^2r_0^2 + a^4 - 2rr_0a^2\cos(\theta+\theta_0)}\right]$

9.5.22 (c) $G(x, x_0) = -\frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{|x-\alpha_n|} - \frac{1}{|x-\beta_n|}\right)$，其中 $\alpha_n = (x_0 + 2Ln, y_0, z_0)$，$\beta_n = (-x_0 + 2Ln, y_0, z_0)$

10.2.1 $c(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}[A(-\omega) - \mathrm{i}B(-\omega)] & \omega < 0 \\ \frac{1}{2}[A(\omega) + \mathrm{i}B(\omega)] & \omega > 0 \end{cases}$

10.3.6 参看表 10.4.1

10.3.7 参看表 10.4.1

10.3.10 (b) $\int_0^L J_0(sr)J_0(s_1r)r\mathrm{d}r \approx \frac{2}{\pi}\frac{-\sqrt{s_1/s}\cos sL - \pi/4 \sin s_1L - \pi/4 + \sqrt{s/s_1}\cos s_1L - \pi/4 \sin sL - \pi/4}{s^2 - s_1^2}$

10.3.10 (c) $A(s_1) = \int_0^{\infty} f(r)J_0(s_1r)r\mathrm{d}r$

10.3.16 $\int_0^{\infty} y^p \mathrm{e}^{-ky^n}\mathrm{d}y = \frac{1}{n}k^{-(1+p)/n}\Gamma\left(\frac{1+p}{n}\right)$

10.4.3 (a) $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x})\mathrm{e}^{-(x+ct-\bar{x})^2/4kt}\mathrm{d}\bar{x}$

10.4.5 (c) $u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x})\sqrt{\frac{\pi}{kt}}\mathrm{e}^{-(x-\bar{x})^2/4kt}\mathrm{d}\bar{x} + \frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} Q(\bar{x},\tau)\sqrt{\frac{\pi}{k(t-\tau)}}\mathrm{e}^{-(x-\bar{x})^2/4k(t-\tau)}\mathrm{d}\bar{x}\mathrm{d}\tau$

10.4.6 $\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\left(\frac{\omega^3}{3} + \omega x\right)\mathrm{d}\omega$

10.4.7 (c) $u(x,t) = \frac{1}{(3kt)^{1/3}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x})A_i\left[\frac{\bar{x} - x}{(3kt)^{1/3}}\right]\mathrm{d}\bar{x}$

10.5.3 $C[\mathrm{e}^{-\alpha x^2}] = 2\frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}}\mathrm{e}^{-\omega^2/4\alpha}$

10.5.10 $C^{-1}(\omega\mathrm{e}^{-\omega\alpha}) = \frac{(\alpha^2 - x^2)}{(\alpha^2 + x^2)^2}$

10.5.11 $u(x, t) = 1 + \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}(f(\bar{x}) - 1)(\mathrm{e}^{-(x-\bar{x})^2/4kt} - \mathrm{e}^{-(x+\bar{x})^2/4kt})\mathrm{d}\bar{x}$

10.5.17 (b) $\bar{U}(\omega,\ t) \approx \dfrac{(2/\pi)\omega A e^{i\sigma_0 t}}{\omega^2 + i\sigma_0/k}$

10.6.1 (a) $\bar{u}(\omega,\ y) = F_2(\omega)\dfrac{\sinh\omega y}{\sinh\omega H} + F_1(\omega)\dfrac{\sinh\omega(H-y)}{\sinh\omega H}$，其中 $\bar{u}(\omega,\ y)$ 是 $u(x,\ y)$ 的傅里叶变换

10.6.2 (b) $\bar{u}(x,\ \omega) = \dfrac{G_1(\omega)\cosh\omega(L-x)}{\cosh\omega L}$，其中 $\bar{u}(x,\ \omega)$ 是 $u(x,\ y)$ 的余弦变换

10.6.4 (a) $u(x,\ t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^\infty f(\bar{x})\ln\dfrac{(x-\bar{x})^2+y^2}{(x+\bar{x})^2+y^2}\mathrm{d}\bar{x}$

10.6.11 (a)
$$u(x,\ y,\ t) = \int_0^\infty\int_0^\infty f(x_0,y_0)\frac{1}{4\pi kt}\left\{\exp\left[\frac{-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}{4kt}\right]+\exp\left[\frac{-(x+x_0)^2-(y+y_0)^2}{4kt}\right]\right.$$
$$\left.-\exp\left[\frac{-(x+x_0)^2-(y-y_0)^2}{4kt}\right]-\exp\left[\frac{-(x-x_0)^2-(y+y_0)^2}{4kt}\right]\right\}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0$$

10.6.12 (a) $u(x,y,t) = \displaystyle\int_0^\infty\sum_{n=1}^\infty \bar{A}_n(\omega,\ t)\sin\frac{\pi x}{L}\sin\omega y\mathrm{d}\omega$，其中

$$\bar{A}_n(\omega,t) = c(\omega)e^{-k[\omega^2+(n\pi/L)^2]t}$$

和

$$c(\omega) = \frac{4}{L\pi}\int_0^\infty\int_0^L f(x,y)\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\omega y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

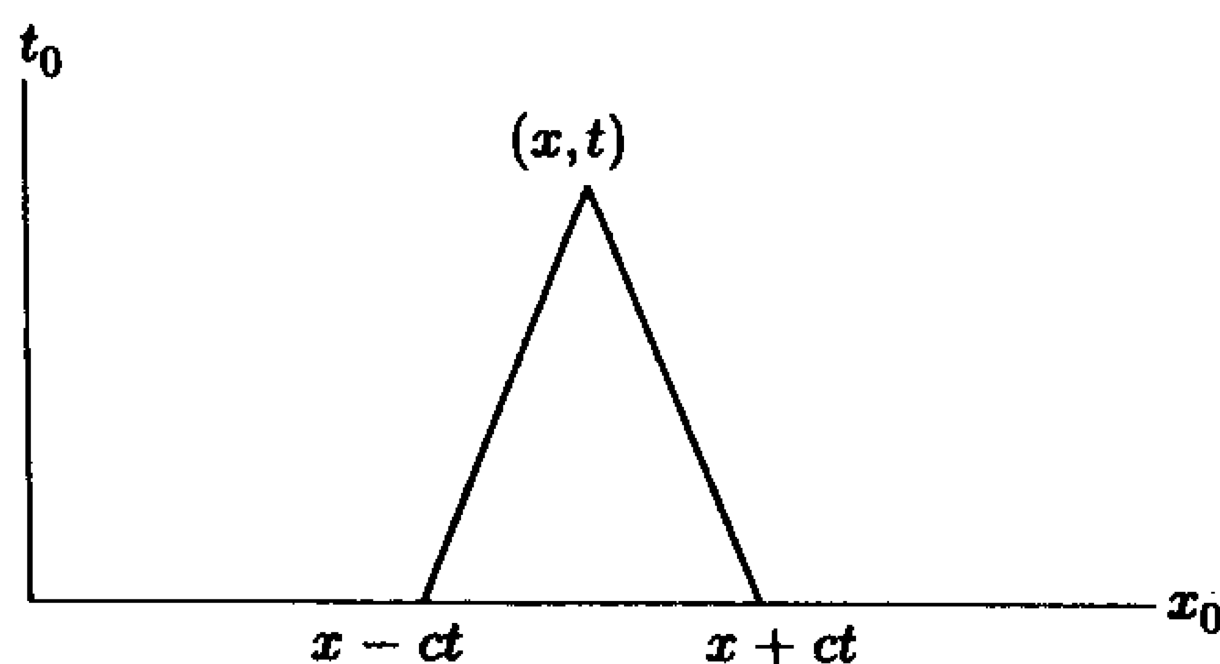
10.6.15 (a) $\bar{U} = F(\omega)e^{-\omega z}$

10.6.15 (b) $u(x,\ y) = \dfrac{z}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\frac{f(x_0,y_0)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2]^{3/2}}$

10.6.16 (b) $u(r,\theta) = \displaystyle\int_0^\infty A(\omega)\sinh\omega\theta\sin\left(\omega\ln\frac{r}{a}\right)\mathrm{d}\omega$

10.6.18 $u(x,t) = \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct}g(\bar{x})\mathrm{d}\bar{x}$

11.2.6 (b)



11.2.7 (a) $u(x,t) = \displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct}g(x_0)\frac{1-e^{-i\omega(t-|x-x_0|/c)}}{2i\omega c}\mathrm{d}x_0$

11.2.8 (a) 影响函数 $= \begin{cases} 0 & 若\ |x-x_0| > ct \\ \dfrac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{4\pi c^2 r} & 若\ |x-x_0| < ct \end{cases}$，其中 $r = |x-x_0|$

11.2.10 (b) $u(x,t) = \begin{cases} 0 & 若\ x > ct \\ h\left(t-\dfrac{x}{c}\right) & 若\ x < ct \end{cases}$

11.2.12 (a) $G(x,t;x_1,t_1)=\begin{cases}0 & 若\ r>c(t-t_1)\\ \dfrac{1}{2\pi c\sqrt{c^2(t-t_1)^2-r^2}} & 若\ r<c(t-t_1)\end{cases}$

11.3.2 (c) 如果 $A=1$,则 $u(x,t)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x/\sqrt{4kt}}^{\infty}e^{-\eta^2}d\eta$

11.3.3 $G(x,t;x_0,t_0)=\dfrac{1}{\sqrt{4\pi k(t-t_0)}}\left\{\exp\left[\dfrac{-(x-x_0)^2}{4k(t-t_0)}\right]+\exp\left[\dfrac{-(x+x_0)^2}{4k(t-t_0)}\right]\right\}$

12.2.2 $\omega(x,t)=\cos(x+3t)$

12.2.5 (b) $\omega(x,t)=t+f(xe^{-t})$

12.2.5 (d) $\omega(x,t)=e^t f\left(x-\dfrac{3}{2}t^2\right)$

12.2.6 $x=2f(x_0)t+x_0$

12.2.8 $u(x,t)=\begin{cases}1 & x\leqslant 2t\\ \dfrac{x}{2t} & 2t<x<4t\\ 2 & x\geqslant 4t\end{cases}$

12.3.4 (a) $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=-c\dfrac{dF(x)}{dx}$

12.3.4 (b) $\dfrac{\partial u}{\partial t}(0,t)=-\dfrac{1}{c}\dfrac{dF(-ct)}{dt}$

12.4.1 $u(x,t)=\begin{cases}0 & 若\ x>ct\\ h\left(t-\dfrac{x}{c}\right) & 若\ x<ct\end{cases}$

12.4.2 $u(x,t)\begin{cases}\cos x\cos ct & 若\ x<-ct\\ e^{-(t+x/c)}+\sin x\sin ct & 若\ 0>x>-ct\end{cases}$

12.4.6 $u(x,t)=\begin{cases}0 & x>ct\\ -c\int_0^{t-x/c}h(\bar t)d\bar t & x<ct\end{cases}$

12.4.7 $u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}[f(x-ct)+f(x+ct)] & 若\ x>ct\\ \dfrac{1}{2}[f(x+ct)+f(ct-x)]-c\int_0^{t-x/c}h(\bar t)d\bar t & 若\ x<ct\end{cases}$

12.5.1 (b) $u(x,t)=\dfrac{1}{2}[f(x-ct)+f(x+ct)]$

12.6.1 (a) $\rho(x,t)=f(x)$

12.6.1 (c) $\rho(x,t)=f(x)e^{-3xt}$

12.6.2 $\rho(x,t)=(1+\sin x)e^{t+x/2}$

12.6.3 (a) $\rho(x,t)=\sin(x-c_0t)$

12.6.3 (b) $\rho(x,t)=\begin{cases}g\left(t-\dfrac{x}{c_0}\right) & x<c_0t\\ f(x-c_0t) & x>c_0t\end{cases}$

12.6.4 (a) $q=u_{max}\rho\left(1-\dfrac{\rho}{\rho_{max}}\right)$.

12.6.4 (b) $\rho=\rho_{max}/2,u=\dfrac{u_{max}}{2},q=\dfrac{\rho_{max}u_{max}}{4}$

12.6.8 (a) $\rho(x,t)=\dfrac{e^{-3(x-ct)}}{3c}(1-e^{-3ct})+f(x-ct)$ (c) $\rho(x,t)=5t+f\left(x-\dfrac{1}{2}t^2\right)$

(e) $\rho(x,t) = e^{-t}f\left(x + \frac{1}{3}t^3\right)$ (g) $\rho(x,t) = \frac{1}{2}t^2 + f(xe^{-t})$

12.6.9 (a) $\rho(x, t) = e^{3t}f(x_0)$，其中 $x = x_0 - \frac{1}{6}(e^{6t} - 1)f^2(x_0)$

12.6.9 (c) $\rho(x, t) = e^{-t}f(x_0)$，其中 $x = x_0 + f(x_0)\int_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$

12.6.11 $u(x, t) = \begin{cases} e^{3t}f\left(x - t - \frac{t^2}{2}\right) & x > t + \frac{r^2}{2} \\ e^{3(t-\tau)}g(\tau), & \text{其中 } x = t + \frac{t^2}{2} - \frac{3}{2}\tau - \frac{\tau^2}{2},\ x < t + \frac{t^2}{2} \end{cases}$

12.6.14 (a) $-Vf' + u_{max}\left(1 - \frac{2f}{\rho_{max}}\right)f' = vf''$

12.6.14 (c) $V = \frac{|q|}{|\rho|} = u_{max}\left(1 - \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_{max}}\right)$

12.6.17 (a) $\rho(x, t) = \begin{cases} \frac{\rho_{max}}{5} & x < u_{max}t/5 \\ \frac{3\rho_{max}}{5} & x > u_{max}t/5 \end{cases}$

12.6.18 (b) $\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_1 & x < u_{max}\left(1 - 3\frac{\rho_1^2}{\rho_{max}^2}\right)t \\ \frac{\rho_{max}}{\sqrt{3}}\sqrt{1 - \frac{x}{u_{max}t}} & \text{其他} \\ \rho_2 & x > u_{max}\left(1 - \frac{3\rho_2^2}{\rho_{max}^2}\right)t \end{cases}$

13.2.4 $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\bar{t})\,d\bar{t}\right] = \frac{F(s)}{s}$

13.2.5 (b) $\frac{8s}{(s^2+16)^2}$ (d) $\frac{4}{s^2 - 6s + 25}$

(f) $e^{-5s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{10}{s^2} + \frac{25}{s}\right) - e^{-8s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{16}{s^2} + \frac{64}{s}\right)$ (h) $\frac{24e^{-s}}{s^5}$

13.2.6 (e) $\frac{7}{6}e^{-7t} - \frac{1}{6}e^{-t}$

(j) $\frac{2}{9} + \frac{1}{3}\sin 3t - \frac{2}{9}\cos 3t - 5H(t-4)\left[\frac{2}{9} + \frac{1}{3}\sin 3(t-4) - \frac{2}{9}\cos 3(t-4)\right]$

13.2.7 (b) $y = 1 + e^{-t}$

(d) $y = \begin{cases} \frac{25}{7}e^{t} - \frac{4}{7}e^{-6t} & 0 < t < 3 \\ -\frac{1}{10}e^{-t} + e^{t}\left(\frac{25}{7} + \frac{1}{14}e^{-6}\right) + e^{-6t}\left(\frac{1}{35}e^{15} - \frac{4}{7}\right) & t > 3 \end{cases}$

(f) $y = \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{6}\sin 2t$

13.3.2 $G(t, t_0) = \sin(t - t_0)$

13.4.3 $u(x, t) = \sin x \cos ct$

13.4.4 $\bar{U}(x, s) = F(s)e^{-\sqrt{s/k}x}$

13.5.3 $\bar{U}(x, s) = \frac{cB(s)\sinh sx/c}{s\cosh sL/c}$

13.6.4 (a) $\bar{G}(x, s; x_0, t_0) = \dfrac{e^{-st_0}}{\sqrt{sk}}\begin{cases} e^{-\sqrt{s/k}\,x_0}\sinh\sqrt{\dfrac{s}{k}}x & x < x_0 \\ e^{-\sqrt{s/k}\,x}\sinh\sqrt{\dfrac{s}{k}}\,x_0 & x > x_0 \end{cases}$

13.7.1 (b) $f(t) = \dfrac{1}{3}\sin 3t$

13.8.1 $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\dfrac{n\pi x}{L}\cos\dfrac{n\pi ct}{L}$，其中 $a_n = \dfrac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x$

14.2.1 (c) $\omega = -k^2$

14.2.5 $\omega^2 = gk\tanh kh$

14.2.7 $\omega^2 = g|k|$

14.3.9 (a) 设 $k = \omega_f^{1/3}$，$s = sign(\omega_f)$. 对 $x < 0$，$G(x, 0) = \dfrac{1}{3}(is\sqrt{3}+1)e^{-ikx/2+\sqrt{3}|k|x/2}$. 对 $x > 0$，$G(x, 0) = \dfrac{2}{3}e^{ikx} + \dfrac{1}{3}(is\sqrt{3}-1)e^{-ikx/2-\sqrt{3}|k|x/2}$

14.5.3 (b) 如果 $x > -\dfrac{1}{4}t$，两个波；如果 $x < -\dfrac{1}{4}t$，零个波

14.6.1 $k = k_0$ 和 $\omega = \omega(k_0)$

14.7.8 $2B = Cu + 2B_0$，$8A = -Cu_{xx} + 3Cu^2 + 4B_0u + 8A_0$，
$2u_t = -A_{xxx} + 4uA_x + 2Au_x$

14.8.6 (b) $\sigma = -1 + Rk^2 - k^4$，$\omega = k^3$

14.8.7 (c) $\sigma = k$，$\omega = 0$ 不适定的，因为当 $k \to +\infty$ 时，$\sigma \to \infty$

14.9.3 $\psi =$ 常数，$2\omega\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}T} + \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}T}r + 3\omega^3 r^3 = 0$

14.9.5 $u = cL^{-3/4}\cos\left(\int\sqrt{\dfrac{g}{L(\varepsilon t)}}\mathrm{d}t + \psi\right)$

14.9.8 $k = \theta_x$，$\omega = -\theta_t$，$k_T + 3k^2k_X = 0$，$u_0 = Ae^{i\theta} + (*)$，$A_T + 3k^2A_X + 3kk_XA = 0$

14.10.3 外部 $u_0 = -\dfrac{x}{4}$. 内部(右) $U_0 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{9}{4}e^{2X}$，其中 $x - 1 = \varepsilon^{1/2}X$. 内部(左) $U_0 = e^{-2X}$，其中 $x = \varepsilon^{1/2}X$

14.10.6 外部 $u_0 = 6(2x+1)^{-1}$. 内部 $U_0 = 6 - 5e^{-X}$，其中 $x = \varepsilon X$

索 引

索引中的页码为英文原书页码，与书中页边标注的页码一致.

C

E

G

H

I

J

K

M

N

Q

R

S

T

U

V

Y

Z